ALGEBRA

LOVAGLIA

ALGEBRA

OXFORD
UNIVERSITY PRESS

CONSULTORES:

Actuario IRMA MAGALLANES V.

Jefe de Area de Matemáticas del
Colegio de Ciencias y Humanidades Azcapotzalco
Profesora de Matemáticas
Facultad de Comercio y Administración
Universidad Nacional Autónoma de México

Actuario WILBERT MENDEZ P.

Jefe de Area de Matemáticas
Colegio de Ciencias y Humanidades Azcapotzalco
Universidad Nacional Autónoma de México

Mat. JORGE MARTÍNEZ SÁNCHEZ

Jefe de Area de Matemáticas
Colegio de Ciencias y Humanidades Naucalpan
Profesor Adjunto
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México

Mat. JOSÉ LUIS LUNA SOTO

Jefe de Area de Matemáticas
Colegio de Ciencias y Humanidades Naucalpan
Universidad Nacional Autónoma de México

Ing. Quim. JORGE SIERRA C.

Jefe de Area de Matemáticas
Colegio de Ciencias y Humanidades Vallejo
Universidad Nacional Autónoma de México

Mat. JOAQUÍN SANTAMARÍA

Jefe de Area de Matemáticas
Colegio de Ciencias y Humanidades Vallejo
Universidad Nacional Autónoma de México

TRADUCCION:

Lic. JOSÉ GUEVARA ALFARO

Profesor de Matemáticas
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey

REVISION TECNICA:

Lic. GUADALUPE JOSÉFINA TOLEDO M.

Profesora de Matemáticas
Colegio de Ciencias y Humanidades Vallejo
Universidad Nacional Autónoma de México

Mat. ALEJANDRO BENÍTEZ S.

Profesor de Matemáticas
Colegio de Ciencias y Humanidades Vallejo
Universidad Nacional Autónoma de México

Ing. MOISÉS GALICIA A.

Profesor de Matemáticas
Escuela Preparatoria del
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey

Prólogo

Este es un texto de Algebra Intermedia cuyo principal propósito es desarrollar comprensión y habilidad en el uso del álgebra. Para lograrlo se ha puesto énfasis en la estructura de las matemáticas y en el uso del razonamiento deductivo.

Al escribir este texto hemos considerado dos necesidades presentes hace mucho tiempo: la de tener un texto que proporcione mucha práctica en las habilidades fundamentales, llevando a este nivel intermedio el espíritu moderno de la revolución en la enseñanza de las matemáticas, y la de provocar el interés de los estudiantes hacia un curso que generalmente se considera de repaso. El resultado es un texto basado en la presunción de que los estudiantes en este nivel deben capacitarse para escribir sus propias pruebas.

Los estudiantes de álgebra en este nivel demuestran considerable interés y habilidad natural al usar la lógica, pero a menudo carecen de un entrenamiento formal, especialmente cuando no han tomado un curso de Geometria. Cuando se espera que ellos aprendan y *en realidad utilicen* los elementos de razonamiento deductivo, su interés en lo que posiblemente sea materia de repaso se ve altamente estimulado, obteniendo así una apreciación vívida del espíritu de las matemáticas.

Por ello, hemos introducido estos elementos en el capítulo 1, y en los capítulos 2 y 3 se espera que los estudiantes adquieran confianza en su uso mientras desarrollan la estructura del sistema de números reales. Nosotros y los demás catedráticos de la materia en el San Jose City College hemos encontrado muy reconfortante la entusiasta participación de los estudiantes en la construcción de sus propias demostraciones. Como un subproducto de su experiencia al utilizar el razonamiento deductivo, los estudiantes siguen más fácilmente y aprecian mejor los desarrollos tanto en la pizarra como en el texto. Consecuentemente, ha sido posible incluir en los ejercicios problemas un tanto difíciles que anticipan la naturaleza de temas que se presentan más tarde.

Aunque los capítulos 1 al 9 constituyen el material básico para un curso, una de las características más relevantes de este texto es su flexibilidad. Por ejemplo, en un curso de un semestre el instructor puede decidir omitir el capítulo 3. (Sus importantes resultados aparecen al final del capítulo para referencia posterior.) El instructor puede también omitir secciones tales como la de variación en el capítulo 6 y la de sistemas de desigualdades en el capítulo 7, sin perturbar la continuidad.

El capítulo 4 provee material para trabajo intensivo en técnicas de factorización, operación con fracciones y solución de ecuaciones y desigualdades. Tiene una abundancia de problemas para ejercitar: unos, de rutina; otros, difíciles, y algunos, muy difíciles. Puesto que este capítulo es una extensión del material introducido en el álgebra elemental, el tiempo que debe dedicársele dependerá de los antecedentes y nivel de los estudiantes.

Los capítulos del 10 al 14 son en su mayor parte independientes entre sí y pueden cubrirse u omitirse de acuerdo con el criterio del instructor o el programa de estudios. Estos capítulos tratan algunos de los temas más avanzados del álgebra intermedia utilizando la estructura de conjuntos y el concepto de función como ideas unificadoras.

Se incluye suficiente material para un curso de un semestre de clases diarias o un curso anual de clases terciadas.

Deseamos agradecer a nuestros colegas del Departamento de Matemáticas y a los estudiantes del San Jose City College por su ayuda al utilizar las ediciones preliminares de este texto y por sus muchos y útiles comentarios y sugerencias. También damos las gracias a la institución misma por su aliento al iniciarse este proyecto.

Finalmente, expresamos nuestra apreciación a Hellen Conway y a Marjorie Elmore por el peso del trabajo mecanográfico.

Florence M. Lovaglia
Merritt A. Elmore
Donald Conway

ÁLGEBRA

Florence M. Lovaglia • Merritt A. Elmore • Donald Conway
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, SAN JOSE CITY COLLEGE

OXFORD
UNIVERSITY PRESS

OXFORD
UNIVERSITY PRESS

Oxford University Press es un departamento de la Universidad de Oxford, el cual promueve los objetivos de excelencia en la investigación, el aprendizaje y la educación de la Universidad mediante publicaciones en todo el mundo. Oxford es una marca registrada de Oxford University Press en el Reino Unido y en algunos otros países.

Publicado en México por
Oxford University Press México, S.A. de C.V.
Antonio Caso 142, Col. San Rafael, Delegación Cuauhtémoc, C.P. 06470, México, D.F.

ÁLGEBRA

Tercera edición en español publicada en 1972

Bachillerato

Decimotercera reimpresión

Traducido de la tercera edición en Algebra: An Intermediate Approach

Sobre papel Bond Editor Alta Opacidad de 75 g
Printed by Master Copy, S. A. de C. V.
Av. Coyoacán 1450, Col. Del Valle
C.P. 03100, México, D. F.

Impreso en México

Julio de 2014

Créditos:
Autor: Florence M. Lovaglia, Merrit A. Elmore and Donald Conway
Sponsor editor: Jorge Alberto Ruiz González
Edición: Ester Alizeri Fernández
Sergio Gerardo López Hernández
Producción: Antonio Figueredo Hurtado

Tabla de materias

8 Números complejos 225

9 Ecuaciones cuadráticas 249

10 Sistemas de ecuaciones con cuadráticas 268

11 Algebra de matrices y determinantes 279

12 Polinomios y funciones polinomiales 297

13 Funciones logarítmicas y exponenciales 312

14 Sucesiones: un tipo especial de funciones 333

ÁLGEBRA

Conjuntos y lógica 1

1-1 CONJUNTOS

La idea de conjunto es básica en el pensamiento humano. La idea es algo puramente intuitivo, algo no definido, pero sí entendido por cada persona como resultado de su propia experiencia. Gracias a que la idea de un conjunto es algo ya entendido, podemos identificarlo y hablar de él.

Cuando alguien habla de un conjunto, se refiere a una colección de objetos que se entiende se presentan juntos. Estos objetos se llaman *miembros* o *elementos* del conjunto.

Si hemos de entender lo que significa un cierto conjunto al que estamos considerando, hemos de saber cuáles son sus elementos o tener una forma de determinar si un objeto en particular es o no elemento del conjunto.

Ejemplo (a) Los miembros del Senado forman un conjunto llamado Senado de la República.
Ejemplo (b) Hoy y mañana se refieren a dos periodos de tiempo que podemos interpretar como un conjunto formado por dos elementos.
Ejemplo (c) Los números 2, 3 y 5 forman un conjunto con tres elementos.
Ejemplo (d) Las partes del carro forman un conjunto llamado el sedán Volkswagen 1969, del Sr. Pérez.

Nótese que en algunos casos, como el ejemplo (d), el conjunto consiste en objetos físicos reales. En otros, como los ejemplos (b) y (c), los elementos del conjunto son abstractos, es decir, existen solo como ideas en la mente del estudiante.

Nótese también que en algunos casos los elementos del conjunto están organizados de cierta forma, o sea que algunos elementos tienen ciertas relaciones con otros elementos. Esto es particularmente notable en el ejemplo (d), en que las partes del Volkswagen se ajustan una a otra de un modo determinado.

1-2 NOTACION

Ordinariamente usaremos letras mayúsculas para representar los conjuntos e incluiremos sus elementos dentro de llaves, separados por comas, { }.

El símbolo $\in$ significa «es elemento de». Así, «$a \in S$» se lee «a es elemento de S». Análogamente, $\notin$ significa «no es elemento de».

Ejemplo (a) Sea S la letra que designa al conjunto descrito precisamente como $\{a, b, c, d\}$. Por tanto, S es el conjunto cuyos elementos son las primeras cuatro letras minúsculas del alfabeto. Podemos entonces escribir $a \in S$, $b \in S$, $c \in S$ y $d \in S$. Similarmente, $f \notin S$, $3 \notin S$, Julio César $\notin S$, Roma $\notin S$, etc.

Ejemplo (b) Enumérense los elementos del conjunto de estados de los Estados Unidos que bordean el Golfo de México. Dicho conjunto es {Texas, Louisiana, Mississippi, Alabama, Florida}. Obsérvese que esta lista de elementos que forman el conjunto se encuentra entre llaves.

1-3 CONJUNTOS IGUALES

Usamos el signo de igualdad para indicar que dos símbolos representan al *mismo* conjunto.

Definición Se dice que dos conjuntos S y T son *iguales* si cada elemento de S es elemento de T y viceversa. Se escribe $S = T$.

Ejemplo En el Ejemplo (a) de la Sección 1-2 pusimos $S = \{a, b, c, d\}$, puesto que $\{a, b, c, d\}$ es un símbolo para representar al mismo conjunto que representa S.

Debe notarse que, según esta definición, no importa el orden en que se expresan los elementos. Por lo tanto, $\{a, b, c, d\} = \{b, d, c, a\}$.

1-4 CONJUNTO VACIO

Es útil tener el concepto de un conjunto sin elementos.

Definición Un conjunto sin elementos recibe el nombre de *conjunto vacío* o *conjunto nulo* y se representa por $\{\ \}$ o por $\varnothing$.

Ejemplo (a) El conjunto de emperadores romanos que aún viven es un conjunto vacío.

Ejemplo (b) Considérese el conjunto S de todos los elementos que lo son tanto de $\{a, b, c\}$ como de $\{d, e, f\}$. El conjunto S no tiene elementos; luego, $S = \{\ \ \}$.

1-5 SUBCONJUNTOS

Definición Se dice que un conjunto S es subconjunto de un conjunto T, si todos los elementos de S lo son también de T. El símbolo $\subseteq$ se lee «es subconjunto de».

Así, «$S \subseteq T$» se lee «S es subconjunto de T». Decir que S no es subconjunto de T significa que algún elemento de S no lo es de T. En tal caso escribimos $S \not\subseteq T$.

Ejemplo (a) Sean $S = \{a, b, c, d\}$ y $T = \{a, b, c, d, e\}$. Vemos que $S \subseteq T$. Sin embargo, si $H = \{a, c, f\}$, notamos que $f \notin T$, de modo que $H \not\subseteq T$.

Entenderemos que el conjunto vacío, $\varnothing$, siempre es subconjunto de cualquier conjunto T. Si no fuese así, ello significaría que algún elemento de $\varnothing$ no sería miembro de T, pero como $\varnothing$ no tiene elementos esto resulta imposible.

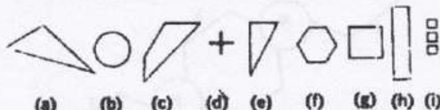
Ejemplo (b) Sea $K = \{l, m, n\}$. Todos los posibles subconjuntos de K son los siguientes: $\{\ \}$, $\{l\}$, $\{m\}$, $\{n\}$, $\{l, m\}$, $\{m, n\}$, $\{l, n\}$, $\{l, m, n\}$. Nótese cómo siguiendo la definición, todos son subconjuntos de K, incluso el último, que es K mismo. Este último, sin embargo, no es subconjunto *propio*.

Definición Se dice que S es un *subconjunto propio* de T, si $S \subseteq T$ y además existe algún elemento de T que no está en S. Esto lo escribimos $S \subset T$.

Cabe observar que cualquier subconjunto de T es subconjunto propio de T, excepto T mismo.

1-1 Ejercicios

1. (a) Escribir los elementos del conjunto de los nombres de los meses del año.
(b) Escribir los elementos del subconjunto de la parte (a) que no tengan *r*.
(c) Escribir el conjunto de los elementos del conjunto de la parte (b) que sean meses de invierno.
2. (a) Escribir una frase que describa al conjunto {México, Guatemala, Brasil, Colombia, Ecuador}.
(b) Escribir una frase que describa al conjunto {México, Brasil}.
(c) Escribir una frase que describa al conjunto {Brasil}.
3. Escribir una frase que describa al conjunto $\{I, V, X, L, C, D, M\}$.
4. Sea Q = conjunto de todos los cuadriláteros y T = conjunto de todos los triángulos. Para cada figura de la (c) a la (i), dar una oración breve usando los símbolos $\in$ o $\notin$ indicando si pertenece a Q o T. Por ejemplo, $a \in T$. También $b \notin T$ y $b \notin Q$.



5. Con referencia a las partes del carro que forman el conjunto llamado el sedán Volkswagen 1969 del Sr. Pérez, dar una propiedad del conjunto que no tengan los elementos individualmente.
6. Escribir los miembros del conjunto de todas las fracciones simples entre 0 y 1 cuyo denominador sea 7.
7. Una persona tiene tres monedas, cada una de 1 o de 5 centavos. Escribir los elementos del conjunto de posibles sumas de capital que puede tener dicha persona. (Por ejemplo, si fuesen tres monedas de 1 centavo, tendría 3 centavos; si fuesen dos de 1 centavo y una de 5 centavos, tendría 7 centavos, etc.)
8. Una persona tiene tres monedas, cada una de 1, 5 o 10 centavos. Escribir los elementos del conjunto de posibles sumas de capital que puede tener.
9. Hallar todos los subconjuntos de $R = \{a, b\}$. Son cuatro.
10. (a) Encontrar todos los subconjuntos de $S = \{a, b, c\}$. Hay ocho.
(b) Había también ocho subconjuntos en el Ejemplo (b) de la Sección 1-5. ¿Es solo una coincidencia? Explicar.
11. Hallar todos los subconjuntos de $T = \{a, b, c, d\}$.
12. ¿Cuántos subconjuntos tiene $U = \{a, b, c, d, e\}$?
13. Con referencia a los conjuntos usados en el Ejercicio 9-11, marcar cada una de las afirmaciones siguientes como verdadera, si es cierta; en otro caso, llamarla falsa.

(a)	$R \subseteq R$	(i)	$S \subset T$
(b)	$R \subseteq S$	(j)	$R \subset T$
(c)	$S \subseteq R$	(k)	$a \in R$
(d)	$S \subseteq T$	(l)	$a \subseteq R$
(e)	$R \subseteq T$	(m)	$\varnothing \subseteq T$
(f)	$R \subset R$	(n)	$\varnothing \in T$
(g)	$R \subset S$	(o)	$3 \in R$
(h)	$S \subset R$	(p)	$3 \in S$

14. Refiriéndonos a los conjuntos de los Ejercicios 9-11, responder a las preguntas siguientes:
(a) Sea $X \subseteq S$. ¿Debe ser $X = R$? Si la respuesta es no, explicarla.
(b) Sea $Y \subseteq T$. ¿Debe ser $X \subseteq Y$? Si la respuesta es no, explicarla.
15. Sean $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5, 6\}$ y $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Completar las afirmaciones que siguen, poniendo el símbolo adecuado en el espacio correspondiente.

(a) $\in$ o $\notin$
2_A A_C $1, 2, 3_C$
4_B 0_A

(b) $\subseteq$ o $\nsubseteq$
A_C A_B B_B
$\varnothing_A$ B_C $\{2, 3, 1\}_A$

(c) $\subset$ o $\not\subset$
A_C $\varnothing_\varnothing$ $\{2, 3, 1\}_A$ A_B
$\varnothing_A$ B_B B_C B_A

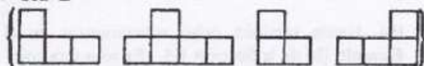
(d) $=$ o $\neq$
A_B $\{2, 3, 1\}_A$ $\{\ \}_\varnothing$

16. Sea $M = \{\ \ \}$ un conjunto de «policuadrados» unilaterales.* Hay una cierta estructura en este conjunto; sus

* Para un estudio interesante de policuadrados, véase *Polyominoes*, de Solomon Golomb; Scribner, New York, 1965.
N. del T. El término «polyominoes», que carece de equivalente en español, se ha traducido por «policuadrados».

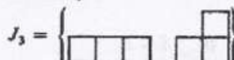
elementos se unen para formar una figura geométrica simple. ¿Cuál es? Dibujar los elementos tal como aparecen en esta estructura.

17. Sea $L =$

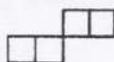


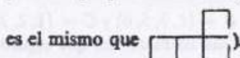
¿Qué estructura geométrica simple tiene este conjunto? Dibujarla mostrando los elementos de L en dicha estructura.

18. Sea J_3 = conjunto de todos los policuadrados unilaterales formados de tres cuadrados pequeños. Es decir,

$J_3 =$ 

(a) Expresar los elementos de J_4 = conjunto de todos los policuadrados formados por cuatro cuadrados pequeños. (Cada uno de éstos debe tener al menos un lado superpuesto al de otro de ellos:

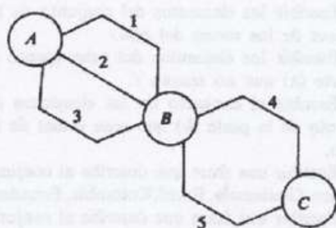


No es un policuadrado. Entiéndanse los policuadrados ubicados en un plano en el que pueden moverse y girar para tomar cualquier posición, pero sin que puedan levantarse. Así, [figura] no es el mismo que ).

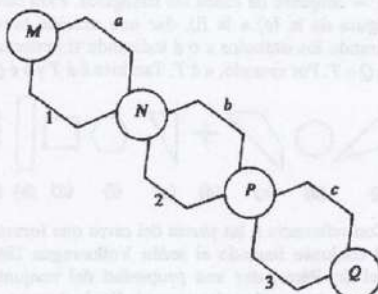
(b) Escríbanse los elementos de J_5.

19. Considerar el conjunto de conjuntos $S = \{X, Y, Z, \varnothing\}$ en donde $X = \{1, 2\}$, $Y = \{1\}$, $Z = \{2\}$ y $\varnothing = \{\ \}$. Completar: S se puede describir simplemente como el conjunto de todos ______________.

20. Escribir en pares ordenados el conjunto de todos los caminos posibles para ir de la ciudad A a la ciudad C, en el diagrama. Por ejemplo, un camino puede ser (1, 4).



21. (a) Tomando triples ordenadas para cada camino, escribir el conjunto de todos los caminos posibles para ir de la ciudad M a la Q. Por ejemplo, uno de esos caminos puede ser (1, b, 3).



(b) ¿Se observa alguna similitud entre la respuesta a este problema y la del Ejercicio 10 (a)?

1-6 CONJUNTOS EQUIVALENTES

Cuando los elementos de un conjunto se corresponden con los de un segundo conjunto de modo que cada elemento de cada conjunto tenga uno, y solo uno, asociado en el otro conjunto, decimos que hay una *correspondencia uno a uno* entre ambos conjuntos.

Definición Dos conjuntos que se pueden poner en correspondencia uno a uno entre sí, se dice que son *equivalentes*. Si A es equivalente a B, se escribe $A \sim B$.

Ejemplo (a) Sean $S = \{a, b, c, d\}$ y $T = \{\triangle, \square, \bigcirc, +\}$. Estos dos conjuntos son equivalentes, puesto que podemos hacer corresponder en forma uno a uno los elementos de un conjunto con los del otro. A continuación se muestran dos de estas correspondencias:

a	b	c	d		a	b	c	d
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$		$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
$\triangle$	$\square$	$\bigcirc$	$+$		$\square$	$+$	$\bigcirc$	$\triangle$

pero, por supuesto, existen otras muchas posibles. Por tanto, $S \sim T$.

Ejemplo (b) Cuando todos los asientos de un salón están ocupados y nadie queda sin asiento, hay una correspondencia uno a uno entre el conjunto de sillas y el de personas en el salón; por consiguiente, ambos conjuntos son equivalentes.

1-7 CARDINALIDAD DE UN CONJUNTO

Todos estamos familiarizados con el conjunto ordenado de los números naturales, $N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, y el conjunto ordenado de los números enteros no negativos $W = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$.* (El símbolo «. . .» quiere decir que sabemos cómo sigue la sucesión de esos números.) Contar es el proceso por el cual ponemos en correspondencia los elementos de un conjunto con algún subconjunto propio de N, comenzando con 1 y usando los elementos de N en orden y sin saltar ninguno. Un subconjunto así se llama *subconjunto estándar de N*.

Ejemplo (a) Comparemos $S = \{a, b, c, d\}$ con un subconjunto de N, comenzando en 1 y usando los elementos de N en orden. Obtendremos la siguiente correspondencia uno a uno:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ a & b & c & d \end{matrix}$$

Es decir, el subconjunto estándar de N, $\{1, 2, 3, 4\}$ es equivalente a $\{a, b, c, d\}$. Decimos entonces que S tiene *cuatro* elementos. Esto lleva a la definición siguiente:

Definición Cuando un conjunto S se equipara con un subconjunto estándar de N, el último elemento de N usado se llama *cardinalidad* del conjunto S y se denota por $n(S)$.

Ejemplo (b) En el Ejemplo (a), $n(S) = 4$.

Definición La cardinalidad de $\varnothing$, el conjunto vacío, es 0.

Tenemos que construir esta definición por separado, puesto que $0 \notin N$ y, por tanto, no tiene sentido hablar de equiparar elementos que no existen.

La cardinalidad del conjunto $\{3\}$ es 1, ya que $\{3\}$ se puede equiparar con $\{1\}$. Es decir, que el conjunto $\{3\}$ tiene un miembro. Similarmente, la cardinalidad del conjunto $\{0\}$ es 1. Hay que estar seguro de que entendemos la diferencia entre $\{ \}$ y $\{0\}$.

Dos números enteros no négativos, m y n, son iguales si ambos son la cardinalidad del mismo conjunto o de conjuntos equivalentes. En tal caso, escribimos $m = n$.

Ejemplo (c) Cuando todos los asientos de un salón se encuentran ocupados y nadie está sin asiento, sabemos que el conjunto de personas en el salón tiene la misma cardinalidad que el conjunto de sillas. Si previamente hemos contado las sillas, inmediatamente sabemos el número de personas, aun sin haberlas contado.

Supóngase, sin embargo, que hay algunas sillas vacías. Diremos entonces que el número de personas *es menor que* el de sillas. ¿Qué indica esto respecto a una definición válida de «es menor que»?

* Actualmente se va imponiendo en forma cada vez más extendida la notación según la cual $N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ y $N = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

Véase N. Bourbaki, E. Artin, R. Godement, S. McLane y G. Birkholf, S-T Hu, S. Lang y muchos otros, aunque ellos llaman números naturales a los que forman el conjunto *N*. (*N. del T.*)

Definición Si m y n son números enteros no negativos, decir que *m es menor que n* significa que m es la cardinalidad de un conjunto que se puede equiparar con un subconjunto propio de un conjunto de cardinalidad n. Escribiremos entonces $m < n$.

Si m es menor que n, podemos decir también que n es mayor que m, lo cual se escribe $n > m$.

Ejemplo (d) $S = \{a, b, c\}$ y $T = \{d, e, f, g, h\}$. Vemos que hay una correspondencia uno a uno entre S y el subconjunto propio de T, $\{d, e, f\}$. Por tanto, $n(S) < n(T)$, o bien, puesto que $n(S) = 3$ y $n(T) = 5$, ponemos $3 < 5$.

1-8 CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS

Si es posible encontrar un subconjunto estándar de N que se pueda hacer corresponder uno a uno con un conjunto dado S, o si S es el conjunto vacío, decimos que S es *finito*. Si no, decimos que es *infinito*.

Ejemplo (a) $T = \{a, b, c, \ldots, x, y, z\}$ es un conjunto finito, puesto que es equivalente a $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 25, 26\}$.

Ejemplo (b) El número de granos de arena en la Tierra es finito puesto que se puede concebir una equiparación entre los granos de arena y un subconjunto estándar de N.

Ejemplo (c) El conjunto $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ es infinito, puesto que no es posible equipararlo con ningún subconjunto estándar de N. Nótese que, sin embargo, sí hay un equiparamiento de N con uno de sus subconjuntos que *no* es un subconjunto estándar: el conjunto de los números pares:

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 2, & 4, & 6, & 8, & 10, & 12, & \ldots \end{array}$$

Vemos que N se puede poner en correspondencia con un subconjunto propio de sí mismo. Esto solo se puede hacer en un conjunto infinito.

1-9 SUBCONJUNTOS ESPECIALES DE N

Mencionaremos aquí, para referencia posterior, algunos subconjuntos de N.

Definición Si $k \in N$, entonces $\{k, 2k, 3k, 4k, 5k, \ldots\}$ se llama *conjunto de todos los múltiplos de k*. Cualquier elemento de este conjunto se llama *múltiplo de k*.

Ejemplo (a) El conjunto de los múltiplos de 3 es $\{3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$. 15 es un múltiplo de 3, así como también 9 y 24.

Recuérdese que si x es un múltiplo de k, $k \in N$, decimos entonces que *x es divisible entre k* y que *k es un factor de x*.

Ejemplo (b) Dado que 24 es múltiplo de 3, podemos decir que 24 es divisible entre 3 y también que 3 es factor de 24.

Definición Si $x \in N$, pero $x \neq 1$ y si x no es divisible entre ningún número natural diferente de 1 o de x mismo, entonces x se llama *número primo*.

Definición Si $x \in N$, pero $x \neq 1$, y x no es número primo, entonces x se llama *número compuesto*.

Ejemplos de números primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23.
Ejemplos de números compuestos: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16.

Nótese que siempre es posible escribir un número compuesto como un producto de números primos.

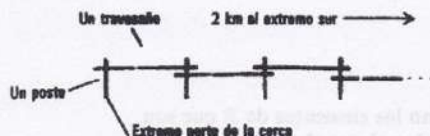
Ejemplo (c) $4 = 2 \cdot 2$, $6 = 2 \cdot 3$ y $75 = 3 \cdot 5 \cdot 5$.

Existe solo una forma de escribir un número compuesto como el producto de factores primos (excepto por el orden). Decimos por ello que *la factorización es única* en N.

Ejemplo (d) $75 = 3 \cdot 25 = 3 \cdot 5 \cdot 5$, y también $75 = 15 \cdot 5 = 3 \cdot 5 \cdot 5$, que es la misma factorización.

1-2 Ejercicios

1. Dar tres distintas correspondencias uno a uno entre $\{a, b, c\}$ y $\{x, y, z\}$.
2. Equiparar el conjunto de las estaciones del año con el de las direcciones primarias en la rosa de los vientos para mostrar su equivalencia.
3. La propiedad del Sr. Pérez da frente al océano y tiene una cerca de travesaños (porción de la cual aparece en la ilustración) que va a lo largo del farallón sobre la playa desde un extremo al otro de la propiedad. Demostrar por qué el conjunto de postes es equivalente al de travesaños, o por qué no.



4. En cierto curso de matemáticas, el profesor notó, mientras escribía en el pizarrón, que todos los asientos del salón estaban ocupados. ¿Se puede concluir que el conjunto de personas en el salón era equivalente al de asientos? Explicar.
5. Sea B = conjunto de personas de México que tiene más de un cónyuge con vida. Sea E = conjunto de esposos con vida en México. Sea C = conjunto de esposas con vida en México. Supóngase que $B = \{\ \}$. ¿Qué se puede decir acerca de E y C? Explicar.
6. (a) Equiparar $S = \{a, b, c, d, e, f\}$ con un subconjunto estándar de N.
   (b) Hállese $n(S)$.
7. Sea $T = \{m, n, q, r, s\}$.
   (a) Escribir todos los subconjuntos de T de cardinalidad 2. Llamar A al conjunto de dichos subconjuntos de T.
   (b) Escribir todos los subconjuntos de T de cardinalidad 3. Llamar B al conjunto de dichos subconjuntos de T.
   (c) ¿Se pueden equiparar A y B? Si es así, hacerlo.
   (d) Hallar $n(A)$ y $n(B)$.
8. Sea $H = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
   (a) Escribir todos los subconjuntos de H de cardinalidad 1. Llamar C al conjunto de dichos subconjuntos de H.
   (b) Escribir todos los subconjuntos de H de cardinalidad 4. Llamar D al conjunto de dichos subconjuntos de H.
   (c) ¿Se pueden equiparar C y D? Si es así, hacerlo.
   (d) Hallar $n(C)$ y $n(D)$.
   (e) Decir si son falsas o verdaderas las expresiones siguientes:
   (1) $C \sim D$ (3) $H \sim C$
   (2) $H \sim D$ (4) $H = C$
9. Sea $J = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Sea E el conjunto de los subconjuntos de J de cardinalidad 3. Sea F el conjunto de subconjuntos de J de cardinalidad 7. ¿Es $n(E) = n(F)$? Dar razones que justifiquen la respuesta. (*Sugerencia*: Mostrar cómo se puede construir una correspondencia uno a uno entre E y F.)
10. Clasificar los conjuntos siguientes según sean finitos o infinitos.
    (a) N = conjunto de todos los números naturales.
    (b) P = conjunto de todos los números pares.
    (c) H = conjunto de todos los seres humanos.
    (d) M = conjunto de todos los subconjuntos estándar de N.
    (e) El conjunto de todos los subconjuntos de H, de la parte (c).
    (f) El conjunto de átomos en la Tierra.
    (g) El conjunto de todos los números naturales inferiores a 90 trillones.
    (h) El conjunto de todos los números naturales superiores a 90 trillones.
    (i) $\varnothing$.
    (j) $\{\varnothing, N\}$.
    (k) El conjunto de todos los triángulos que ha dibujado la humanidad desde los albores de la civilización.
    (l) El conjunto de todos los triángulos.
11. Demostrar que $T = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \dots\}$ que es el conjunto de los múltiplos de tres, es infinito, equiparándolo con N. (*Sugerencia*: Hay que asegurarse de hacer ver en forma clara que para cada elemento de T existe un elemento de N con el cual se corresponde, y viceversa. Usar el hecho de que $3 = 3 \cdot 1, 6 = 3 \cdot 2, 9 = 3 \cdot 3, 12 = 3 \cdot 4$, etc. Entonces $3 \cdot 1$ corresponde a 1, $3 \cdot 2$ corresponde a 2, y así sucesivamente.)
12. Demostrar que $S = \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$ es infinito.
13. Demostrar que $O = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$ es infinito.

14 Demostrar que $B=\left\{\frac{8}{1}, \frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}, \frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}, \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}, \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}, \ldots\right\}$ es finito. Los factores en el numerador son elementos del conjunto de los enteros: positivos, negativos o cero.

15. Sea $S = \{a, b, c, d\}$ y $T = \{c, d, e, f, g\}$. Ponerlos en correspondencia para mostrar que $n(S) < n(T)$.

16. Construir una correspondencia uno a uno entre dos conjuntos para mostrar que la cardinalidad del conjunto de los días de la semana es menor que la del conjunto de meses del año.

17 Sea $R = \{a, b, c\}$ y T el conjunto de todos los subconjuntos de R. Construir una correspondencia uno a uno entre los conjuntos adecuados para mostrar que $n(R) < n(T)$.

1-10 VARIABLES, CONJUNTOS SATISFACTORES, PROPOSICIONES ABIERTAS Y CONJUNTOS VERDAD

Sea $R = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Supóngase que nos interesan varias propiedades de los elementos de este conjunto. Por ejemplo, la propiedad de ser menores que 4 es una propiedad que mantienen algunos de los elementos de R, pero no todos.

Para seleccionar los elementos de R con dicha propiedad, los observamos uno por uno y decidimos si son menores que 4 o no. Podemos decir:

1 es menor que 4	verdadero
2 es menor que 4	verdadero
3 es menor que 4	verdadero
4 es menor que 4	falso
5 es menor que 4	falso

De esta manera hemos seleccionado 1, 2 y 3 como los elementos de R que son menores que 4. El conjunto $\{1, 2, 3\}$ es, pues, el subconjunto de R formado por todos aquellos elementos de R que tienen la propiedad de ser menores que 4.

Es más fácil escribir y hablar sobre esta cuestión haciendo que una proposición tome el lugar de las cinco anteriores. Escribamos «x es menor que 4» y pensemos que x es remplazado, uno por uno, por cada uno de los elementos de R.

La letra x se llama *variable*, y el conjunto R cuyos elementos la remplazan se llama *conjunto satisfactor*. Cada vez que se usa una variable, debe uno saber cuál es el conjunto satisfactor.

Nótese que x es remplazada, por turno, por cada elemento de R y no solo por aquellos que hacen verdadera la proposición. De este modo se puede decir que x representa a cualquier elemento de R.

La proposición con variable «x es menor que 4» se llama *proposición abierta*. Es una proposición que carece de significado hasta que x es remplazada por un elemento de R, con lo cual resulta verdadera o falsa.

El conjunto $\{1, 2, 3\}$ se llama *conjunto de verdad* de la proposición abierta «x es menor que 4». Nótese de nuevo que es un subconjunto de R formado por todos los elementos de R que al remplazar a x en «x es menor que 4», hace que la proposición sea verdadera.

Ejemplo Usar el mismo conjunto $R = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y considerar la proposición abierta: «x es un número par». Esto representa las siguientes proposiciones:

1 es un número par	falsa
2 es un número par	verdadera
3 es un número par	falsa
4 es un número par	verdadera
5 es un número par	falsa

De lo anterior vemos que el conjunto $\{2, 4\}$ es el conjunto de verdad de «x es un número par».

Los símbolos que representan al mismo número durante una exposición se llaman *constantes*. En la proposición «x es menor que 4», 4 es una constante.

1-11 NOTACION DE CONJUNTOS POR CONSTRUCCION

El uso de variables y de proposiciones abiertas nos proporciona una forma muy útil de especificar un cierto conjunto. Simplemente damos una proposición abierta para la cual el conjunto sea el conjunto de verdad. Por ejemplo, refiriéndonos al conjunto R de la Sección 1-10, $R = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, podíamos especificar el conjunto $M = \{1, 2, 3\}$ diciendo «M es el conjunto de todas las x, elementos de R, tales que x es menor que 4». Esto se escribe $M = \{x \in R | x \text{ es menor que } 4\}$ o bien, $\{x | x \in R \text{ y } x \text{ es menor que } 4\}$.

Otro ejemplo sería: $L = \{x \in R | x \text{ es un número par}\}$ es el conjunto $\{2, 4\}$.

Ejemplo (a) $E = \{y \in N | y \text{ es par}\}$ se leería «E es el conjunto de todas las y, elementos de N tales que y es un número par». Así, $E = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$.
Ejemplo (b) $H = \{y \in N | y + 6 = 15\} = \{9\}$. Esta proposición la leeríamos «H es el conjunto de todas las y elementos de N tales que $y + 6 = 15$ y este conjunto está formado solo por el elemento 9».
Ejemplo (c) $G = \{x \in N | 5 \cdot x = 43\} = \{\ \}$. Esto se podría leer «$G$ que es el conjunto de todos los números naturales x tales que $5 \cdot x = 43$, es el conjunto vacío».

Quizá la frase en el Ejemplo (c) sea la más fácil. Hay que notar que existen diferentes formas de escribir en español una proposición simbólica. Cuanto más natural, mejor, siempre y cuando retenga todas las condiciones dadas en símbolos.

Cuando se entiende que se va a usar el mismo conjunto satisfactor a través de toda una exposición, éste se puede omitir de la notación de conjuntos por construcción para un conjunto específico.

Ejemplo (d) Si N es siempre el conjunto satisfactor, podemos escribir $H = \{y | y + 6 = 15\}$, en el Ejemplo (b).

1-3 Ejercicios

1. **Sea** $R = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ el conjunto satisfactor.
   (a) Escribir una proposición abierta con variable para representar las proposiciones siguientes:

   1 es un número impar
   2 es un número impar
   3 es un número impar
   4 es un número impar
   5 es un número impar

   (b) ¿Cuáles son falsas y cuáles verdaderas?
2. **Sea** $S = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ el conjunto satisfactor.
   (a) Escribir las seis proposiciones que representen la proposición abierta con variable: $x < 10$.
   (b) Hallar el conjunto verdad para $x < 10$.
3. **Sea** $S = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ el conjunto satisfactor. Hallar el conjunto verdad de cada una de las proposiciones siguientes:
   (a) x es un número par
   (b) x es un número impar
   (c) $x + 6 \in S$
   (d) $x \neq 4$

En los Ejercicios del 4 al 15, sea $S = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ el conjunto satisfactor. Escribir los elementos de los conjuntos siguientes:

4. $\{x \in S | x < 6\}$
5. $\{x \in S | 3 \cdot x \notin S\}$
6. $\{x \in S | x \neq 3 \text{ y } x \neq 6\}$
7. $\{x \in S | 3 < x < 10\}$
8. $\{x \in S | x < 3 \text{ o } x < 10\}$
9. $\{x \in S | x < 3 \text{ y } x > 10\}$
10. $\{x \in S | 3 < x \text{ o } 10 < x\}$
11. $\{x \in S | 3 < x \text{ y } 10 < x\}$
12. $\{x \in S | x \not> 4\}$
13. $\{x \in S | \text{no es el caso que } x \not> 4\}$
14. $\{x \in S | \text{no es el caso que } (3 < x \text{ o } x \not> 10)\}$
15. $\{x \in S | \text{no es el caso } x \neq 4\}$

En los Ejercicios del 16 al 20 escribir una proposición en español para cada una de las proposiciones dadas simbólicamente.

16. $T = \{x \in N | x < 10\}$

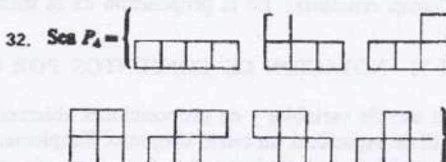
17. $P = \{x \in N \mid 5 < x\}$
18. $R = \{x \in N \mid (x \div 2) \in N\}$
19. $Q = \{y \in N \mid [(y-1) \div 2] \in N\}$
20. $A = \{t \mid t$ es un triángulo y t tiene dos lados iguales$\}$.

En los Ejercicios del 21 al 27, sea $N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\} =$ conjunto de todos los números naturales el conjunto satisfactor. Usar la notación de conjuntos por construcción para representar los siguientes conjuntos:

21. $\{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$
22. $\{3, 6, 9, 12, \ldots\}$
23. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
24. $\{5, 6, 7, 8\}$
25. $\{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$
26. $\{5\}$
27. $\{\ \ \}$

En los Ejercicios del 28 al 31, sea $R = \{a, b, c\}$. Sea S el conjunto de todos los subconjuntos de R. Escribir los elementos de los siguientes conjuntos:

28. $\{x \in S \mid n(x) = 2\}$
29. $\{x \in S \mid n(x) = 0\}$
30. $\{x \in S \mid x \neq R$ y $n(x) > 1\}$.
31. $\{x \in S \mid x \subseteq \{a, b\}\}$.
32. Sea $P_4 =$



un conjunto completo de policuadrados tetraplejos unilaterales. Sea Q_4 el conjunto de todos los subconjuntos de P_4.

(a) Escribir los elementos de $\{x \in P_4 \mid x$ es un cuadrado$\}$.

(b) Escribir los elementos de $\{x \in Q_4 \mid x$ forma un cuadrado$\}$.

(c) Escribir los elementos de $\{x \in Q_4 \mid x$ forma un rectángulo $3 \times 4\}$. (Recordar que no se nos permite levantar un policuadrado.)

(d) ¿Si se usan tantos policuadrados P_4 como sean necesarios, incluyendo duplicaciones, se puede formar un rectángulo 3×5? Explicar. ¿Y un rectángulo 14×27?

1-12 COMBINACION DE CONJUNTOS

Existen dos formas importantes en las cuales se pueden combinar dos conjuntos para formar un tercero. La primera de ellas se llama *unión* y la segunda, *intersección*.

Si A y B son dos conjuntos, entonces la unión de A y B es el conjunto formado por los elementos que lo son de A o de B o de ambos y se denota por $A \cup B$.

Ejemplo (a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{3, 4, 5, c, d\}$. Entonces $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, c, d\}$.
Ejemplo (b) $S = \{a, b, c, d\}$ y $M = \{1, 2, 3\}$. Entonces $S \cup M = \{a, b, c, d, 1, 2, 3\}$.
Ejemplo (c) $G = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ y $H = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Entonces $G \cup H = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, que es el mismo G.

Si A y B son dos conjuntos, entonces la intersección de A y B es el conjunto formado por los elementos que lo son de A y de B simultáneamente y se simboliza por $A \cap B$.

Ejemplo (d) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{3, 4, 5, c, d\}$. Entonces $A \cap B = \{3, 4\}$ puesto que 3 y 4 son los únicos elementos que lo son tanto de A como de B.
Ejemplo (e) $S = \{a, b, c, d\}$ y $M = \{1, 2, 3\}$. Entonces $S \cap M = \{\ \ \}$, el conjunto vacío.
Ejemplo (f) $G = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ y $H = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Entonces $G \cap H = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, que es el mismo H.

Si la intersección de dos conjuntos es el conjunto vacío, se dice que los conjuntos son *ajenos* o *disjuntos*. Por tanto, en el Ejemplo (e), S y M son ajenos o disjuntos.

1-13 COMPLEMENTO DE UN SUBCONJUNTO

Al hablar de varios subconjuntos de un mismo conjunto, se acostumbra llamar *universo* al conjunto del cual los otros son subconjuntos y denotarlo por U. De este modo se puede, y es útil, definir el *complemento* de un subconjunto.

Si S es un subconjunto de U, entonces el complemento de S es el conjunto de

todos los elementos de U que no lo son de S. El complemento de S se simbolizará por S', que se lee «S prima» o «complemento de S».

Ejemplo (a) Sea $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$, y $S = \{a, g, h, i\}$ que es un subconjunto de U. Entonces $S' = \{b, c, d, e, f, j\}$.
Ejemplo (b) Sea $U = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ y $E = \{2, 4, 6, \ldots\}$. Entonces $E' = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ que es el conjunto de todos los números impares.

En resumen, usando la notación por construcción, si U es el universo y A y B son subconjuntos de U, podemos escribir las definiciones de unión, intersección y complemento como sigue:

Unión: $A \cup B = \{x \in U | x \in A \text{ o } x \in B\}$
Intersección: $A \cap B = \{x \in U | x \in A \text{ y } x \in B\}$
Complemento: $A' = \{x \in U | x \notin A\}$

1-4 Ejercicios

En los Ejercicios del 1 al 20, sea el Universo $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Sean $H = \{1, 2, 3, 4\}$, $J = \{3, 4, 5\}$, $K = \{7, 8, 9\}$ y $L = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Hallar los conjuntos siguientes, escribiendo los elementos del conjunto solo si la respuesta no es uno de los conjuntos dados; si la respuesta es uno de los conjuntos dados o el conjunto vacío, escribir el nombre del conjunto.

1. H'
2. L'
3. $H \cup J$
4. $H \cup K$
5. $K \cup L$
6. $H \cap J$
7. $K \cap L$
8. $J \cap K$
9. $H' \cap J'$
10. $(H \cap J)'$
11. $(H \cup J)'$
12. $(H \cap K)'$
13. $H' \cap K'$
14. $H' \cup \varnothing$
15. $H' \cup \varnothing'$
16. $(H \cap J) \cup K$
17. $H \cap (J \cup K)$
18. $(J \cup K) \cap L$
19. $(H \cap J) \cap L$
20. $(H \cup K) \cap (J \cup K)$

En los Ejercicios del 21 al 25, encontrar la unión o intersección pedidas, en dos formas: (a) usando la notación constructiva y (b) escribiendo sus elementos.

21. $\{x \in N | 0 < x < 8\} \cap \{x \in N | 2 < x < 6\}$
22. $\{2, 4, 5\} \cup \{y \in N | 4 < y\}$
23. $\{x \in N | x < 10\} \cup \{x \in N | 5 < x < 12\}$
24. $\{x \in N | x < 10\} \cup \{x \in N | 9 < x\}$
25. $\{x \in N | x < 10\} \cap \{x \in N | 9 < x\}$

26. Describir la relación entre A y B en cada uno de los casos siguientes:
(a) $A \cap B = \varnothing$ (c) $A \cup B = A$
(b) $A \cap B = B$

27. Sean A y B conjuntos. $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$. Indicar si las proposiciones siguientes son falsas o verdaderas:
(a) Si $x \in A$, $x \in B'$, entonces $x \in (A \cap B)$.
(b) Si $x \in A$, $x \in B'$, entonces $x \notin (A \cap B)$.
(c) Si $x \in A$, $x \notin B'$, entonces $x \in (A \cup B)$.
(d) Si $x \notin A'$, $x \notin B'$, entonces $x \in (A \cap B)$.
(e) (Si $x \notin A$, $x \in (A \cup B)$, entonces $x \in B$.

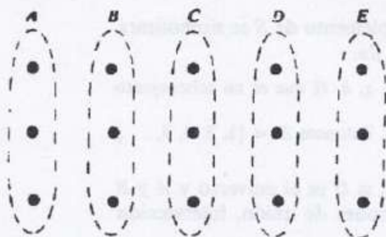
28. Explicar por qué $(B')' = B$, en donde B es cualquier subconjunto de U.

29. Si B es cualquier subconjunto del universo U, ¿cuáles son cada uno de los siguientes conjuntos?
(a) $B \cap B$ (d) $B \cap B'$
(b) $B \cup B$ (e) $B \cap \varnothing$
(c) $B \cup B'$ (f) $B \cup \varnothing$

30. Si A y B son conjuntos ajenos y si $n(A) = a$ y $n(B) = b$, entonces podemos definir la suma de a y b como sigue:
Definición: $a + b = n(A \cup B)$.
Supóngase que $A = \{i, j, k\}$, $B = \{s, t, u, v\}$ y $C = \{u, v, w, x\}$
(a) Hallar $n(A)$
(b) Hallar $n(B)$
(c) Hallar $n(A \cup B)$.
(d) Hallar $n(B \cup C)$.
(e) ¿Es $A \cap B = \varnothing$?
(f) Si la respuesta a la parte (e) es *sí*, hallar $a + b$, usando la definición.
(g) Explicar por qué $n(B) + n(C) \neq n(B \cup C)$.

31. Sean A, B, C, D y E conjuntos mutuamente excluyentes y cada uno de cardinalidad 3.

* En una expresión que comprende varias operaciones, los paréntesis se usan para indicar el orden en que deben ejecutarse dichas operaciones. $(A \cap B)'$ es el complemento del conjunto $A \cap B$. $(A \cup B) \cap C$ indica que se debe formar primero $A \cup B$ y después encontrar su intersección con el conjunto C.



(a) Si $S = \{A, B, C, D, E\}$ encontrar $n(S)$.
(b) Si $T = A \cup B \cup C \cup D \cup E$, expresar $n(T)$ como una suma.

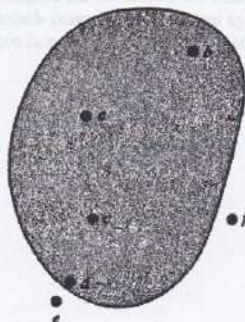
Definamos $5 \cdot 3$ como el símbolo para $n(T)$ y llamémoslo «producto de 5 y 3». Así, escribamos $5 \cdot 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3$, suma repetida de cinco números iguales.

(c) Supongamos ahora que $S = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, en donde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son ajenos, de modo que $n(S) = m$ y $n(A_1) = n(A_2) = \cdots = n(A_m) = k$. Escribir $m \cdot k$ como una suma.

1-14 GRAFICA DE UN CONJUNTO

Al pensar en conjuntos, ayuda el representarlos en un diagrama rodeando un área con una línea cerrada como, por ejemplo, un círculo, un rectángulo o una elipse. Todos los puntos interiores representan los elementos del conjunto en cuestión; los puntos exteriores no son elementos del conjunto. Esto es como decidir si una persona es habitante de cierta ciudad viendo el mapa de dicha ciudad y observando si su casa-habitación queda dentro o fuera de los límites de la ciudad.

Ejemplo (a) Sea S el conjunto de todos los puntos dentro de la curva mostrada. A juzgar por la figura, a, b, c y d son algunos de los elementos S, pero no e y f.



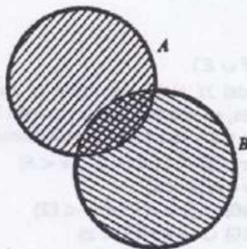
Tal representación de un conjunto se llama gráfica o representación gráfica del conjunto. También se llama diagrama de Venn*, en honor del matemático inglés del siglo diecinueve, John Venn.

Las representaciones gráficas de conjuntos son especialmente útiles al hablar de la unión y la intersección de conjuntos.

Ejemplo (b) Supóngase que los conjuntos A y B están representados por los dos círculos mostrados.

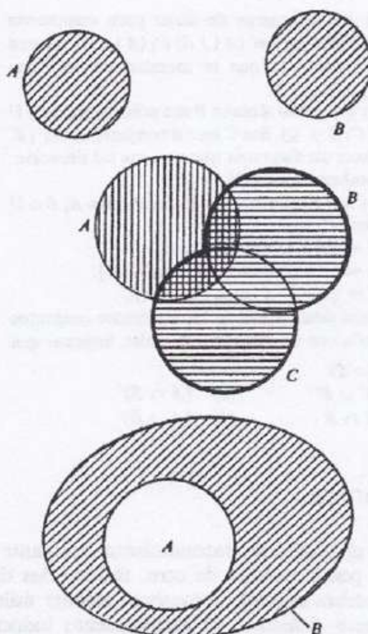
$A \cup B$ es el conjunto de todos los elementos de A o de B o de ambos. Por tanto, la línea gruesa alrededor de la frontera exterior de ambas áreas encierra todos los elementos de $A \cup B$.

$A \cap B$ es el conjunto de todos los elementos que están en A y en B simultáneamente. Por consiguiente, un elemento de $A \cap B$ debe quedar dentro de los dos círculos y, por tanto, ha de estar en el área doblemente sombrea-



* Diagramas de Venn en Estados Unidos e Inglaterra. En otros países se llaman diagramas de Euler, en honor del destacadísimo matemático suizo-alemán Leonhard Euler (1707-1783), que los usó aproximadamente cien años antes que Venn. (*N. del T.*)

da en que se intersectan. (Se puede observar la razón del nombre «intersección».)



Ejemplo (c) Supóngase que los círculos representan a dos conjuntos A y B que no se intersectan. Resulta entonces claro que $A \cap B$ no tiene elementos: $A \cap B$ es el conjunto vacío; $A \cap B = \{\ \}$. Luego A y B son ajenos.

Ejemplo (d) Representar $A \cap (B \cup C)$ gráficamente. Para esto necesitamos tres círculos. El área sombreada con líneas horizontales y rodeada por la línea gruesa representa a $B \cup C$.

El área sombreada con líneas verticales representa a A y, por tanto, el área sombreada doblemente (cuadriculada) es $A \cap (B \cup C)$.

Ejemplo (e) Supóngase que A es un subconjunto de B. Construir una gráfica que represente esa situación, y, suponiendo que B sea el universo, sombrear el complemento de A respecto a B.

El círculo que representa a A debe quedar enteramente dentro del círculo que representa B. El complemento de A será el área dentro de B, que no está dentro de A.

1-5 Ejercicios

1. Dibujar un diagrama de Euler similar a la Figura 1-1 para cada ejercicio y sombrear solo el área que represente el conjunto dado. Si el conjunto es el conjunto vacío, decirlo.

(a)	$A \cup B$	(e)	$(A \cup B) \cup C$
(b)	$B \cap C$	(f)	$(A \cap B) \cap C$
(c)	$A \cup (B \cap C)$	(g)	$(A' \cap B') \cap C$
(d)	$A \cap (B \cup C)$	(h)	$(A \cap B) \cup C'$

2. Seguir las instrucciones dadas en el Ejercicio 1, usando la Figura 1-2 en vez de la 1-1.

3. Seguir las instrucciones dadas en el Ejercicio 1, usando la Figura 1-3 en vez de la 1-1.

4. Diseñar cinco diagramas que muestren relaciones entre A, B, C, distintas de las que aparecen en las Figuras 1-1, 1-2, 1-3. (Suponer que $A, B, C \neq \varnothing$.)

5. Utilizar los diagramas de Euler para comprobar que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ en una situación como la que se muestra en las Figuras 1-1, 1-2 y 1-3.

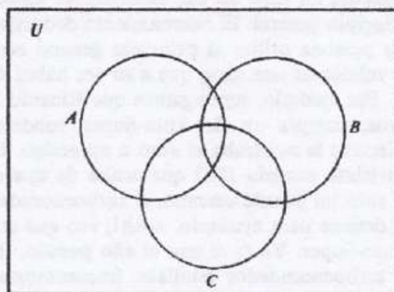


Figura 1-1

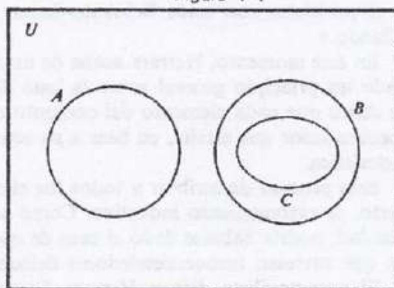


Figura 1-2

6 Utilizar los diagramas de Euler para comprobar que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ en una situación como la que se muestra en las Figuras 1-1, 1-2 y 1-3.

7. Suponer que tanto A como B son subconjuntos de U y que $A \cap B \neq \emptyset$. Sea C un subconjunto de $A \cap B$.
   (a) Hacer un diagrama que muestre tal situación.
   (b) Sombrear $(A \cap B) \cap C'$.
   (c) Sea $x \in C$. ¿De cuál de los conjuntos A, B o U es elemento?

8. Sean $U = \{x | x \text{ es un estudiante}\}$.
   $A = \{x \in U | x \text{ cursa matemáticas}\}$.
   $B = \{x \in U | x \text{ cursa química}\}$.
   Hacer una descripción de los siguientes conjuntos e ilustrarla con un diagrama de Euler. Suponer que $A \cap B \neq \emptyset$.
   (a) $A' \cup B'$ (c) $(A \cap B)'$
   (b) $A \cap B$ (d) $(A \cup B)'$

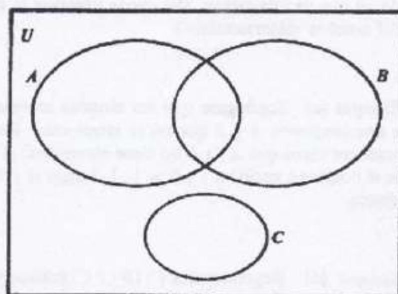


Figura 1-3

1-15 LOGICA

Lógica es el estudio del razonamiento. Mediante su uso podemos determinar cómo un hecho puede resultar de otro. Existen dos tipos importantes de razonamiento que el hombre encuentra consistentemente útiles: el *razonamiento inductivo* y el *razonamiento deductivo*. El razonamiento inductivo es el medio por el cual una persona, en base de sus experiencias específicas, decide aceptar como válido un principio general. El razonamiento deductivo es, en cambio, el medio según el cual esa persona utiliza el principio general aceptado previamente para decidir sobre la validez de una idea, que a su vez habrá de determinar el curso de su acción.

Por ejemplo, supongamos que Ricardo Herrera, que gusta de los autos deportivos, compra un Bel-Auto-Super, modelo 1972, cuyo turboencendedor estalla mientras le mostraba el auto a un amigo. El distribuidor le cambia el auto por el novísimo modelo 1973 que acaba de aparecer, pero cuando Ricardo cruzaba en el auto un puente cercano, el turboencendedor de aquél estalla. Un automovilista se detiene para ayudarlo. «¡Ah!, veo que está en dificultades. Bonito auto ese Bel-Auto-Super. Yo tuve uno el año pasado. ¡Estupendo! El único problema era que el turboencendedor estallaba frecuentemente. ¿Quiere usted que lo lleve?»

«Gracias, amigo. Sí, a mí mismo me han fallado dos turboencendedores. Ese es el problema con estos Bel-Auto-Super: sus turboencendedores siempre están fallando.»

En este momento, Herrera acaba de usar un razonamiento inductivo. Ha enunciado un principio general sobre la base de algunos ejemplos específicos. O sea, ha dicho que cada elemento del conjunto de todos los Bel-Auto-Super tiene turboencendedor que estalla, en base a su conocimiento personal de tres con esa característica.

Este proceso de atribuir a todos los elementos de un conjunto lo que se sabe cierto, es razonamiento inductivo. Como se supondrá, no siempre es válido. En realidad, podría haberse dado el caso de que solo esos tres Bel-Auto-Super fuesen los que tuviesen turboencendedores defectuosos.

El automovilista deja a Herrera frente a una agencia de autos deportivos. «Tengo lo ideal para usted» —dice el vendedor—: «una verdadera joya, recién lle-

gada hoy», y conduce a Herrera a otro salón de ventas. Allí aparece un Bel-Auto-Super.

«¡No! —exclama Herrera—, si es un Bel-Auto-Super su turboencendedor estallará.» Este auto es un Bel-Auto-Super. Por tanto, su turboencendedor estallará.

Herrera acaba de usar un razonamiento *deductivo*. Aceptado el principio de que todos los Bel-Auto-Super tienen turboencendedores defectuosos, lo aplicó a un Bel-Auto-Super en particular y *sin haberlo comprobado*, sacó una conclusión acerca de él.

«Muéstreme un Wolkswagen 2400», dice Herrera decidido.

En nuestro breve estudio de lógica, no nos concierne el razonamiento inductivo, que dejaremos para cursos posteriores de matemáticas. En su lugar, analizaremos algunas de las ideas importantes contenidas en el razonamiento deductivo, que es la forma en que la matemática se desarrolla como una estructura coherente y útil.

1-16 ENUNCIADOS

En lógica, como en toda la matemática, tratamos con proposiciones con las características siguientes: debe ser posible decidir si una proposición es verdadera o falsa. Lo anterior significa que todos los términos y símbolos usados en una proposición deben estar definidos y tener significado. En caso de una proposición abierta, debemos saber cuál es el conjunto satisfactor y la proposición ha de ser falsa o verdadera, pero no ambas cosas, para ada sustitución de la variable por un elemento del conjunto satisfactor. Tal proposición o proposiciones se llaman *enunciados*.

Ejemplo (a) La tarde del 3 de enero de 1967, el cielo estaba nublado en Roma.
Ejemplo (b) El presidente de los Estados Unidos tiene al menos 35 años de edad.
Ejemplo (c) 7 es factor de 21.
Ejemplo (d) 9 es un número par.
Ejemplo (e) Este yeso está hecho del material x, en donde $x \in$ conjunto de todas las sustancias químicas.
Ejemplo (f) $3x + 7 = 5x - 3$, $x \in$ conjunto de números naturales.
Ejemplo (g) $a + b \neq b + a$, en donde a, $b \in$ conjunto de enteros no negativos.
Ejemplo (h) Un triángulo equilátero es isósceles.

Ejemplos de proposiciones de no son enunciados:

Ejemplo (i) Memo Juárez tiene 37 años de edad. («Memo Juárez» no está aún definido.)
Ejemplo (j) Un triángulo es menor que un círculo. («Es menor que» no tiene significado como relación entre figuras geométricas.)
Ejemplo (k) Esta proposición es falsa. (La proposición se contradice a sí misma: Si es verdadera, entonces ha de ser falsa; si es falsa, entonces es verdadera. Luego, no se puede decir si es falsa o verdadera.)
Ejemplo (l) $3x + 7 = 5x - 3$. (El conjunto satisfactor no está dado, por tanto no se puede saber si la proposición es falsa o verdadera.)
Ejemplo (m) $\frac{15}{x-2} = 3$, para $x \in N$. (Si x se sustituye por 2, el lado izquierdo queda $\frac{15}{0}$, que no está definido, por lo que en ese caso la proposición no es verdadera ni falsa.)

1-17 ENUNCIADOS ESPECIFICOS Y ENUNCIADOS GENERALES

De lo anterior se deduce que hay dos tipos de enunciados:

(1) Un enunciado puede tener un *conjunto verdad* que sea subconjunto de su conjunto satisfactor. Tal enunciado se llama *enunciado general*. Las proposi-

ciones abiertas simples en que hay variables son comúnmente enunciados generales. (Véanse los Ejemplos (e), (f) y (g) de la Sección 1-16.)

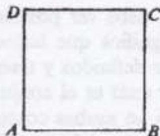
(2) Un enunciado puede ser inmediatamente falso o verdadero. Se dice entonces que tiene un *valor de verdad*: falso o verdadero. Tales enunciados se llaman *enunciados específicos*. (Véanse los Ejemplos (a), (b), (c), (d) y (h) de la Sección 1-16.)

Al especificar un elemento del universo de un enunciado general, lo convertimos en un enunciado específico.

Ejemplo (a) Sea $x \in N$. La proposición abierta «x es un número par» es un enunciado general. Tiene un *conjunto verdad*: el *conjunto de los números pares*. Si escogemos $x = 9$, la proposición se vuelve «9 es un número par». Este es un enunciado específico. Tiene un *valor de verdad*: *falso*.

Un enunciado general no necesita tener una letra como variable, sino que una palabra o frase puede desempeñar el papel de la variable.

Ejemplo (b) Considérese la proposición «esta figura es un rectángulo. Es un enunciado general si pensamos en que las palabras «esta figura» hacen el papel de variable, con el conjunto de las figuras geométricas como conjunto satisfactor. Con esta idea, la podemos reescribir: «x es un rectángulo». El conjunto verdad es el conjunto de todos los rectángulos. Si seleccionamos en particular la figura geométrica que aparece aquí, el cuadrado $ABCD$, entonces la proposición queda «el cuadrado $ABCD$ es un rectángulo», que es un enunciado específico cuyo valor de verdad es *verdadero*.



18 GRAFICA DE UN ENUNCIADO ESPECIFICO

Si un enunciado específico es una proposición simple con alguna forma del verbo «ser» como verbo, entonces siempre se puede reenunciar fácilmente para afirmar que un objeto es elemento de cierto conjunto. El enunciado se puede representar mediante un diagrama de Euler.

Ejemplo (a) «13 es un número primo» se puede expresar como «13 es un elemento del conjunto de los números primos».



Ejemplo (b) «2 + 3 = 5» se puede expresar también como «2 + 3 es un elemento del conjunto de los símbolos del número 5».



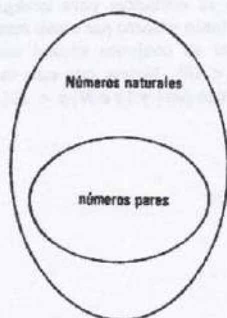
Ejemplo (c) «Todos los hombres son animales» se puede expresar también como «el conjunto de todos los hombres es un subconjunto del de todos los animales.»



1-19 GRAFICA DE UN ENUNCIADO GENERAL

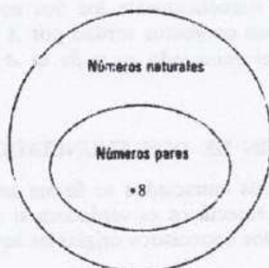
Es evidente que podemos dibujar un diagrama de Euler que represente un enunciado general, trazando el conjunto verdad de el enunciado dentro del conjunto satisfactor.

Ejemplo (a) Sea $x \in$ conjunto de los números naturales. El enunciado «x es un número par» se puede expresar también «x es un elemento del conjunto de los números pares». Así, pues, el conjunto de números pares es el conjunto verdad para el enunciado abierto, por lo que lo dibujamos dentro del conjunto de números naturales.



Un enunciado específico que se obtenga al sustituir la variable por un elemento del conjunto satisfactor se representa por un punto.

Ejemplo (b) Si hacemos $x = 8$ en el Ejemplo (a), tenemos «8 es un número par». Luego, 8 es un punto dentro del círculo del conjunto de números pares.



1-20 ENUNCIADOS COMPUESTOS

Dos o más enunciados se pueden combinar de diversos modos para formar un enunciado compuesto mediante conjunciones u otros vocablos. Los nuevos enunciados tendrán un valor de verdad o conjunto verdad que depende de los valores de verdad o de los conjuntos verdad de los enunciados que lo componen.

1-21 CONJUNCION DE DOS ENUNCIADOS

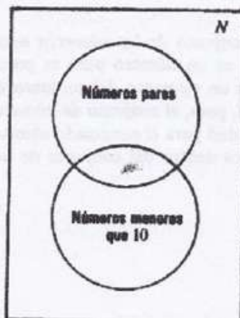
La conjunción de dos enunciados se forma uniéndolos mediante la conjunción gramatical «y».

La conjunción de dos enunciados específicos es verdadera solo si ambos enunciados originales son verdaderos. Si cualquiera de éstos o ambos son falsos, la conjunción es falsa.

Ejemplo (a) «Cuatro cuartos son un entero y dos monedas de 5 centavos valen lo que una de 10» es *verdadero*, porque los dos enunciados que la forman son verdaderos.
Ejemplo (b) «Cuatro cuartos son dos enteros y dos monedas de 5 centavos valen lo que una de 10» es *falso*, porque uno de los enunciados que la forman es falso.

La conjunción de dos proposiciones abiertas es verdadera para aquellos elementos de los conjuntos satisfactores que hacen que ambas proposiciones sean verdaderas, siendo falsa en cualquier otro caso.

Ejemplo (c) Sea $x \in N$ la proposición abierta «x es un número par y $x < 10$» es verdadera para cualquier número x, tal que x sea tanto número par como menor que 10. Podemos poner su conjunto verdad como $\{x \in N | x \text{ es par}\}$ y $\{x < 10\}$. Nótese que esto es la intersección de $\{x \in N | x \text{ es par}\}$ y $\{x \in N | x < 10\}$.



Es evidente que la conjunción de dos enunciados generales tiene como conjunto verdad a la intersección de los conjuntos verdad de los enunciados que la componen.

Representemos simbólicamente los dos enunciados por las letras griegas α (alfa) y β (beta) y sus conjuntos verdad por A y B, respectivamente. Entonces, el conjunto verdad del enunciado «α y β» es $A \cap B$.

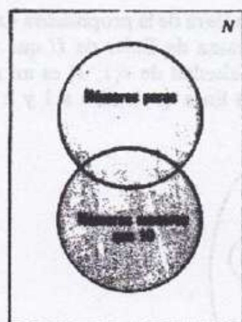
1-22 DISYUNCION DE DOS ENUNCIADOS

La disyunción de dos enunciados se forma uniéndolas con «o». La disyunción de dos enunciados específicos es verdadera si cualquiera de ellos (o ambos) son verdaderos. Si los dos enunciados originales son falsos, la disyunción es falsa.

Ejemplo (a) «$2 + 2 = 5$ o 7 es factor de 28» es verdadera puesto que al menos uno de los enunciados que la forman es verdadero.
Ejemplo (b) «Tres cuartos son un entero o cinco veinteavos son un décimo» es falsa porque también lo son los dos enunciados que la componen.

La disyunción de dos proposiciones es verdadera para aquellos elementos del conjunto satisfactor que hacen que al menos una de ellas sea verdadera, siendo falsa en cualquier otro caso.

Ejemplo (c) Si $x \in N$, la proposición abierta «x es un número par o $x < 10$» es verdadera para cualquier número x que sea par o que sea menor que 10. Podemos representar su conjunto verdadero como $\{x \in N | x$ es par o $x < 10\}$. Nótese que esto es la *unión* de $\{x \in N | x$ es par$\}$ con $\{x \in N | x < 10\}$.



Representemos los dos enunciados simbólicamente por α y β y sus conjuntos verdad por A y B, respectivamente. Por consiguiente, el conjunto verdad del enunciado «α o β» es $\{x | \alpha \text{ o } \beta\}$ y esto es $A \cup B$.

Así, pues, la disyunción de dos enunciados generales tiene como conjunto verdad, la *unión* de los conjuntos verdad de los enunciados que la componen.

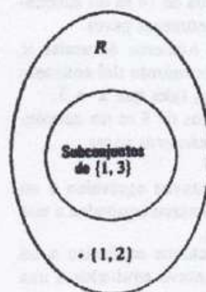
1-23 GRAFICA DE UN TIPO IMPORTANTE DE ENUNCIADOS ESPECIFICOS

El tipo de enunciados que dice que un conjunto es subconjunto de otro es particularmente importante en lógica, y discutiremos su gráfica en el ejemplo siguiente.

Sea $U = \{1, 2, 3\}$ un universo dado. Considérese la proposición abierta «x es un subconjunto de $\{1, 3\}$», donde el conjunto satisfactor de x es el conjunto de todos los subconjuntos de $U = \{1, 2, 3\}$, es decir:

$R = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, U\}$

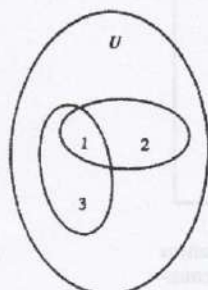
La gráfica de la proposición abierta debe mostrar el conjunto de todos los subconjuntos de $\{1, 3\}$ como conjunto verdad. Este conjunto verdad es $\{\varnothing, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$.



Nótese que cada punto de esta gráfica representa a un subconjunto de U

Supongamos ahora que escogemos para x el subconjunto particular $\{1, 2\}$, con lo cual obtenemos el enunciado específico «$\{1, 2\}$ es un subconjunto de $\{1, 3\}$» que tiene valor de verdad *falso*.

Una visión más clara de la proposición «x es un subconjunto de $\{1, 3\}$» se obtiene haciendo un diagrama de Euler de U que muestre al conjunto $\{1, 3\}$ dentro del círculo de U. La falsedad de «$\{1, 2\}$ es un subconjunto de $\{1, 3\}$» es evidente por el hecho de que la línea que rodea a 1 y 2 está fuera de la que circunda a 1 y 3.



Nótese que cada punto de esta gráfica representa a un elemento de U

El estudiante debe observar que un enunciado tal como «$\{1, 2\}$ es un subconjunto de $\{1, 3\}$», que dice que un subconjunto es subconjunto de otro, es un *enunciado específico* y, por tanto, verdadero o falso.

Ejemplo Hágase un diagrama de Euler que ilustre el enunciado específico «Todos los múltiplos de 6 son números pares.» Primero lo volveremos a enunciar así: «El conjunto de todos los múltiplos de 6 es un subconjunto del conjunto de los números pares» y supondremos que N es el universo. El conjunto de múltiplos de 6 es $\{6, 12, 18, 24, \ldots\}$ cuyos elementos son todos pares. Por tanto, el enunciado es verdadero, y mostramos al conjunto de múltiplos de 6 completamente dentro del conjunto de los números pares.



1-6 Ejercicios

En los Ejercicios del 1 al 20:

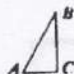
(a) Escribir «sí» o «no», según que la proposición dada sea un enunciado o no.
Si es un enunciado,
(b) clasificarlo como general o específico y
(c) hallar su conjunto verdad o su valor de verdad.

1. x es un número par; $x \in N$.
2. x es un número impar.
3. 3 es un número par.
4. $2 + 9 = 2x$; $x \in N$.
5. Oregón es uno de los estados de los Estados Unidos de Norteamérica.
6. 50% de \$60 es \$30.
7. $3x + 5 = 20$.
8. $x + 1 < 5$; $x \in N$.
9. Esta proposición no es verdadera.
10. $x + 5 = 1$; $x \in W$.
11. El color azul vale más que una sonrisa.
12. El conjunto de los múltiplos de 14 es un subconjunto del conjunto de los números pares.
13. El conjunto de todos los números naturales x, tales que $x < 5$, es un subconjunto del conjunto de los números naturales x, tales que $x < 3$.
14. El conjunto de los múltiplos de 8 es un subconjunto del conjunto de los números pares.
15. x es par o es impar; $x \in N$.
16. Diez monedas de diez centavos equivalen a un peso y tres monedas de a centavo equivalen a una moneda de cinco centavos.
17. Diez monedas de diez centavos equivalen a un peso o 3 monedas de a centavo equivalen a una moneda de cinco centavos.
18. $\dfrac{3x}{x-2} = 1$; $x \in N$, $x \neq 2$
19. $\dfrac{3x}{x} = 3$; $x \in W$

20. $\frac{3x}{x} = 3; x \in N$

En los Ejercicios del 21 al 25, volver a enunciar la proposición mediante el lenguaje de conjuntos.

21. 8 es un número par.
22. x es un número natural mayor que 10.
23. Este año es bisiesto.
24. El triángulo ABC es un triángulo rectángulo.



25. Todos los múltiplos de 6 son números pares.

En los Ejercicios 26 al 28, volver a enunciar la proposición evitando el uso del lenguaje de conjuntos.

26. x es un elemento del conjunto de los números impares.
27. El conjunto de todos los cuadrados es un subconjunto del de todos los paralelogramos.
28. El conjunto de los múltiplos de 7 no es un subconjunto del conjunto de los números impares.

Sea $R = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$ el conjunto satisfactor en los Ejercicios del 29 al 34. Sean α la proposición «x es un número impar», β la proposición «x es menor que 10» y γ la proposición «x es el cuadrado de un número natural». (*Nota*: α, β y γ son las tres primeras letras del alfabeto griego: alfa, beta y gamma.)

29. (a) Formar la disyunción de β y γ.
    (b) Escribir los elementos de su conjunto verdad.
30. (a) Formar la conjunción de β y γ.
    (b) Anotar los elementos de su conjunto verdad.
31. (a) Formar la conjunción de γ con la disyunción de α y β.
    (b) Escribir los elementos de su conjunto verdad.
32. Escribir un enunciado compuesto (usando alguna de las proposiciones α, β y γ) cuyo conjunto verdad sea $\{1, 9\}$.
33. Escribir un enunciado compuesto (usando alguna de las proposiciones α, β y γ) cuyo conjunto verdad sea $\{1, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 16\}$.
34. Nombrar un enunciado compuesto (usando alguna de las proposiciones α, β y γ) cuyo conjunto verdad sea $\{1, 3, 4, 5, 7, 9\}$.

Para los Ejercicios del 35 al 38, sean α, β y γ tres proposiciones abiertas (con algún conjunto satisfactor S) y sean A, B y C sus respectivos conjuntos verdad. Dibujar los diagramas de Euler que ilustran los conjuntos verdad de los enunciados siguientes.

35. α y β.
36. α o β.
37. α y (β o γ).
38. (α y β) o γ.
39. Comentar en qué forma cada uno de los dos diagramas al comienzo de la Sección 1-23 hace ver, de forma diferente, que $\{1, 2\}$ no es un subconjunto de $\{1, 3\}$.
40. Sea $U = \{1, 2, 3, 4\}$ el universo y sea R el conjunto de todos los subconjuntos de U.
    (a) Escribir los elementos del conjunto verdad de la proposición abierta «x es un subconjunto de $\{1, 3, 4\}$», en donde R es el conjunto satisfactor.
    (b) Hacer una gráfica de esta proposición que muestre al conjunto verdad como un subconjunto de R. Indicar la posición de $\{3, 4\}$ en la figura.
    (c) Hacer otra gráfica que muestre a U con $\{1, 3, 4\}$ como uno de sus subconjuntos. Mostrar $\{3, 4\}$ en la figura.
    (d) Comentar en qué forma cada uno de los diagramas de las partes (b) y (c) de este ejercicio muestran, en forma diferente, que $\{3, 4\}$ es un subconjunto de $\{1, 3, 4\}$.

Dibujar diagramas de Euler que ilustren los enunciados específicos dados en los Ejercicios del 41 al 48, en los que N es el universo.

41. El conjunto de todos los números que terminan en 5, como subconjunto de los múltiplos de 10.
42. El conjunto de todos los números primos mayores que 2 es un subconjunto del de los números impares.
43. Todos los múltiplos de 4 son números pares.
44. Los cuadrados de todos los números primos son números compuestos.
45. El conjunto de los múltiplos de 3 no es un subconjunto del de los múltiplos de 5.
46. El conjunto de los números primos es ajeno del de los múltiplos de 4.
47. Ningún número primo es múltiplo de 3.
48. Algunos números impares son múltiplos de 7.

1-24 NEGACION DE UN ENUNCIADO

La negación de un enunciado dado es otro enunciado que dice que el enunciado dado es falso.

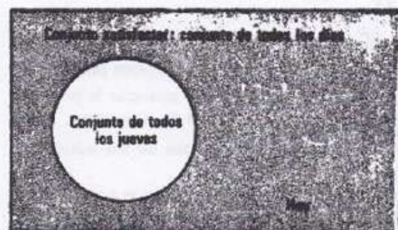
Ejemplo (a) Escríbase la negación de «x es par», en donde $x \in N$.

Escribamos «Es falso que x sea par» o en forma más natural, «x *no* es par». Obsérvese que el conjunto verdad de la negación es el conjunto de todos los números que no son pares, es decir, el complemento del conjunto verdad del enunciado original.



Ejemplo (b) Hállese la negación de «Hoy es jueves», si el conjunto satisfactor es el conjunto de todos los días.

La negación es «Hoy *no* es jueves.»

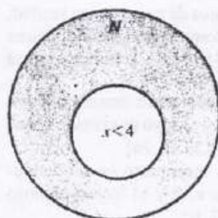


Un error común es suponer que un enunciado como «Hoy es miércoles», es la negación de «Hoy es jueves». Que esto es incorrecto se puede aclarar, en parte, mediante el lenguaje de conjuntos. «Hoy es jueves» se convierte en «Hoy es un elemento del conjunto de todos los jueves». Es claro que su negación es «Hoy *no* es un elemento del conjunto de todos los jueves». Otra forma de poner esto sería: «Hoy es un elemento del *complemento* del conjunto de los jueves.» Esto incluye claramente a los lunes, martes, miércoles y todos los otros días de la semana que no sean jueves.

Similarmente, observamos que dada cualquier proposición abierta cuyo conjunto verdad sea S, la negación de esa proposición abierta tiene como conjunto verdad a S', el complemento de S.

Ejemplo (c) Mediante la notación por construcción para conjuntos, dése el conjunto verdad de la negación de «$x < 4$», en donde $x \in N$ y sombréese en un diagrama de Euler. ¿Cómo se relaciona este conjunto con $\{x \in N \mid x < 4\}$?

La negación es «$x \nless 4$», que también se puede poner «$x \geq 4$». (¿Por qué no simplemente «$x > 4$»?) Así, pues, el conjunto verdad de la negación es $\{x \in N \mid x > 4\}$, cuyos elementos son 4, 5, 6, 7, . . . O sea, es el complemento de $\{x \in N \mid x < 4\} = \{1, 2, 3\}$, que es el conjunto verdad del enunciado original.

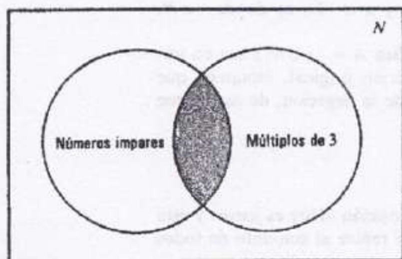


Por supuesto, que la negación de la negación de un enunciado es el enunciado mismo.

1-25 NEGACION DE UN ENUNCIADO COMPUESTO

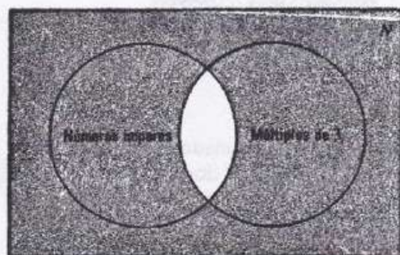
Consideremos el enunciado «x es impar y x es un múltiplo de 3», en donde $x \in N$. Su conjunto verdad aparece en el primer diagrama. La negación de esto podría

escribirse: «Es falso que x sea par y sea múltiplo de 3.» O bien, usando el lenguaje de conjuntos, «x no es un elemento del conjunto de números naturales que son tanto pares como múltiplos de 3».

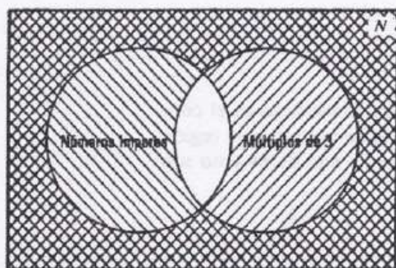


Vemos que x no está en la intersección del conjunto de los números impares y el de los múltiplos de 3. Refiriéndonos al segundo diagrama, puede ser cualquier punto de la sección sombreada.

Otra forma de decir lo mismo sería: «x no es elemento del conjunto de números impares *o* no es elemento del conjunto de múltiplos de 3». Esta proposición equivale a decir «x está en la unión del conjunto de números naturales no impares *y* el de números naturales no múltiplos de 3».



En el tercer diagrama hemos sombreado el conjunto de números no impares con /////, y el de números no múltiplos de 3 con \\\\\. La parte que está sombreada de una u otra forma es la unión de ambos conjuntos: el de los números no impares con el de los no múltiplos de 3. Nótese que la parte que permanece sin sombrear es precisamente el conjunto de números que son impares y múltiplos de 3.



Esto ilustra el hecho de que la *negación de la conjunción* de dos enunciados es la disyunción de sus negaciones. Es decir, que para formar la negación de la conjunción de dos enunciados, sustitúyase *y* por *o*, y los enunciados por sus negaciones.

Ejemplo (a) Dese la negación de «x es un número compuesto y $x < 10$», en donde $x \in N$, y hállese su conjunto de verdad.

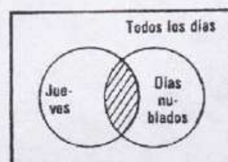
Su negación es: «x no es un número compuesto *o* $x \not< 10$». Sea $A = \{x \in N | x$ sea un número compuesto y $x < 10\}$ el conjunto verdad de la proposición original. Notamos que $A = \{4, 6, 8, 9\}$. El complemento de A es el conjunto verdad de la negación, de modo que

$A' = \{x \in N | x$ no es compuesto o $x \geq 10\}$

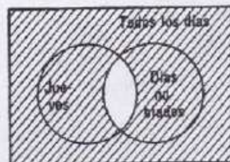
Luego, $A' = \{1, 2, 3, 5, 7, 10, 11, 12, 13, \ldots\}$.

Ejemplo (b) Dibújense diagramas de Euler que ilustren la proposición «Hoy es jueves y está nublado» y su negación, en donde «hoy» es una variable que se refiere al conjunto de todos los días.

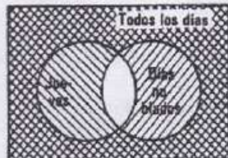
Solución:



«Hoy es jueves y está nublado»

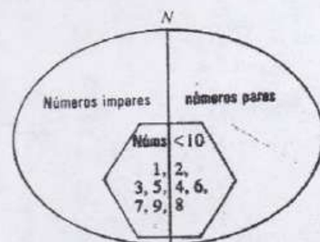


«Es falso que hoy sea jueves y que esté nublado»



«Hoy no es jueves u hoy no está nublado»

¿Qué podemos decir acerca de la *negación* de la *disyunción* de dos enunciados? Por ejemplo, consideremos la proposición abierta «x es par o $x < 10$», en donde N es el conjunto satisfactor. La negación de esta proposición abierta sería «x no es par y $x \not< 10$».



Refiriéndonos a este diagrama, notamos que la porción sombreada es el conjunto de números naturales que son pares o menores que 10, en tanto que la región no sombreada es precisamente el conjunto de números que no son pares y no son menores que 10.

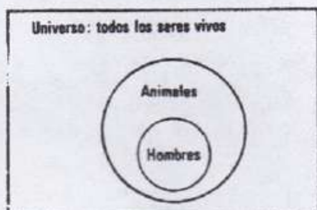
Ejemplo (c) Encontrar la negación de «$ab \neq ac$ *o* $a = 0$».

La negación es «$ab = ac$ *y* $a \neq 0$».

1-26 NEGACION DE «ES UN SUBCONJUNTO DE»

Se mostró en la Sección 1-5 que decir que S no es un subconjunto de T significa que algún elemento de S no lo es de T. Podemos interpretar «algún» con el sentido de «por lo menos uno». Así, la negación de «S es un subconjunto de T» se puede expresar como «Al menos un elemento de S no lo es de T».

Ejemplo (a) Expresar la negación de «Todos los hombres son animales».
La negación es «Al menos un hombre no es animal».



«Todos los hombres son animales»

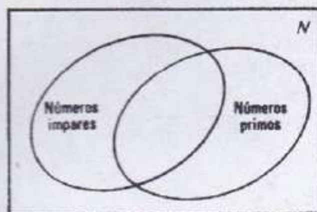


«Al menos un hombre no es animal»

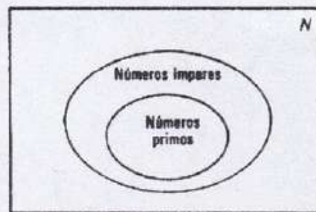
Ejemplo (b) Dese la negación de «Algunos números primos no son impares».

Primero interpretemos «algunos» como «al menos uno», con lo cual el enunciado queda: «Al menos un número primo no es impar», que significa que «El conjunto de los números primos no es un subconjunto de los impares». Luego, la negación es «El conjunto de los números primos *es* un subconjunto del conjunto de los impares». Esto también puede expresarse como «Todos los números primos son impares».

Observemos que no es suficiente suponer que la negación es «Algunos números primos *son* impares». Esto es como decir que «Hoy es miércoles» es la negación de «Hoy es jueves» que no es decir bastante.



«Por lo menos número primo **no es** impar»



«Todos los números primos son impares»

1-7 Ejercicios

En los Ejercicios del 1 al 7, dar la negación de cada enunciado. Si un enunciado dado es un enunciado general, dibujar un diagrama de Euler que le ilustre y sombrear la parte que representa al conjunto verdad de la negación.

1. x es un múltiplo de 4; $x \in N$.
2. $3 \cdot 6 = 18$.
3. No es cierto que $3 < 5$.
4. $x > 5$ o x es par: $x \in N$.
5. x no es un múltiplo de 3 o $x \leq 5$: $x \in N$.
6. La casa era amarilla o verde («casa» es una variable que se refiere al conjunto de todas las casas).
7. x es un número negativo o es un número positivo o es cero: x es un entero.

En los Ejercicios del 8 al 16, dibujar un diagrama de Euler que ilustre el enunciado para el universo dado.

Luego dar la negación y hacer otro diagrama para ilustrarle.

8. Todos los números naturales son enteros. U = conjunto de números racionales.
9. Algunos enteros son enteros positivos. U = conjunto de números racionales.
10. Algunos triángulos no son equiláteros. U = conjunto de todas las figuras geométricas.
11. Las líneas paralelas no se intersectan. U = conjunto de todas las líneas.
12. Por lo menos una mujer es generosa. U = conjunto de todas las personas.
13. El conjunto de los múltiplos de 6 es un subconjunto del de los números impares. $U = N$.
14. El conjunto de los números primos no es un subconjunto del de los números impares. $U = N$.
15. El conjunto de los números naturales x tales que $x < 6$, es un subconjunto del de los naturales x tales que $x \leq 8$. $U = N$.
16. El conjunto de los números pares es ajeno al conjunto de los impares. $U = N$.

Sea $R = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$ el conjunto satisfactor en los Ejercicios del 17 al 22. Sea α la proposición «x es un número impar», sea β la proposición «x es menor que 10» y sea γ la proposición «x no es el cuadrado de un número natural».

17. (a) Formar la negación de γ.
    (b) Hallar su conjunto verdad.
18. (a) Formar la negación de β.
    (b) Hallar su conjunto verdad.
19. (a) Formar la negación de «α y β».
    (b) Hallar su conjunto verdad.
20. (a) Formar la negación de «α o β».
    (b) Hallar su conjunto verdad.
21. (a) Formar la negación de «α o β o γ».
    (b) Hallar su conjunto verdad.
22. (a) Formar la negación de «α y β y γ».
    (b) Hallar su conjunto verdad.

En los Ejercicios del 23 al 28, usar el símbolo $\sim\alpha$ para representar la negación de α, $\sim(\beta$ y $\alpha)$ para la negación de la conjunción de β y α, etc. Luego, en referencia a α, β y γ, dadas en las instrucciones que anteceden al Ejercicio 17, dar las proposiciones simbolizadas por lo siguiente:

23. $\sim\alpha$
24. $\sim(\alpha$ o $\beta)$
25. $\sim(\alpha$ y $\gamma)$
26. $(\sim\alpha)$ y γ
27. α y $(\sim\gamma)$
28. $\sim(\sim\alpha$ o $\gamma)$

29. Sea $R = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$ el conjunto satisfactor. Sea $S = \{x \mid 3 < x$ y $x < 13\}$. Sea $T = \{x \mid x$ es un múltiplo de $3\}$.
    (a) Hallar S'.
    (b) Dar la negación de «$3 < x$ y $x < 13$». Hallar su conjunto verdad.
    (c) Hallar $S' \cup T'$.
    (d) Hallar $S' \cap T'$.
    (e) Hallar $(S \cup T)'$.
    (f) Hallar la negación de «$3 < x$ y $x < 13$ y x es un múltiplo de 3». Encontrar su conjunto verdad. Comparar el resultado con los conjuntos de las partes (c), (d) y (e). ¿A cuál corresponde?

En los Ejercicios 30 y 31, sea A el conjunto verdad de la proposición «Hoy es jueves», sea B el conjunto verdad de la proposición «Hoy es un día nublado» y sea C el conjunto verdad de la proposición «Hoy es un día lluvioso».

30. Dibujar un diagrama similar a la Figura 1-4 que muestre los conjuntos A, B y C. Cada uno de los enunciados dados a continuación aparece numerado. Suponiendo que el enunciado sea verdadero, poner su número en el lugar apropiado del diagrama para mostrar la posición de «Hoy». Ejemplo:
    (1) Hoy es miércoles y es un día soleado. Colocamos (1) como se muestra en el diagrama.
    (2) Hoy es jueves y no está nublado.
    (3) Hoy está lluvioso y no es jueves.
    (4) Hoy es un domingo nublado, pero no ha llovido.
    (5) Es falso que: Hoy no es jueves o no está lluvioso.
    (6) Es falso que: Hoy está lluvioso o no está nublado o no es jueves.



Figura 1-4

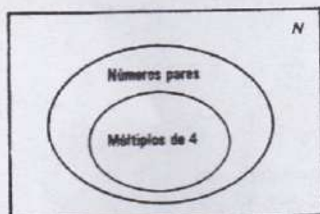
31. Dar un enunciado que caracterice los elementos de cada uno de los conjuntos siguientes. (Véase el Ejercicio 30.)
    (a) $A \cap B'$
    (b) $(A \cap B)'$
    (c) $C' \cup B$
    (d) $C \cap B'$
    (e) $C \cap A'$

1-27 IMPLICACIONES

La proposición «Si $x \in N$ es un múltiplo de 4, entonces x es par» es un ejemplo de una *implicación*, el tipo más importante de enunciados lógicos.

Una implicación se puede formar de dos enunciados generales en un orden particular, uniéndolos mediante las conjunciones «si» y «entonces», con el «si» antes de uno de los enunciados y el «entonces» antes del otro. El enunciado antecedido del «si» se llama *hipótesis*, *antecedente* o *parte dada* y el enunciado antecedido del «entonces» se llama *conclusión*, *consecuente* o *parte por demostrar de la implicación*.

Consideremos la implicación «Si x es un múltiplo de 4, entonces x es un número par», en donde $x \in N$. Podemos redactarla de otro modo, quedando «Si x es un elemento del conjunto de los múltiplos de 4, entonces x es un elemento del conjunto de los números pares». Con esto lo que hemos dicho es que el primer conjunto es un subconjunto del segundo.

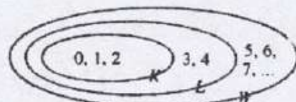


Una implicación, por tanto, es simplemente una forma especial de decir que un conjunto es subconjunto de otro. Es, pues, un *enunciado específico*, con valor de verdad: verdadero o falso (nótese, sin embargo, que tanto la hipótesis como la conclusión son *enunciados generales*, con conjuntos verdad).

Definición Una implicación es verdadera si el conjunto de verdad de la hipótesis es un subconjunto del conjunto verdad de la conclusión y es falsa en cualquier otro caso.

Ejemplo (a) Demuéstrese que la implicación «Si $x \in N$ es un múltiplo de 4 menor que 16, entonces x es un número par» es cierta.

El conjunto verdad de la hipótesis es $\{4, 8, 12\}$. El de la conclusión es $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, \ldots\}$. Puesto que el conjunto de la hipótesis es un subconjunto del de la conclusión, la implicación es verdadera.

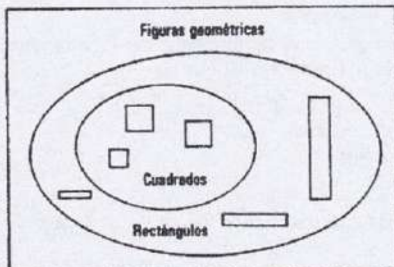


Ejemplo (b) ¿Es cierta la implicación: «Si x es un entero no negativo tal que $x < 3$, entonces $x < 5$»?

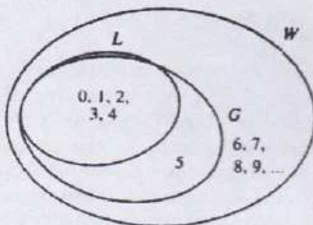
Sea $K = \{x \in W | x < 3\}$ y $L = \{x \in W | x < 5\}$. Veamos que $K \subseteq L$, por lo que la implicación es cierta.

Ejemplo (c) Dése una implicación que sea verdadera, según el diagrama dado.

Vemos que el conjunto de todos los cuadrados es subconjunto del de todos los rectángulos. Luego la implicación es: «Si la figura es un cuadrado, entonces es un rectángulo.»



Ejemplo (d) Si x es un entero no negativo tal que $x + 4 < 10$, entonces $x < 5$. Sea $G = \{x \in W | x + 4 < 10\}$ y $L = \{x \in W | x < 5\}$. Vemos que G no es un subconjunto de L. (Por ejemplo, $5 \in G$, pero $5 \notin L$.) Luego, la implicación no es un enunciado verdadero.



Nota: Para hacer ver que la implicación no es verdadera hemos aprovechado el ejemplo de $x = 5$. Esto se llama un *contraejemplo*.

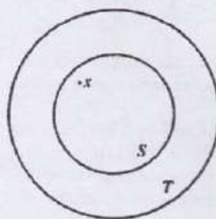
Ejemplo (e) Si x es un múltiplo de 6, entonces es un múltiplo de 4. Esto no es cierto puesto que el conjunto de múltiplos del 6 no es un subconjunto de múltiplos del 4: un contraejemplo es el 6 mismo; otro podria ser el 18.

1·28 OTRAS FORMAS DE UNA IMPLICACION

Considérese la implicación «Si x es elemento de S, entonces x es elemento de T». Esta implicación establece que S es un subconjunto de T. Por tanto, la oración «x es un elemento de S solo si x es un elemento de T» dice lo mismo.

Ejemplo (a) x es un múltiplo de 4 solo si x es un número par.
Ejemplo (b) $x < 3$ solo si $x < 5$.

Otra expresión usada comúnmente es «x es elemento S implica que x es elemento de T». La notación común para la palabra «implica» es «$\rightarrow$». Así, podemos poner «x es elemento de $S \rightarrow x$ es elemento de T».



Representemos la hipótesis de una implicación mediante α y la conclusión mediante β. Entonces, los que siguen son diferentes modos de representar lo mismo.

Si α, entonces β
α solo si β
α implica β
$\alpha \rightarrow \beta$

Una variación más en la forma de expresar «Si α, entonces β» es:

β si α

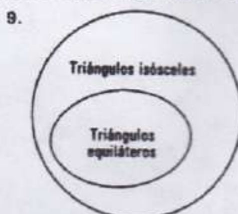
1-8 Ejercicios

En cada uno de los Ejercicios del 1 al 8, volver a enunciar la implicación usando el lenguaje de conjuntos y dibujar una figura que muestre a un conjunto como subconjunto de otro, de modo que hagan verdadera la implicación dada.

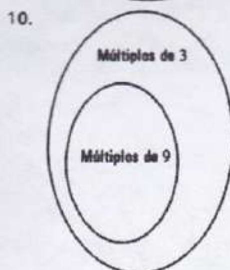
1. Si una figura es un cuadrado, entonces es un paralelogramo.
2. Si un número se puede dividir entre 6, entonces es un número par.
3. Si llueve, entonces el cielo está nublado.
4. Si un carro es un Bel-Auto-Super, entonces su turboencendedor habrá de estallar.
5. Si x es cualquier elemento de $S \cap T$, entonces x es un elemento de S.
6. Si x no es un elemento de S, entonces no es un elemento de R.
7. Si x es un entero no negativo, tal que $x < 10$, entonces $x < 15$. (Esto es lo mismo que decir que si $x < 10$, entonces $x < 15$; $x \in W$.)
8. Si x es un entero no negativo tal que $x \nless 15$, entonces $x \nless 10$.

En los Ejercicios del 9 al 11, enunciar una implicación acorde con el diagrama de Euler dado.

9.



10.



11.



Volver a enunciar cada proposición dada en los Ejercicios del 12 al 19, en la forma «si . . . , entonces . . .». Dibujar un diagrama de Euler que muestre a un conjunto como subconjunto de otro, suponiendo que el enunciado sea verdadero.

12. Una figura es una elipse si es un círculo.
13. Un entero no negativo es múltiplo de 8 solo si es un número par. (Nótese que las palabras «un entero no negativo» nos dicen que el conjunto satisfactor es W.)
14. Un entero no negativo es múltiplo de 3 si la suma de sus dígitos es, a su vez, múltiplo de 3.
15. Un entero no negativo es múltiplo de 3 solo si la suma de sus dígitos es, a su vez, múltiplo de 3.
16. Un hombre puede ser presidente de la República solo si tiene al menos 35 años de edad.
17. x es un múltiplo de 14, implica que x es un múltiplo de 7; $x \in N$.
18. n es un cuadrado perfecto, implica que por lo menos tiene dos factores primos que son iguales; $n \in N$.
19. $x^2 = 25$ si x es 5; $x \in I$.

Dar una implicación en la forma «solo si» que resulte verdadera de acuerdo con los diagramas dados en los Ejercicios del 20 al 22.

20.



21.



22.



En los Ejercicios del 23 al 27, dar un contraejemplo que muestre que la implicación es falsa.

23. Si un número es par, entonces es múltiplo de 4. N es el conjunto satisfactor.
24. Si un número es par, entonces no es múltiplo de 3. N es el conjunto satisfactor.
25. Si a, b y x son enteros no negativos y si $x^2 = a^2 + b^2$, entonces $x = a + b$.
26. Si a, b y x son enteros no negativos y si $xa = xb$, entonces $a = b$.
27. Si la suma de los dígitos de un entero no negativo es múltiplo de 7, entonces el número es múltiplo de 7 a su vez.

En los Ejercicios del 28 al 30, demostrar que la implicación es verdadera comprobándola para cada elemento del conjunto verdad de la hipótesis.

28. Si n es un número natural menor que 5, entonces $n^2 < 25$.
29. Si n es un número natural entre 4 y 8, entonces
$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$
30. Si n es un entero no negativo menor que 7, entonces $n^2 + n + 41$ es un número primo.

Demostrar o refutar cada una de las implicaciones de los Ejercicios del 31 al 34. Para refutar una implicación, basta con dar un contraejemplo. Para demostrarla, hay que comprobarla para cada elemento del conjunto verdad de la hipótesis.

31. Si n es un entero no negativo menor que 6, entonces $n^2 - n \neq 0$.
32. $n \in N$ y $n < 6 \rightarrow 6n - n^2 > 4$.
33. $n \in W \rightarrow n^2 - n + 11$ es un número primo.
34. Si n es un número natural menor que 10, entonces la suma de n impares consecutivos, a partir de 1, es n^2.

1-29 RECIPROCA O INVERSA DE UNA IMPLICACION

La inversa de una implicación es el enunciado que se obtiene al cambiar el orden de los enunciados de la implicación. Pero manteniendo «si» y «entonces» en los mismos lugares de la proposición. Es decir, la hipótesis y la conclusión se intercambian para formar la inversa.

Implicación: $\alpha \rightarrow \beta$

Inversa de la implicación: $\beta \rightarrow \alpha$

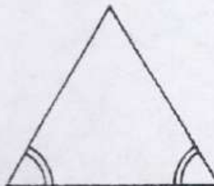
Ejemplo Dese la inversa de la proposición verdadera: «Si una figura es un cuadrado, entonces es un rectángulo». La inversa es: «Si una figura es un rectángulo, entonces es un cuadrado». Nótese que esto no siempre es cierto. El conjunto de todos los rectángulos no es un subconjunto del de todos los cuadrados. Así, la figura ▭ pertenece al conjunto de los rectángulos, pero no al de los cuadrados.

Este es el hecho importante acerca de la inversa de una implicación: *Aun cuando la implicación misma sea verdadera, su inversa puede no serlo.*

1-30 ENUNCIADOS EQUIVALENTES

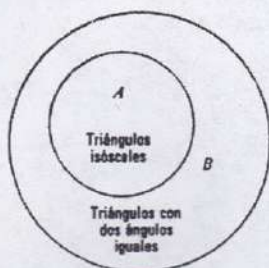
En geometría hay un enunciado verdadero que dice:

(1) «Si un triángulo es isósceles, entonces tiene dos ángulos iguales.»



Esto se puede replantear así: «Si un triángulo es elemento del conjunto de los triángulos isósceles, entonces es elemento del conjunto de todos los triángulos que tienen dos ángulos iguales.»

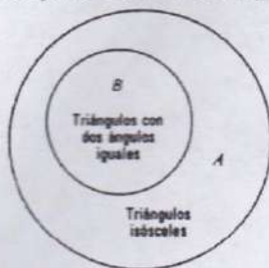
Por tanto, el conjunto de los triángulos isósceles es subconjunto del de los triángulos con dos ángulos iguales.



También se demuestra en geometría que la inversa de la implicación anterior es verdadera.

(2) «Si un triángulo tiene dos ángulos iguales, entonces es isósceles.» Esto se puede replantear así: «Si un triángulo es elemento del conjunto de todos los triángulos con dos ángulos iguales, entonces es elemento del conjunto de los triángulos isósceles.»

Por tanto, el conjunto de los triángulos con dos ángulos iguales es un subconjunto del de los triángulos isósceles.



¿Cómo puede un conjunto A ser subconjunto del conjunto B y también B subconjunto de A? Esto equivale a decir que cada elemento de A lo es de B y cada elemento de B lo es de A. Esto solo puede ser cierto si el conjunto A es el mismo que B. Por tanto, el conjunto de los triángulos isósceles es *exactamente el mismo* que el de los triángulos con dos ángulos iguales.

Decimos entonces que los enunciados α y β son *enunciados equivalentes*.

α: un triángulo es isósceles

β: un triángulo tiene dos ángulos iguales

Nótese que $\alpha \rightarrow \beta$ y $\beta \rightarrow \alpha$. Ponemos $\alpha \leftrightarrow \beta$ y lo leemos «α es equivalente a β».

Definición Dos enunciados generales que tienen igual conjunto verdad, se dice que son *enunciados equivalentes*.

También podemos decir «α si β» para $\beta \rightarrow \alpha$ y «α solo si β» para $\alpha \rightarrow \beta$. (Véase la Sección 1-28.) Ambos enunciados se pueden combinar en uno solo:

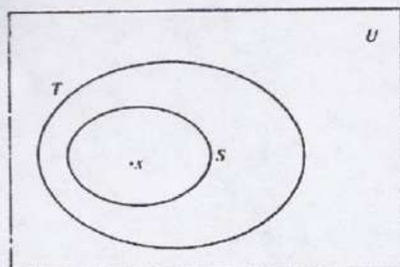
«α *si, y solo si,* β»

Luego, en lugar de (1) y (2) podemos escribir:

«Un triángulo es isósceles *si, y solo si,* tiene dos ángulos iguales.»

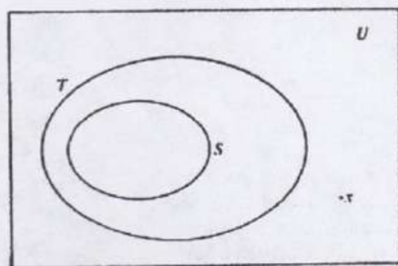
1-31 LA CONTRAPOSITIVA DE UNA IMPLICACION

Consideremos la implicación: «Si x es elemento de S, entonces x es elemento de T.» Ya hemos visto que si esta implicación es cierta, es un modo de decir que S es un subconjunto de T.



¿Qué sucede si S es un subconjunto de T y sabemos de un elemento de U que no lo es de T? Podemos afirmar con certeza que tampoco es elemento de S. (¿Por qué?)

Así, pues, tenemos esta otra forma de decir que S es subconjunto de T: «Si x no es elemento de T, entonces no es elemento de S.» Esta se llama contrapositiva de la implicación: «Si x es elemento de S, entonces x es elemento de T.»



Definición La *contrapositiva* de la implicación $\alpha \rightarrow \beta$ es el enunciado: «No $\beta \rightarrow$ no α.»

Implicación: $\alpha \rightarrow \beta$

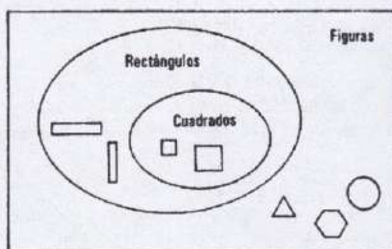
Contrapositiva de la implicación: no $\beta \rightarrow$ no α

Nótese que para obtener la contrapositiva de una implicación se escribe primero la inversa y después se sustituyen hipótesis y conclusión por sus negaciones.

La contrapositiva dice lo mismo que la implicación original: que S es subconjunto de T. Es, pues, otra forma de enunciar la implicación original.

Este es el hecho importante acerca de la contrapositiva de una implicación: *Si la implicación misma es verdadera, también lo será la contrapositiva, y viceversa.*

Ejemplo (a) «Si una figura es un cuadrado, entonces es un rectángulo» es una implicación que sabemos que es cierta. Su contrapositiva es: «Si una figura no es un rectángulo, entonces no es un cuadrado», que también es cierta. Cada una de dichas proposiciones dice esencialmente lo mismo, o sea que el conjunto de los cuadrados es un subconjunto del de los rectángulos.



Ejemplo (b) «Si x es un múltiplo de 4, entonces es múltiplo de 2», es una implicación verdadera. Su contrapositiva es: «Si x no es múltiplo de 2, entonces no es múltiplo de 4», que también es cierta.

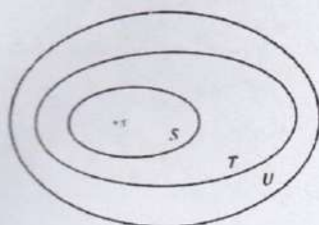
Ejemplo (c) «Si $x < 5$, entonces $x < 3$» es una implicación falsa. Su contrapositiva es: «Si $x \nless 3$, entonces $x \nless 5$», que también es falsa.

1-32 CADENA DE IMPLICACIONES

Consideremos las dos implicaciones

Si x es elemento de S, entonces x es elemento de T.
Si x es elemento de T, entonces x es elemento de U.

Esto significa que S es subconjunto de T y T a su vez es subconjunto de U. Luego S debe ser subconjunto de U, puesto que cada elemento de S es automáticamente elemento de U.



En resumen: Si $\alpha \rightarrow \beta$ y $\beta \rightarrow \gamma$, entonces $\alpha \rightarrow \gamma$.
Más simbólicamente: $(\alpha \rightarrow \beta$ y $\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$.

Ejemplo Si $x < 9$, entonces $x < 12$ $(\alpha \rightarrow \beta)$.
Si $x < 12$, entonces $x < 15$ $(\beta \rightarrow \gamma)$.
Podemos concluir que lo que sigue es cierto: Si $x < 9$, entonces $x < 15$ $(\alpha \rightarrow \gamma)$.

1-9 Ejercicios

Escribir la inversa de cada proposición dada en los Ejercicios del 1 al 5. Establecer si la inversa es verdadera o falsa.

1. Si una figura es un rectángulo, entonces es un paralelogramo.
2. Si una figura es un pentágono, entonces no es un cuadrilátero.
3. Si x es impar, entonces x no es múltiplo de 2: $x \in N$.
4. Si $x \in N$ y si $x < 5$, entonces $x + 3 < 7$. (*Sugerencia*: «Si $x \in N$ y $x + 3 < 7$, entonces. . .» La

afirmación $x \in N$ en este caso simplemente indica cuál es el conjunto satisfactor.)

5. Si $m \in W$ y si $n \in W$, entonces $m + n \in W$.

Para los enunciados dados en la forma «si, y solo si» de los Ejercicios del 6 al 9, escribir las dos implicaciones (en la forma «si . . . , entonces . . .») que representan.

6. Un entero no negativo es múltiplo de 9 si, y solo si, la suma de sus dígitos es múltiplo de 9.
7. Un triángulo es triángulo rectángulo si, y solo si, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados.
8. Un dispositivo es un objeto si, y solo si, es un artefacto.
9. Dos conjuntos son ajenos si, y solo si, su intersección es el conjunto vacío.

En los Ejercicios del 10 al 13, dibujar un diagrama de Euler que ilustre la implicación, la cual, por otra parte, es verdadera. Escribir después la inversa de la implicación en la forma «si, entonces» y, con referencia al diagrama, dar un contraejemplo para hacer ver que la inversa no es cierta.

10. Si un triángulo es equilátero, entonces es isósceles.
11. Un entero no negativo es el cuadrado de un entero no negativo solo si su última cifra es 0, 1, 4, 5, 6 o 9.
12. $x + y$ es un número par si x y y son impares.
13. m es un número primo mayor que $3 \rightarrow 6$ divide a $m - 1$ o a $m + 1$; $m \in N$, $m > 1$.

Demostrar o refutar los enunciados dados en los Ejercicios del 14 al 16. Para las proposiciones del tipo «si, y solo si», hay que demostrar dos implicaciones o rechazar una. Recuérdese que para rechazar una proposición basta con dar un contraejemplo; para demostrarla, en cambio, se debe comprobar para cada elemento del conjunto verdad de su hipótesis.

14. n es múltiplo de 6 si, y solo si, es par.
15. Un número natural menor que 50 es múltiplo de 9 si, y solo si, la suma de sus dígitos también es múltiplo de 9.
16. Al arrojar dos dados, un 11 puede caer si, y solo si, un dado cae en 5 y el otro en 6. El conjunto satisfactor es el de todos los posibles resultados al arrojar dos dados, indicado por los pares de números: $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \ldots, (6, 5), (6, 6)\}$.

Dar, en la forma «si, entonces», la contrapositiva de las implicaciones dadas en los Ejercicios del 17 al 25, y verificar si son falsas o verdaderas. Las que sean falsas, hacer ver que lo son dando un contraejemplo.

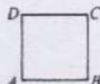
17. Si una figura es un rectángulo, entonces es un paralelogramo.
18. Si x es múltiplo de 6, entonces x es par.
19. $x < 7 \rightarrow x < 10$; $x \in N$.
20. Si uno de los dados muestra un 3 y el otro dado muestra un 4, entonces se ha lanzado un 7.
21. Si la suma de los dígitos de un número es múltiplo de 7, entonces el número es múltiplo de 7.
22. Si $xy = 0$, entonces $x = 0$ o $y = 0$.
23. Si $4x = ax$ y $x \neq 0$, entonces $a = 4$.
24. Un entero no negativo es múltiplo de 6 solo si es par y múltiplo de 3.
25. Un cuadrilátero es un cuadrado si todos sus lados son iguales.

I-33 SILOGISMO

Los tres enunciados siguientes, en conjunto, dan un ejemplo de lo que se conoce como *silogismo*.

(1) Si una figura es elemento del conjunto de todos los cuadrados, entonces lo es de todos los rectángulos.

(2) La figura $ABCD$ es elemento del conjunto de todos los cuadrados.



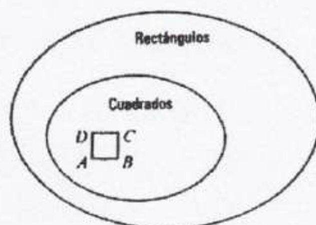
(3) Por tanto, la figura $ABCD$ es elemento del conjunto de todos los rectángulos.

El silogismo es una unidad básica de razonamiento deductivo que consiste en:

(1) una implicación que se acepta como cierta, quizá usando el lenguaje de conjuntos;

(2) un enunciado que se acepta como verdadero, acerca de que algo es elemento del conjunto determinado por la parte «*si*» de la implicación (la hipótesis);

(3) y otro enunciado de que, por tanto es elemento del conjunto determinado por la parte «*entonces*» de la implicación (la conclusión).



El diagrama de un silogismo correcto siempre comprende la gráfica de dos conjuntos, uno de los cuales es subconjunto del otro, y un elemento de este subconjunto dentro del círculo interior.

1-34 RAZONAMIENTO DEDUCTIVO

El razonamiento deductivo es el proceso de usar uno o más silogismos, partiendo de hechos conocidos o supuestos, para llegar a nuevos hechos.

Consideremos un ejemplo: Usemos el razonamiento deductivo para demostrar que 45 divide a 10 215.

Primero debemos aclarar qué admitimos como hechos conocidos o supuestos, es decir, de qué vamos a partir. Supondremos que los *hechos de la suma* y *los de la multiplicación* aritméticas de enteros no negativos menores que 10 son cosa conocida. Supondremos también la definición de *divide a*: Si a y b son enteros no negativos, decimos que a divide a b si existe un número no negativo c, tal que $a \cdot c = b$. Supondremos, finalmente, que las implicaciones siguientes son verdaderas:

(1) Si un número termina en 0 o en 5, entonces el 5 lo divide.
(2) Si 9 divide a la suma de los dígitos de un número, entonces divide al número mismo.
(3) Si 9 y 5 dividen a un número, entonces 45 lo divide también.

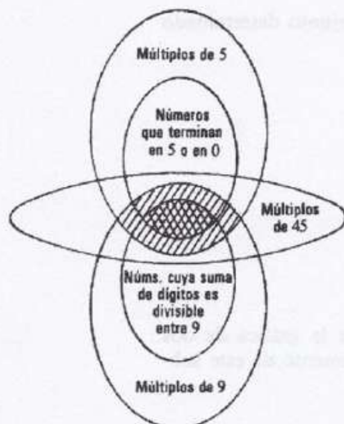
Usaremos tres silogismos:

A. (1) Si un número termina en 0 o en 5, entonces 5 lo divide.
   (2) 10 215 termina en 5.
   (3) Por tanto, 5 divide a 10 215.

B. (1) Si 9 divide a la suma de los dígitos de un número, entonces divide al número mismo.
   (2) 9 divide a la suma de los dígitos de 10 215. $(1 + 0 + 2 + 1 + 5 = 9$, y 9 divide a 9).
   (3) Por tanto, 9 divide a 10 215.

C. (1) Si 9 y 5 dividen a un número, entonces 45 también lo divide.
   (2) 9 y 5 dividen a 10 215.
   (3) Por tanto, 45 divide a 10 215.

Trate el estudiante de seguir los pasos anteriores al aislar el número 10 215 en el diagrama que lo acompaña. Si puede hacerlo no necesita leer la explicación detallada que se da.



Analicemos nuestro uso del silogismo con relación al diagrama en el primer silogismo, A,

(1) La implicación establece el hecho de que el conjunto de números que terminan en 5 o en 0 es un subconjunto del de los números divisibles entre 5 (llamados «múltiplos de 5»).

(2) Luego señalamos que 10 215 es elemento de este conjunto.

(3) Esto significa que 10 215 es elemento del conjunto de múltiplos de 5.

En el segundo silogismo, B,

(1) La implicación establece el hecho de que el conjunto de números cuya suma de dígitos es divisible entre 9 es un subconjunto de los números divisibles entre 9 (llamados «múltiplos de 9»).

(2) Luego señalamos el hecho de que 10 215 es elemento de este subconjunto. (Al llegar a este punto hemos localizado al número 10 215 en la intersección de dos conjuntos, indicados con las líneas cruzadas ▦.)

(3) Esto significa que 10 215 es elemento del conjunto de múltiplos de 9.

En el tercer silogismo, C,

(1) La implicación establece el hecho de que el conjunto de números que están en el conjunto de múltiplos de 5 y en el de múltiplos de 9 (en otras palabras, en su intersección) es un subconjunto del de los múltiplos de 45.

(2) Luego señalamos el hecho de que 10 215 está en dicha intersección

(3) Esto significa que 10 215 es un elemento del conjunto de múltiplos de 45.

1-35 LA DEMOSTRACION «ENUNCIADO-JUSTIFICACION»

Aun la sencilla «demostración» del ejemplo que antecede se vuelve difícil al ponerla en un diagrama. A causa de esto, por lo general no es práctico tratar de «ver» una demostración de ese modo. En su lugar, se escribe el silogismo en un tipo formal

de arreglo de «enunciado-justificación», como se hará después de bastante práctica, de modo menos formal.

La demostración «enunciado-justificación» del ejemplo precedente aparece así:

Demostrar que 45 divide a 10 215.

Demostración:

Enunciado	*Justificación*
5 divide a 10 215	Si la última cifra de un número es 5 o 0, entonces el 5 lo divide.
$1 + 0 + 2 + 1 + 5 = 9$	Hechos conocidos de la suma
$9 \cdot 1 = 9$	Hechos conocidos de la multiplicación.
9 divide a 9	Definición de *divide a*: Si a y b son dos enteros no negativos, decimos que a divide a b si existe un entero no negativo c, tal que $a \cdot c = b$.
Por tanto, 9 divide a 10 215	Si 9 divide a la suma de los dígitos de un número, entonces divide al número mismo.
Por consiguiente, 45 divide a 10 215	Si 9 y 5 dividen a un número, entonces 45 también lo divide.

Nótese que en la columna de *enunciados* están precisamente los números de que trata este ejemplo, mientras que en la de *justificaciones* aparecen implicaciones que valen para todos los números de ciertos conjuntos.

Cualquier justificación usada en la columna de justificaciones debe ser un enunciado que se ha aceptado como cierto o una abreviatura de dicho enunciado.

(1) Puede ser una implicación que se aceptó como cierta sin demostración, llamada *postulado* o *axioma*.

(2) Puede ser una implicación ya demostrada como cierta, llamada *teorema*.

(3) Puede ser el convenio respecto al significado de una palabra, frase o idea presente en un análisis previo, llamado *definición*.

Nótese que hemos escrito «Hechos conocidos de la suma» como una de las justificaciones. Esto fue usado como abreviatura de un conjunto de hechos que al objeto de este ejemplo se aceptaron como postulados. De modo similar, para los «Hechos de la multiplicación».

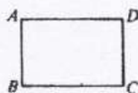
Recuérdese que el propósito de una demostración es convencerse o convencer a alguien que a la luz de hechos aceptados, cierto enunciado es verdadero.

El argumento debe ser «hermético» si queremos que sea bueno, en tanto que si tiene «fugas», poca gente quedará convencida por él.

1-10 Ejercicios

En los Ejercicios del 1 al 10, clasificar cada silogismo, según que sea correcto o no. Hacer un diagrama de Euler que muestre para cada caso los dos conjuntos y el elemento en consideración de uno de ellos. Si el silogismo es incorrecto, explicar por qué lo es. Recordar que la veracidad o falsedad de los enunciados no determina si el silogismo es correcto.

1. Si una figura es un rectángulo, entonces es un cuadrilátero. La figura $ABCD$ es un rectángulo.



Por tanto, es un cuadrilátero.

2. Si un número es múltiplo de 6, entonces es múltiplo de 3.
   24 es múltiplo de 6.
   Por tanto, 24 es múltiplo de 3.

3. Si un número es múltiplo de 6, entonces es múltiplo de 3.
15 es un múltiplo de 3.
Por tanto, 15 es un múltiplo de 6.

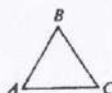
4. Si un número es la cuarta potencia de un número natural, entonces su última cifra es 0, 1, 5 o 6.
7^4 es la cuarta potencia de un número natural.
Por tanto, el último dígito es 0, 1, 5 o 6.

5. Si una muchacha es sueca, tiene ojos azules.
Ingrid es sueca.
Por tanto, Ingrid tiene ojos azules.

6. Si una muchacha es sueca, tiene ojos azules.
Brigida es danesa.
Por tanto, no tiene ojos azules.

7. Si una muchacha es sueca, tiene ojos azules.
Nancy tiene ojos azules.
Por tanto, es sueca.

8. Si dos ángulos de un triángulo son iguales, entonces los lados opuestos a esos ángulos son iguales.



En el triángulo ABC, $AB = BC$.
Por tanto, $\angle C = \angle A$.

9. Si dos ángulos de un triángulo son iguales, entonces los lados opuestos a dichos ángulos son iguales.
En el triángulo ABC, $\angle C = \angle A$.
Por tanto, $AB = BC$.

10. Si a, b y x son enteros no negativos y si $a = b$, entonces $a + x = b + x$.
32, $8x$ y 7 son enteros no negativos y $32 = 8x$.
Por tanto, $32 + 7 = 8x + 7$.

11. Suponer que se sabe lo siguiente:
(a) Si un dispositivo es un objeto, entonces es un artefacto;
(b) Si un dispositivo es un artefacto, entonces tiene anexo un activador.
(c) un turboencendedor es un dispositivo.
Juntar dos silogismos que demuestren que un turboencendedor tiene anexo un activador. Dibujar luego un diagrama de Euler que ilustre la situación.

12. Suponer que se sabe lo siguiente:
(a) si el número de dos cifras formado por las dos últimas cifras de un entero no negativo es un múltiplo de 4, entonces 4 divide al número mismo;
(b) Si la última cifra de un entero no negativo es 0 o 5, entonces 5 divide al número;
(c) si 4 divide a un número y 5 divide a un número, entonces 20 divide al número.
Juntar tres silogismos que demuestren que 20 divide a 9 856 371 460.

2 Introducción al conjunto de los números reales como un campo

2-1 DESCRIPCION DEL CONJUNTO DE LOS NUMEROS REALES

El conjunto de números reales es la colección de números que hemos usado durante muchos años. En los cursos de álgebra elemental se comenzó con un subconjunto de los números reales, el conjunto de los números naturales, $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Se definieron operaciones binarias de suma y multiplicación, se postularon ciertas propiedades de los números naturales con respecto a dichas operaciones y se demostraron otras deductivamente.

Al trabajar con la suma, s, de dos números, digamos m y n, se descubrió que no siempre era posible encontrar en los números naturales un número m que al ser sumado a n diese el número s. Por ejemplo, no hay número que sumado a 4 dé como suma 4. Tampoco existe un número natural que sumado a 4 dé 2. Por esta razón se definió el número cero, que se denota por «0», como el número con la propiedad de que $n + 0 = n$, en donde n es cualquier número natural.

Al cero se le denominó elemento idéntico para la suma porque al sumarlo a un número natural el resultado era idénticamente el mismo. Esto nos daba el conjunto de los enteros no negativos W, en donde $W = \{0\} \cup N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Luego para cada número natural n, se inventó un número $-n$, llamado el inverso aditivo de n, con la propiedad de que $n + (-n) = 0$. Estos números, junto con los elementos de W, forman el conjunto de los enteros $I = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. $N \subset I$, y los elementos de N, en este contexto, se llaman también *enteros positivos*. Otro nombre para el inverso aditivo de un número natural es *entero negativo*.

Los más importantes subconjuntos de I aparecen más abajo.

$N = \{1, 2, 3, \ldots\}$, el conjunto de los números naturales o conjunto de los enteros positivos

$W = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, el conjunto de los enteros no negativos

$I = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$, el conjunto de los enteros
$\{-1, -2, -3, \ldots\}$, el conjunto de los enteros negativos
$\{0, -1, -2, -3, \ldots\}$, el conjunto de los enteros no positivos
$\{x \mid x = 2k,\ k \in I\}$, el conjunto de los enteros pares
$\{x \mid x = 2k + 1,\ k \in I\}$, el conjunto de los enteros impares

Como los conjuntos que denominamos con N, W e I aparecerán con frecuencia en la exposición y en los ejercicios a lo largo del texto, es conveniente reservar estos símbolos exclusivamente para dichos conjuntos.

Puesto que $N \subset I$ y se han postulado previamente varias propiedades para la suma y multiplicación cuando se aplican a los elementos de N, resulta natural aceptar los mismos postulados para el nuevo conjunto de números I. Por ejemplo, un postulado para la suma de números naturales habría sido «para cada par de números naturales n y m, $n + m = m + n$». En el conjunto de los enteros I, diría «para cada par de números enteros n y m, $n + m = m + n$».

A partir de estos postulados y usando el método deductivo, se construyó un sistema que permitía encontrar la suma o el producto de cualesquiera enteros y desarrollar otras propiedades que comprendían extensiones o combinaciones de dichas operaciones. Se definió la operación resta, se demostró que I era cerrado ante esta operación y se mostraron otros hechos necesarios para la computación con enteros o para encontrar conjuntos soluciones de ecuaciones.

Más tarde se observó que se había definido una operación inversa de la suma, pero que no había ninguna para la multiplicación. Sin embargo, había necesidad de que en una operación sobre los enteros m y n resultase un número q que al multiplicarse por n se obtuviera el producto m.

División: $\dfrac{m}{n} = m \div n = q \leftrightarrow n \cdot q = m$

$14 \div 2 = 7$, ya que $2 \cdot 7 = 14$. $20 \div (-4) = -5$, puesto que $(-4) \cdot (-5) = 20$. Pero esta operación no se podía aplicar a cualquier par de enteros. No había solución para $3 \div 2$ o $15 \div 4$. Para solucionar esto se definió el conjunto de los números racionales Q.

$$f \in Q \leftrightarrow f = \frac{a}{b} \quad \text{en donde} \quad a,\ b \in I \text{ y } b \neq 0$$

Si existía un entero c, tal que $b \cdot c = a$, entonces dicho entero quedaba definido como $\frac{a}{b}$. En otras palabras, $I \subset Q$. Por supuesto, se deseaba entonces que los postulados aceptados para los enteros se aplicasen a los elementos del conjunto aumentado Q. Consecuentemente, se demostraron los teoremas necesarios que permitiesen, por una parte, encontrar otros números racionales equivalentes a $\frac{a}{b}$, $\frac{-a}{b}$, $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$, $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$, $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$, y por otra que sirviesen para resolver ecuaciones cuyos conjuntos solución fuesen subconjuntos de Q.

Con frecuencia resultaba conveniente usar fracciones decimales para representar números racionales y se demostró que cada número racional se podía escribir como un entero, un decimal finito o un decimal infinito periódico. Por ejemplo,

$$\frac{4}{2} = 2 \qquad \frac{5}{3} = 1{,}666\ldots$$

$$\frac{10}{33} = 0{,}3030303\ldots \qquad \frac{735}{1000} = 0{,}735$$

Recíprocamente, cada decimal finito o infinito periódico se podía escribir como un número racional $\frac{a}{b}$, en donde a, $b \in I$ y $b \neq 0$.

¿Puede el estudiante escribir una expresión que no sea un entero, no sea un decimal periódico ni sea un decimal finito? Si puede, ése no será un número racional.

Consideremos la expresión 0,1234567891011 . . . , en donde los tres puntos suspensivos indican que se continúe colocando los números dígitos en las posiciones decimales, a la derecha del número previo. Esto seguramente nunca será periódico. Otro ejemplo es 0,20220222022220 . . . , en donde después de cada 0 sucesivo, se tiene un 2 más que en el grupo anterior al 0.

Se habrá demostrado igualmente que no hay solución en Q para la ecuación $x^2 = 2$. Un número tal x, no era un entero y, además, no se podía representar como un decimal finito o infinito periódico. Sin embargo, se podía encontrar un número racional 1,41, donde $(1{,}41)^2 = 1{,}9881$ y otro número racional 1,414 tal que $(1{,}414)^2 = 1{,}999396$ y otro, 1,4142 tal que $(1{,}4142)^2 = 1{,}9996064$.

Esto condujo a aceptar que x, tal que $x^2 = 2$, se podía definir mediante el numeral 1,4142 . . . (en donde los puntos suspensivos indican que el 2 está seguido por un número ilimitado de dígitos). Se sabía que x no era un número racional, por tanto, no podía existir un conjunto de dígitos repetido. Tal expresión quizá se haya denominado número decimal infinito no periódico. Los números 0,20220222 . . . y 0,123456 . . . se adaptan también a esta descripción. Se reconocía que había un número infinito de ellos y a su conjunto se le llamó conjunto de los números irracionales. Hemos designado este conjunto mediante Q'.

Deseamos que el estudiante note en este momento que la exposición anterior no define a los números irracionales. Desafortunadamente, no estamos capacitados para definir un número irracional en término de los números racionales y usando solo el lenguaje matemático que existe actualmente. Los términos «decimal infinito periódico», «decimal infinito no periódico» y «número irracional» deben aceptarse como no definidos. Hemos descrito ciertas características de Q' y de sus elementos para ayudar a aclarar la definición de números irracionales.

Obsérvese que el conjunto de números racionales Q y el de los números irracionales Q' son ajenos. Si formamos su unión $Q \cup Q'$, obtenemos un conjunto que llamamos de números reales R. Los elementos de R se aceptan sin definición, aunque reconocemos que algunos subconjuntos tales como N, W, I y Q y sus propiedades son ya familiares para el lector.

2-1 Ejercicios

1. Explicar qué significa la afirmación de que π no es un número racional. ¿Es cierto que $\pi = \frac{22}{7}$?

2. Dado

$$A = \left\{ 3, -\frac{1}{3}, \sqrt{3}, \frac{1}{7}, 0{,}272727\ldots, \sqrt[3]{7}, -2, \frac{8}{7}, 3\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{2} \right\}$$

Escribir los elementos de cada uno de los conjuntos siguientes:

(a) $B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in I\}$
(b) $C = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in Q\}$
(c) $D = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in W\}$
(d) $E = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin Q\}$
(e) $F = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in N\}$
(f) $G = \{x \mid x \in A \text{ y } x \text{ es irracional}\}$
(g) $H = \{x \mid x \in A \text{ y } x \text{ es un entero positivo par}\}$
(h) $J = \{x \mid x \in A \text{ y } x \text{ es un número primo}\}$
(i) $K = \{x \mid x \in A \text{ y } x \text{ es el inverso aditivo de un número natural}\}$

3. De los conjuntos siguientes, ¿cuáles son finitos y cuáles infinitos?

(a) $\{x \mid x \text{ es un número natural par}\}$
(b) $\{x \mid x \text{ es cualquiera del primer millón de números naturales}\}$
(c) $\{x \mid x \in Q \text{ y } x \text{ está entre 3 y 4}\}$
(d) $\left\{x \mid x \in Q \text{ y } x \text{ está entre } \frac{1}{4} \text{ y } \frac{1}{3}\right\}$

(e) $\left\{x \mid x \in Q \text{ y } x \text{ está entre } \frac{1}{4000} \text{ y } \frac{1}{3000}\right\}$
(f) $\{x \mid x \in W \text{ y } x \text{ está entre 3000 y 4000}\}$
(g) $\{x \mid x \in W \text{ y } x \text{ está entre 3 y 3 billones}\}$
(h) $\{x \mid x \in W \text{ y } x \text{ es menor que 3 billones}\}$
(i) $\{x \mid x \in W \text{ y } x \text{ es mayor que 3 billones}\}$

Analizar las afirmaciones de los Ejercicios del 4 al 24. Marcar si son verdaderas o falsas.

4. $W \subset N$
5. $W \subset Q$
6. $W \subseteq Q$
7. $I \subset Q$
8. $Q \cap Q' = \varnothing$
9. $\sqrt{2} \in Q$
10. $Q \cup Q' = R$
11. Si $a \in Q$, entonces $a \in R$.
12. Si $a \in R$, entonces $a \in Q$.
13. Si $a \in I$, entonces $a \in Q$.
14. Si $a \in \{0\}$, $a \in R$.
15. $I \cup Q = R$
16. $0 \cup N = W$
17. $\{0\} \in N$
18. $I \cup Q = Q$
19. $N \cap W = \{0\}$
20. $0 \subset \{0\}$
21. $-3 \in W$
22. $-3 \in Q$
23. $N \in R$
24. $(I \cup Q) \subset R$

Explicar por qué los números de los Ejercicios del 25 al 30 son racionales.

25. 0,3
26. 3,61
27. $\frac{1}{7}$
28. 3,1416
29. 15 %
30. 0,5 %

En los Ejercicios del 31 al 39, encontrar el número decimal que es equivalente al número dado.

31. $\frac{7}{8}$
32. $\frac{3}{500}$
33. $5\frac{2}{3}$
34. $\frac{1}{9}$
35. $\frac{7}{11}$
36. $3\frac{3}{7}$
37. $14\frac{2}{5}\,\%$
38. 0,7 %
39. 102 %

Encontrar una fracción que sea equivalente a cada uno de los números decimales periódicos dados en los Ejercicios del 40 al 43.

Ejemplo Hallar la fracción equivalente a 0,03232 . . .

Solución: Sea $n = 0{,}03232\ldots$ Escribamos dos números con la misma parte decimal. Esto lo podemos lograr multiplicando n primero por 10 y luego por 1000.

$$10n = 0{,}3232\ldots$$
$$1000n = 32{,}3232\ldots$$

Puesto que las partes decimales son las mismas, la diferencia entre $1000n$ y $10n$ es un número natural.

$$1000n - 10n = 32{,}3232\ldots - 0{,}3232\ldots$$
$$990n = 32$$
$$n = \frac{32}{990} = \frac{16}{495}$$

40. 0,444 . . .
41. 0,707070 . . .
42. 1,21414 . . .
43. 3,023023 . . .

2-2 OPERACIONES BINARIAS

Frecuentemente trataremos con conjuntos de objetos en los que el orden en que aparezcan es significativo. El más sencillo de dichos conjuntos contiene solo dos objetos y se llama par ordenado o pareja ordenada.

Definición Se dice que un par de objetos a y b es un *par ordenado* si uno de ellos se identifica como el primer objeto y el otro como el segundo. Si a es el primer objeto y b el segundo, el par ordenado se representa por (a, b).

Ejemplo (a) (3, 4) es un par ordenado de números naturales en los que 3 es el primer número y 4 el segundo.

Cuando ponemos $3 + 4 = 7$, estamos asociando, con el par ordenado $(3, 4)$, el número 7. No asociaríamos el 8 con este par y en esta situación puesto que conocemos las leyes de la suma. Ya que la suma asocia con cada par ordenado de números naturales uno y solo un número natural, decimos que la suma es una operación binaria sobre el conjunto de los números naturales.

Definición Una *operación binaria* sobre un conjunto no vacío S, asocia a cada par ordenado (a, b) de elementos de S un único elemento de S.

Si el símbolo $*$ (léase «asterisco») se usa para denotar una operación binaria sobre un conjunto S y si $*$ asocia el objeto c con el par ordenado (a, b), usualmente pondremos $a * b = c$. Nótese que $a * b$ y c son simplemente dos representaciones diferentes del objeto único que $*$ asocia con (a, b).

La operación aritmética resta *no* es una operación binaria sobre N. Por ejemplo, la resta no asocia ningún número natural con el par ordenado $(3, 4)$; es decir, $3 - 4$ no es un número natural.

Sea $*$ una operación binaria sobre un conjunto S y sea $A \subseteq S$. Si $a * b \in A$ para cualquier par ordenado (a, b) de elementos de A, entonces decimos que A es *cerrado ante la operación* $*$. Por supuesto, que de $S \subseteq S$, se sigue que S es cerrado ante $*$.

Ejemplo (b) La suma es una operación binaria sobre el conjunto I de los enteros. El conjunto E de enteros pares es un subconjunto de I. Si (a, b) es un par ordenado de enteros pares, entonces $a + b$ es un entero par; es decir, si $a, b \in E$, entonces $(a + b) \in E$. Por tanto, el conjunto de enteros pares es cerrado ante la suma.

Ejemplo (c) La suma es una operación binaria sobre N. El conjunto D, de números naturales impares es un subconjunto de N. Nótese que $5, 7 \in D$ pero $5 + 7 \notin D$, de modo que D no es cerrado ante la suma.

En nuestro desarrollo de los números reales deseamos suponer que la suma y el producto son operaciones binarias sobre R. Tal hipótesis significaría que el conjunto de los números reales fuese cerrado ante dichas operaciones. Por este motivo se le llama comúnmente postulado de cerradura.

Postulado K-1 Postulado de cerradura

K-1a: Postulado de cerradura de la suma.

Con cada par ordenado (x, y) de números reales existe asociado un número real único $x + y$, llamado la *suma* de x y y. x y y se llaman *sumandos* de $x + y$.

K-1b: Postulado de cerradura de la multiplicación.

Para cada par ordenado (x, y) de números reales existe un número real único (x, y) llamado el producto de x y y. El producto de x y y comúnmente se escribe xy o $(x)(y)$. x y y se llaman factores de xy.

Ejemplo (d) $7, \sqrt{2} \in R$. Luego, por el Postulado K-1, sabemos que tanto $(7 + \sqrt{2})$ como $(7 \cdot \sqrt{2})$ son elementos únicos de R. Además, puesto que $(7 + \sqrt{2}) \in R$ y $(7 \cdot \sqrt{2}) \in R$, tenemos que

$$(7 + \sqrt{2}) + (7 \cdot \sqrt{2}) \in R$$

y

$$(7 + \sqrt{2}) \cdot (7 \cdot \sqrt{2}) \in R$$

Ejemplo (e) Ya que $7, \sqrt{2} \in R$, podemos decir que

$$(7 + \sqrt{2}) \in R$$

Así, pues,

$[(7 + \sqrt{2}) + 7] \in R$

y también

$[(7 + \sqrt{2}) + 7]\sqrt{2} \in R$

Nótese cómo se usan el paréntesis y los corchetes en los Ejemplos (d) y (e) para aclarar el significado de expresiones como

$(7 + \sqrt{2}) + (7 \cdot \sqrt{2})$

y

$[(7 + \sqrt{2}) + 7]\sqrt{2}$

Hemos usado estos símbolos para indicar el orden en que se han de ejecutar las operaciones de suma y multiplicación.

2-3 PROPIEDADES DE LA IGUALDAD

En la Sección 1-3 analizamos la igualdad de conjuntos y el uso del símbolo = en lo relativo a conjuntos. También escribimos $a = b$ para indicar que a y b representan el mismo elemento de algún conjunto. Necesitamos ahora hacer ciertas suposiciones acerca de la relación de igualdad respecto al conjunto de los números reales. Estas hipótesis pueden parecer triviales, pero son extremadamente importantes en el desarrollo lógico de este sistema matemático.

Postulado E-1 La propiedad reflexiva de la igualdad
Para cada $a \in R$, $a = a$.

Postulado E-2 La propiedad de simetría de la igualdad
Si $a, b \in R$ y si $a = b$, entonces $b = a$.

Postulado E-3 La propiedad transitiva de la igualdad
Si $a, b, c \in R$ y si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$.

Postulado E-4 La propiedad de sustitución de la igualdad

Si $a, b \in R$ y si $a = b$, entonces a puede ser sustituida por b en cualquier expresión, enunciado específico o proposición abierta. Tal sustitución no cambia el valor de la expresión ni altera la veracidad del enunciado específico ni el conjunto de verdad de la proposición abierta.

La primera de estas propiedades, la propiedad reflexiva, ciertamente parece obvia, pero debe destacarse que no todas las relaciones sobre el conjunto de nuestros números reales tienen esta propiedad. Por ejemplo, no es cierto que $a < a$ para cada número real a. Nótese también que si $a, b \in R$ y si $a < b$, no se sigue que $b < a$. Es decir, que la relación «menor que» no tiene la propiedad de simetría. ¿Cree el lector que la relación «menor que» tiene la propiedad transitiva?

2-2 Ejercicios

Sea $S = \{a, b, c, d\}$. Definiremos una operación binaria $\#$ (léase «doble cruz») sobre S mediante la tabla de la página siguiente.
Al usar la tabla se entiende que el elemento asociado con el par ordenado (b, c) se encuentre en el cruce del renglón que tiene b a la izquierda con la columna que tiene c en la parte superior. Según dicha tabla, $b \# c = a$. Hallar el elemento

#	a	b	c	d
a	d	c	b	a
b	c	b	a	d
c	b	a	d	c
d	a	d	c	b

que # asocia con cada uno de los pares ordenados siguientes:

(a) (a, b) (e) $((d, a), b)$
(b) (b, b) (f) $((b, b), b)$
(c) (c, d) (g) $((d, c), (b, a))$
(d) (d, c)

2. Si S y # están dados como el Ejercicio 1, hallar el elemento que falta en los siguiente:

(a) $b \# d =$ ________
(b) $d \# b =$ ________
(c) $(a \# c) \# b =$ ________
(d) $(a \# c) \# (b \# c) =$ ________
(e) $\{[(a \# c) \# b] \# c\} =$ ________
(f) ________ $\# a = b$
(g) $c \#$ ________ $= a \# c$

3. Nuevamente, si S y ‡ son dados como en el Ejercicio 1, ¿es verdadero o falso el enunciado siguiente?

$(a \# b) \# c = a \# (b \# c)$

4. ¿Es $(x+y)+z = x+(y+z)$, para todo $x, y, z \in W$?

5. La resta, que se denota por $-$, es una operación binaria sobre el conjunto I de los enteros. Si E es el conjunto de los enteros pares, ¿es E cerrado ante la resta? Razonar la respuesta.

6. La multiplicación es una operación binaria sobre I. ¿Es E cerrado ante la multiplicación? Razonar la respuesta.

7. Consideremos las tres tablas que siguen:

•	x	y	z
x	x	x	x
y	x	y	z
z	x	z	y

#	z	y	z
x	x	y	z
y	y	z	x
x	z	x	y

α	x	y	z
x	x	x	x
y	x	x	x
z	x	x	x

(a) ¿Es • una operación binaria sobre $\{x, y, z\}$? Razonar la respuesta.
(b) ¿Es el conjunto $\{x, y\}$ cerrado ante •?
(c) ¿Es el conjunto $\{x, z\}$ cerrado ante •?
(d) ¿es ‡ una operación binaria sobre $\{x, y, z\}$? Dar una razón para la respuesta.
(e) ¿Es α una operación binaria sobre $\{x, y, z\}$?
(f) Hallar $(y \bullet y) \bullet z$.
(g) Hallar $(x \bullet z) \,\alpha\, y$.
(h) Hallar $(z \,\alpha\, y) \bullet (x \,\alpha\, y)$.
(i) Hallar $\{[(x \,\alpha\, y) \bullet x] \,\alpha\, z\} \bullet z$.

En los Ejercicios del 8 al 17, enunciar el postulado que justifique el enunciado dado. Suponiendo que $x, y, z \in R$.

8. Si $x = \sqrt{3}$, entonces $\sqrt{3} = x$.

9. Si $\frac{15}{17} = x$ y $x = y$, entonces $\frac{15}{17} = y$.

10. $(x \cdot y) \in R$.

11. $(x + y) \in R$.

12. $\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

13. Si $x = y$ y $x + 3 = 16$, entonces $y + 3 = 16$.

14. Si $x = y$ y $(x+3) \cdot 2 = x+5$, entonces $(y+3) \cdot 2 = y+5$.

15. Si $x = y$ y $y = 3$, entonces $x = 3$.

16. Si $[(x + y) + z] = 2 \cdot x$ y $2 \cdot x = 4$, entonces $[(x + y) + z] = 4$.

17. Si $x = y$ y $x = 3$, entonces $y = 3$.

18. ¿Es el proceso aritmético de división una operación sobre:

(a) el conjunto I de los enteros?
(b) el conjunto Q de los racionales?
(c) el conjunto R de los reales?

En los Ejercicios del 19 al 22, hallar la representación más simple del número real dado. Dense por sentadas las propiedades elementales de suma y producto.

19. $\{[(4 + 2) + 3] \cdot 2\} + 2$

20. $[(4 + 2) + 3] \cdot (2 + 2)$

21. $\{[(3 + 2) \cdot 4] + 2\} \cdot 2$

22. $[(3 + 2) \cdot (4 + 2)] \cdot 2$

2-4 PROPIEDADES ADITIVA Y MULTIPLICATIVA DE LA IGUALDAD

Si se suman 3 a cada uno de los números reales $(4 + 2)$ y 6 que aparecen en la proposición verdadera $4 + 2 = 6$, la proposición resultante $(4 + 2) + 3 = 6 + 3$ es también verdadera. En general, para cualesquiera números reales a, b, c, d, si $a = b$ y $c = d$, entonces $a + c = b + d$.

Esta proposición se sigue casi inmediatamente de las definiciones que hemos hecho y de los postulados en que hemos convenido hasta ahora en este capítulo. Demostraremos el teorema siguiente (y uno similar para la multiplicación) usando las técnicas desarrolladas en la Sección 1-35.

Teorema 2-1 Propiedad aditiva de la igualdad

Para todo número real a, b, c y d, si $a = b$ y $c = d$, entonces $a + c = b + d$.

Demostración:

Proposición	*Justificación*
1. $a, b, c, d \in R$	1. Dado
2. $a + c \in R$	2. Postulado de cerradura de la suma
3. $a + c = a + c$	3. Propiedad reflexiva de la igualdad
4. $a = b$	4. Dado
5. $a + c = b + c$	5. Propiedad de sustitución de la igualdad (a se sustituye por b en el lado derecho de la ecuación del paso 3).
6. $c = d$	6. Dado
7. Por tanto, $a + c = b + d$	7. Propiedad de sustitución de la igualdad (c se sustituye por d en el lado derecho de la ecuación del paso 5).

Se pueden usar otros conjuntos de proposiciones y justificaciones igualmente válidas para demostrar este teorema. Por ejemplo, los pasos 1, 4 y 6 podían haberse combinado en un solo paso. Recuérdese que el propósito de una demostración es convencer plenamente de que cierta proposición es verdadera. Si usted cree que puede realizar este propósito en 5 pasos en vez de 7 o 15 en lugar de 22, tiene completa libertad de hacerlo. Sin embargo, existe una recomendación: No espere que quien lea la demostración complete los pasos que faltan en la argumentación; es decir, una demostración válida debe ser completa, sin importar la forma.

Demostraremos ahora un teorema similar al anterior. Notemos que haciendo uso de unos cuantos símbolos la proposición del teorema puede hacerse bastante concisa. Advirtamos también que hemos combinado dos o más pasos donde lo consideramos conveniente sin debilitar ni oscurecer la argumentación.

Teorema 2-2 Propiedad multiplicativa de la igualdad

Para toda $a, b, c, d \in R$, $a = b$ y $c = d \rightarrow a \cdot c = b \cdot d$.

Demostración:

Proposición	*Justificación*
1. $a, b, c, d \in R$	1. Dado
2. $a \cdot c \in R$	2. Postulado de cerradura para la multiplicación.
3. $a \cdot c = a \cdot c$	3. Propiedad reflexiva de la igualdad
4. $a = b$, $c = d$	4. Dado
5. Por tanto, $a \cdot c = b \cdot d$	5. Propiedad de sustitución de la igualdad (a se sustituye por b y c se sustituye por d en el lado derecho de la igualdad del paso 3).

Dado que $c = c$ para cualquier $c \in R$, ambos teoremas demostrados nos permiten escribir:

Si $a, b, c \in R$ y $a = b$, entonces $a + c = b + c$

y

Si $a, b, c \in R$ y si $a = b$, entonces $a \cdot c = b \cdot c$.

Estas dos propiedades de los números reales se conocen como la propiedad aditiva de la igualdad y la propiedad multiplicativa de la igualdad, respectivamente.

2-3 Ejercicios

La verdad de cada una de las proposiciones dadas en los Ejercicios del 1 al 9 depende de uno de los postulados o teoremas de las Secciones 2-3 y 2-4. En cada caso enunciar en forma completa el postulado o teorema que corresponde. Suponer que $x, y, z \in R$.

1. Si $x = \sqrt{3}$ y $y = z$, entonces $x + y = \sqrt{3} + z$.
2. Si $x = y$ y $z = 6$, entonces $x \cdot z = y \cdot 6$.
3. Si $x = 5$ y $5 = y$, entonces $x + 5 = 5 + y$.
4. Si $x + y = z$ y $z = 6$, entonces $x + y = 6$.
5. Si $x + y = z$ y $z = 6$, entonces $(x + y) + z = z + 6$.
6. Si $x + 7 = y + 6$ y $z = 2$, entonces $(x + 7) \cdot z = (y + 6) \cdot 2$.
7. Si $6 = 2 + x$ y $y = 4$, entonces $6 \cdot y = (2 + x) \cdot 4$.
8. Si $6 = 2 + x$ y $6 = z$, entonces $z = 2 + x$.
9. Si $6 = 2 + x$ y $6 = z$, entonces $6 + 6 = (2 + x) + z$.
10. Dar la justificación de cada proposición en la demostración que sigue.

    Demostrar: Si $a, b, c \in R$ y $a = b$, entonces $a + c = b + c$.

    Demostración:

Proposición	*Justificación*
1. $a, b, c \in R$ y $a = b$	1. ____________
2. $a + c \in R$	2. ____________
3. $a + c = a + c$	3. ____________
4. Por tanto, $a + c = b + c$	4. ____________

11. Usando las demostraciones del Ejercicio 10 como guía, dar una demostración completa de la proposición

    Si $a, b, c \in R$ y si $a = b$, entonces $a \cdot c = b \cdot c$

Los teoremas que hemos demostrado hasta ahora no justifican proposiciones como

Si $x = 3$, entonces $4 + x = 4 + 3$

o

Si $x = 3$, entonces $4 \cdot x = 4 \cdot 3$

Sin embargo, no es difícil demostrar los teoremas que nos permitan afirmar que tales proposiciones son ciertas. Estos teoremas quedan enunciados en los Ejercicios 12 y 13 y describen propiedades de los números reales que también se conocen como propiedades multiplicativa y aditiva de la igualdad.

12. Dar las justificaciones de las proposiciones de la siguiente demostración:

    Demostrar: Si $a, b, c \in R$ y $a = b$, entonces $c \cdot a = c \cdot b$.

    Demostración:

Proposición	*Justificación*
1. $a, b, c \in R$ y $a = b$	1. ____________
2. $c \cdot a \in R$	2. ____________
3. $c \cdot a = c \cdot a$	3. ____________
4. $c \cdot a = c \cdot b$	4. ____________

13. Usando la demostración del Ejercicio 12 como guía, escribir una demostración completa del teorema:

    Si $a, b, c \in R$ y $a = b$, entonces $c + a = c + b$

2-5 LOS NUMEROS REALES FORMAN UN CAMPO

Además de los postulados aceptados en relación con la igualdad, hemos identificado el conjunto de números con los cuales vamos a trabajar, esto es, los números reales. En otras palabras, hemos supuesto que existen tales números. El postulado de cerradura afirma que cada par de números reales x, y, tienen una suma única llamada $x + y$ y un producto único llamado xy. Asimismo, $x + y$, $xy \in R$.

Necesitamos ahora hacer ciertas suposiciones concernientes al comportamiento de dichos números respecto de las operaciones de suma y multiplicación. Admitir que la suma de dos números existe, nos dice $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ y $5\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$ son números reales, pero ello no nos autoriza a sustituir $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ por $\frac{3}{4}$, ni $5\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$ por $8\sqrt{2}$.

Las leyes que necesitamos aquí y otras necesarias para cómputos con números reales se desarrollarán usando combinaciones de nuestros anteriores postulados y los cinco que a continuación ofrecemos, tres en esta sección y dos en la Sección 2-6. Recuérdese que por ahora tenemos éstas como las únicas propiedades conocidas de los números reales.

Cualquier conjunto cuyos elementos satisfagan los seis postulados que siguen, o cualquier conjunto equivalente de postulados, se llama *campo*. De ahí que los postulados se llaman *postulados de campo*.

Revisaremos nuevamente el postulado de cerradura, ya que pertenece a este grupo.

Postulado K-1 El postulado de cerradura

K-1a: **Postulado de cerradura de la suma**

Para cada par de números reales x y y existe un número real único $x + y$, llamado la suma de x y y. (Simbólicamente: $x, y \in R \rightarrow x + y \in R$.)

K-1b: Postulado de cerradura de la multiplicación

Para cada par de números reales x y y existe un número real único xy, llamado el producto de x y y. (Simbólicamente: $x, y \in R \rightarrow xy \in R$.)

Postulado K-2 Postulado conmutativo

K-2a: **Postulado conmutativo de la suma**

Para cada par de números x y y,

$x, y \in R \rightarrow x + y = y + x$

K-2b: Postulado conmutativo de la multiplicación

Para cada par de números x y y,

$x, y \in R \rightarrow xy = yx$

Este postulado afirma que la suma o el producto de cualesquiera dos números reales no resulta afectado por el orden en que se suman o se multiplican. Por ejemplo, puesto que $\sqrt{2},\ 3 \in R$,

$\sqrt{2} + 3 = 3 + \sqrt{2}$

Similarmente,

$5(\sqrt{2} + 1) = (\sqrt{2} + 1)5$

$$\frac{3}{5} + \frac{4}{7} = \frac{4}{7} + \frac{3}{5}$$

$(3 + 4) + 5 = 5 + (3 + 4)$

Sin embargo, los postulados K-1 y K-2 no permiten afirmar que

$(3 + 4) + 5 = 3 + (4 + 5)$

Aquí no se está cambiando el orden de la suma; se está cambiando la agrupación. Debemos ser capaces de hacer esta afirmación, pero ésta se sigue del Postulado K-3.

Postulado K-3 Postulado asociativo

K-3a: **Postulado asociativo de la suma**

Para cada trío de números x, y y z,

$x, y, z \in R \rightarrow (x + y) + z = x + (y + z)$

K-3b: Postulado asociativo de la multiplicación

Para cada trío de números x, y y z,

$x, y, z \in R \rightarrow (xy)z = x(yz)$

La combinación de la conmutatividad y la asociatividad de los números reales nos permite afirmar que

$(3+4)+5 = 3+(4+5)$	Postulado asociativo de la suma
$= 3+(5+4)$	Postulado conmutativo de la suma y Propiedad de sustitución de la igualdad
$= (5+4)+3$	Postulado conmutativo de la suma
$= (4+5)+3$	Postulado conmutativo de la suma y Propiedad de sustitución de la igualdad
$= 4+(5+3)$	Postulado asociativo de la suma
$= 4+(3+5)$	Postulado conmutativo de la suma y Propiedad de sustitución de la igualdad
$= (3+5)+4$	Postulado conmutativo de la suma
$= (5+3)+4$	Postulado conmutativo de la suma y Propiedad de sustitución de la igualdad
$= 5+(3+4)$	Postulado asociativo de la suma
$= 5+(4+3)$	Postulado conmutativo de la suma y Propiedad de sustitución de la igualdad
$= (4+3)+5$	Postulado conmutativo de la suma

A causa de la propiedad transitiva de la igualdad, cada una de las expresiones anteriores representa el mismo número, por lo que podemos escribir $3 + 4 + 5$ sin indicar qué par se debe sumar primero y en qué orden deben sumarse.

En los Ejercicios 2-4 se pedirá demostrar proposiciones similares para cualquier trío de números reales x, y y z y construir un argumento similar en donde la multiplicación esté en lugar de la suma.

Postulado K-4 Postulado distributivo

Para cada trío de números x, y y z,

$$x, y, z \in R \rightarrow x(y+z) = xy + xz$$

Podemos entonces escribir

$$x(\sqrt{2} + y) = x \cdot \sqrt{2} + xy$$

$$\frac{5}{8}\left(8 + \frac{1}{5}\right) = \frac{5}{8} \cdot 8 + \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{5}$$

$$(a+b) \cdot (c+d) = (a+b)c + (a+b)d$$

El postulado distributivo combinado con la propiedad de simetría de la igualdad nos permite afirmar que

$$(\sqrt{2})3 + (\sqrt{2})2 = \sqrt{2}(3+2)$$

$$x \cdot 2 + x \cdot 5 = x(2+5)$$

$$(x+y)z + (x+y)w = (x+y) \cdot (z+w)$$

En otras palabras, este postulado se usa a veces para escribir el producto de dos números reales como la suma de dos números reales, y en otras ocasiones, para escribir la suma de dos números como un producto.

Antes de mencionar los últimos dos postulados de un campo, necesitamos hacer una pausa para permitir al estudiante familiarizarse mejor con los cuatro primeros. Para ello demostraremos varias proposiciones como ejemplo. Si una proposición demostrada, sea por los autores o por los estudiantes, es de aquellas que usaremos a menudo para estructurar nuestro sistema deductivo la llamaremos

«teorema». De otro modo la llamaremos «ejercicio» o «proposición». Hablando estrictamente, *todos* son teoremas, pero usamos esta terminología para que el estudiante sepa cuáles necesita recordar.

Ejemplo (a) *Demostrar*: $a, b, c \in R \rightarrow a(b + c) = (b + c)a$.

Demostración:

$a, b, c \in R$	Dado
$a(b + c), (b + c)a \in R$	Postulado de cerradura
$a(b + c) = (b + c)a$	Postulado conmutativo

Ejemplo (b) *Demostrar*: $x, y, z \in R \rightarrow (xy) \cdot (2z) = 2[(xy)z]$.

Demostración:

$x, y, z \in R$	Dado
Cualquier producto que se forme usando x, y, z, 2, es un número real	Postulado de cerradura de la multiplicación
$(xy) \cdot (2z) = [(xy) \cdot 2]z$	Postulado asociativo de la multiplicación
$[(xy) \cdot 2]z = [2(xy)]z$	Postulado conmutativo de la multiplicación y propiedad de sustitución de la igualdad
$[2(xy)]z = 2[(xy)z]$	Postulado asociativo de la multiplicación
$(xy) \cdot (2z) = 2[(xy)z]$	Propiedad transitiva de la igualdad

Puesto que la propiedad de sustitución de la igualdad se usa frecuentemente en casi toda demostración, vamos a convenir en que no necesita ser anotada como justificación de una proposición cuando se use junto con otra como en el paso 4 de la demostración anterior. De manera semejante, no enunciaremos en cada demostración dónde se usan la propiedad transitiva de la igualdad y los postulados de cerradura. También convendremos en que, salvo que se indique lo contrario, todas las variables representan números reales.

Con estos convenios en mente, la demostración del Ejemplo (b) podría quedar como sigue:

Demostrar: $(xy) \cdot (2z) = 2[(xy)z]$.

Demostración:

$(xy) \cdot (2z) = [(xy) \cdot 2]z$	Postulado asociativo de la multiplicación
$= [2(xy)]z$	Postulado conmutativo de la multiplicación.
$= 2[(xy)z]$	Postulado asociativo de la multiplicación

Ejemplo (c) Demostrar el teorema siguiente. (El estudiante debe proporcionar las justificaciones como en el Ejercicio 35, página 52.)

Teorema 2-3 Ley distributiva por la derecha

$x, y, z \in R \rightarrow (x + y)z = xz + yz$.

Demostración:

$(x + y)z = z(x + y)$	1. ____________________
$= zx + zy$	2. ____________________
$= xz + yz$	3. ____________________

Antes de dar el siguiente ejemplo, conviene recordar que los únicos hechos conocidos por nosotros acerca de la suma o la multiplicación son aquellos que

corresponden a los números *naturales*: $3+2=5$, $1003+87=1090$, $32\times 5=160$, etc. Dondequiera que se presente la suma o el producto de dos *números naturales*, se le puede remplazar por el número natural que la aritmética nos enseña que es la suma o el producto. Si esto sucede en una demostración en donde se necesita dar una justificación para tal sustitución, se puede decir que es un «hecho conocido de los números naturales».

Ejemplo (d) *Demostrar*: $(4a+3)+2(a+2)=6a+7$. (Justificaciones como Ejercicio 36, página 52.)

Demostración:

$$\begin{aligned}(4a+3)+2(a+2) &= (4a+3)+(2a+2\cdot 2) && 1.\ ______\\ &= (4a+3)+(2a+4) && 2.\ ______\\ &= (4a+3)+(4+2a) && 3.\ ______\\ &= [(4a+3)+4]+2a && 4.\ ______\\ &= [4a+(3+4)]+2a && 5.\ ______\\ &= (4a+7)+2a && 6.\ ______\\ &= 2a+(4a+7) && 7.\ ______\\ &= (2a+4a)+7 && 8.\ ______\\ &= (2+4)a+7 && 9.\ ______\\ &= 6a+7 && 10.\ ______\end{aligned}$$

Ejemplo (e)

Demostrar: $(5m)(2n)=10(mn)$. (Justificaciones como Ejercicio 37, página 52.)

Demostración:

$$\begin{aligned}(5m)\cdot(2n) &= (5m)\cdot(n\cdot 2) && 1.\ ______\\ &= [(5m)\cdot n]\cdot 2 && 2.\ ______\\ &= [5(mn)]2 && 3.\ ______\\ &= 2[5(mn)] && 4.\ ______\\ &= (2\cdot 5)(mn) && 5.\ ______\\ &= 10(mn) && 6.\ ______\end{aligned}$$

2-4 Ejercicios

Justificar cada proposición de los Ejercicios del 1 al 26 dando el nombre de un postulado o teorema.

1. $2(3+5)=(2)(3)+(2)(5)$
2. $(3+5)(2)=3(2)+5(2)$
3. $\sqrt{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\sqrt{2}$
4. $7(5+3\sqrt{2})=7(5)+7(3\sqrt{2})$
5. $7(3\sqrt{2})=(7\cdot 3)\sqrt{2}$
6. $7+(3+\sqrt{2})=(7+3)+\sqrt{2}$
7. $(\sqrt{2}+5)+(3+\sqrt{2})=\sqrt{2}+[5+(3+\sqrt{2})]$
8. $(\sqrt{2}+5)+(3+\sqrt{2})=[(\sqrt{2}+5)+3]+\sqrt{2}$
9. $(\sqrt{2}+1)(3+11)=(\sqrt{2}+1)\cdot 3+(\sqrt{2}+1)(11)$
10. $(\sqrt{2}+1)(3+11)=\sqrt{2}(3+11)+1\cdot(3+11)$
11. $(5+3\sqrt{2})\cdot 0=5\cdot 0+(3\sqrt{2})\cdot 0$
12. $5\sqrt{2}\in R$
13. $(7+\sqrt{2})\in R$
14. $7+(3+\sqrt{2})=7+(\sqrt{2}+3)$
15. $xy+x(y+z)=xy+(xy+xz)$
16. $xy+xz=x(y+z)$
17. $xa+ya=(x+y)a$
18. $x[(y+z)+a]=x(y+z)+xa$
19. $x+(y+z)=x+(z+y)$
20. $x+y=z\rightarrow(x+y)+z=z+z$
21. $(x+y)(a+b)=(x+y)a+(x+y)b$
22. $(x+y)(a+b)=x(a+b)+y(a+b)$
23. $x=\sqrt{2},\sqrt{2}=y\rightarrow x=y$
24. $\frac{1}{2}=x\rightarrow x=\frac{1}{2}$
25. $x=a\rightarrow x+3=a+3$
26. $x+2=\sqrt{2}\rightarrow 3(x+2)=3\sqrt{2}$

En los Ejercicios del 27 al 34, llenar los espacios en blanco para que las proposiciones sean casos especiales de exactamente uno de los postulados o teoremas. Dar el nombre del postulado o teorema.

27. $3(5+\sqrt{2})=3\cdot____+____\cdot____$

28. $(3+\sqrt{2})\cdot 5 = 3\cdot$ _____ $+$ _____ $\cdot$ _____

29. $\left(7+\frac{1}{2}\right)+2 =$ _____ $+($_____ $+$ _____$)$

30. $(4+\sqrt{2})+\left(3+\frac{1}{3}\right) = [(4+\sqrt{2})+$ ___$]+$ ___

31. $7(3\sqrt{2}) = ($_____ $\cdot$ _____$)\sqrt{2}$

32. $(8\cdot 5)7 =$ _____ $\cdot($_____ $\cdot$ _____$)$

33. $[2(5+7)]\sqrt{2} =$ _____ $\cdot[($_____$)\cdot$ _____$]$

34. $(8+3)+5 =$ _____ $+($_____ $+$ _____$)$

En los Ejercicios del 35 al 41, dar las justificaciones para las proposiciones de las demostraciones.

35. Para el Teorema 2-3, en el Ejemplo (c), página 50.
36. Para la demostración en el Ejemplo (d), página 51.
37. Para la demostración en el Ejemplo (e), página 51.
38. *Demostrar*: $(x+y)+(a+b) = (a+x)+(y+b)$.

    Demostración:

    $(x+y)+(a+b)$
    $= [(x+y)+a]+b$ 1. ________
    $= [a+(x+y)]+b$ 2. ________
    $= [(a+x)+y]+b$ 3. ________
    $= (a+x)+(y+b)$ 4. ________

39. *Demostrar*: $x[(a+b)+c] = xa+(xb+xc)$.

    Demostración:

    $x[(a+b)+c]$
    $= x(a+b)+xc$ 1. ________
    $= (xa+xb)+xc$ 2. ________
    $= xa+(xb+xc)$ 3. ________

40. *Demostrar*: $(x+y)(a+b) = (xa+ya)+(xb+yb)$.

    Demostración:

    $(x+y)(a+b)$
    $= (x+y)a+(x+y)b$ 1. ________
    $= (xa+ya)+(xb+yb)$ 2. ________

41. *Demostrar*: $(x+5)(x+2) = (x^2+7x)+10$ (suponer que $x\cdot x = x^2$).

    Demostración:

    $(x+5)(x+2)$
    $= (x+5)x+(x+5)2$ 1. ________
    $= (x^2+5x)+(x\cdot 2+5\cdot 2)$ 2. ________
    $= (x^2+5x)+(2x+5\cdot 2)$ 3. ________
    $= (x^2+5x)+(2x+10)$ 4. ________
    $= [(x^2+5x)+2x]+10$ 5. ________
    $= [x^2+(5x+2x)]+10$ 6. ________
    $= [x^2+(5+2)x]+10$ 7. ________
    $= (x^2+7x)+10$ 8. ________

Escribir las demostraciones de las proposiciones dadas en los Ejercicios del 42 al 56 mostrando cada paso y usar solo un postulado o teorema en cada paso. Suponer que $x \in R \rightarrow x\cdot x = x^2$.

42. $(x+2)+z = z+(x+2)$
43. $[(x+y)+5]+z = (x+5)+(y+z)$
44. $(x+y)+(z+w) = [(x+w)+y]+z$
45. $(2b)c = b(2c)$
46. $3(7x) = 21x$
47. $(4x)(5y) = 20(xy)$
48. $(xy)(ab) = (bx)(ay)$
49. $(x+a)(y+b) = (xy+xb)+(ay+ab)$
50. $(x+3)(y+9) = (xy+3y)+(9x+27)$
51. $(a+5)(a+7) = a^2+(12a+35)$
52. $(x+\sqrt{2})(x+3) = [x^2+(\sqrt{2}+3)x]+3\sqrt{2}$
53. $2[a+(b+c)] = (2a+2b)+2c$
54. $2[(a+3)+c] = (2a+2c)+6$
55. $2\{[(a+b)+c]+d\} = (2a+2c)+(2b+2d)$
56. $3+\{2a+5[a+(b+2)]\} = 7a+(5b+13)$
57. Definir xyz como $(xy)z$. Demostrar que cualquier arreglo de x, y, z en que se use la operación binaria multiplicación, es igual a $(xy)z$ y, por tanto, igual a xyz (véase la página 49).
58. Definir $x+y+z$ como $(x+y)+z$ y escribir una demostración de la proposición siguiente: Cualquier arreglo de x, y, z en que se use la operación binaria de la suma, es igual a $x+y+z$. (*Sugerencia*: Véase página 49.)

2-6 LOS NUMEROS REALES FORMAN UN CAMPO (continuación)

Si el estudiante escribió acertadamente las demostraciones de los ejercicios previos, probablemente le habrá sorprendido el número de pasos en cada demostración. A medida que avanzamos y que el estudiante se acostumbra a usar los postulados, debemos hacer ciertos convenios que haga menos laborioso el proceso. Sin embargo, nadie se hallará preparado para esto a menos que sea capaz de dar las demostraciones mostrando cada paso, como se delineó en la Sección 2-5.

Enunciaremos ahora los otros dos postulados de campo: el *postulado de la identidad* y el *postulado del inverso*. Después, con los seis postulados, podemos

demostrar los teoremas necesarios para desarrollar las técnicas de operación de los elementos de un campo, en nuestro caso el de nuestros números reales.

Postulado K-5 Postulado de la identidad

K-5a: Postulado de la identidad para la suma

El cero es un elemento idéntico de la suma (para cada número real x, $x+0=x$ y $0+x=x$).

K-5b: Postulado de la identidad de la multiplicación

El uno es un elemento idéntico de la multiplicación (para cada número real x, $x \cdot 1 = x$ y $1 \cdot x = x$).

K-5c: $1 \neq 0$

Postulado K-6 El postulado del inverso

K-6a: Postulado del inverso aditivo

Para cada número real x, existe un número real ^-x, llamado inverso aditivo de x, tal que $x + {}^-x = 0$ y $^-x + x = 0$.

K-6b: Postulado del inverso multiplicativo

Para cada número real x, excepto 0, existe un número real x', llamado inverso multiplicativo de x o recíproco de x, tal que $x \cdot x' = 1$ y $x' \cdot x = 1$.

Los elementos idénticos del Postulado K-5 y los inversos del Postulado K-6 son únicos y la demostración de ello es relativamente simple. El lector descubrirá a medida que progresa en matemáticas que una demostración de la proposición «q es única» sigue generalmente el mismo patrón. Primero se supone que q no es única. Debe existir, entonces, otra, llamémosla p. Pero si en realidad q es única, las definiciones, postulados y teoremas precedentes nos llevarán al hecho de que $p = q$.

Teorema 2-4 La identidad aditiva 0 es única

Demostración: Supóngase que hay otra identidad aditiva b. Entonces,

$0 + b = 0$

Pero, según el postulado de la identidad aditiva,

$0 + b = b$

Por tanto, por sustitución

$b = 0$

lo que significa que 0 es el único elemento idéntico aditivo.

La demostración del Teorema 2-4 puede usarse como modelo para la del teorema siguiente.

Teorema 2-5 El idéntico multiplicativo 1 es único

El Postulado K-5 garantiza que para cada x real, $x + 0 = x$. ¿Qué se puede decir acerca de x?

Teorema 2-6 Para cada $x \in R$, $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$.

Demostración:

$0 + 0 = 0$	1. ____________________
$x(0 + 0) = x \cdot 0$	2. ____________________
$x \cdot 0 + x \cdot 0 = x \cdot 0$	3. ____________________
$^-(x \cdot 0) \in R$	4. ____________________
$(x \cdot 0 + x \cdot 0) + {}^-(x \cdot 0) = x \cdot 0 + {}^-(x \cdot 0)$	5. ____________________
$x \cdot 0 + [x \cdot 0 + {}^-(x \cdot 0)] = x \cdot 0 + {}^-(x \cdot 0)$	6. ____________________
$x \cdot 0 + [x \cdot 0 + {}^-(x \cdot 0)] = 0$	7. ____________________
$x \cdot 0 + 0 = 0$	8. ____________________
$x \cdot 0 = 0$ y $0 \cdot x = 0$	9. ____________________

El producto de *cualquier* número real por 0 es 0.

Ejemplos $\sqrt{2}(0) = 0$, $(7 + 5\sqrt{2})0 = 0$, $0[^-(5\sqrt{2})] = 0$.

Teorema 2-7 El inverso aditivo de un número real es único

$x \in R, x + b = 0 \rightarrow b = {}^-x$

$x \in R, b + x = 0 \rightarrow b = {}^-x$

Demostración: De acuerdo con el postulado del inverso aditivo, para cada número real x existe un número ^-x, tal que $x + {}^-x = 0$ y $^-x + x = 0$. Supóngase que ^-x no es único. Entonces x tiene otro inverso, b, tal que $x + b = 0$ y $b + x = 0$. Esto implica que $^-x + (x + b) = {}^-x + 0$ y $(b + x) + {}^-x = 0 + {}^-x$. (Hemos usado la propiedad aditiva de la igualdad.) Entonces, en uno y otro caso, por los postulados asociativo del inverso y de identidad, $b = {}^-x$. Por tanto, el inverso aditivo de un número real es único.

De este modo vemos que cuando la suma de dos números reales es 0, cada uno de ellos es el inverso aditivo del otro. $a + b = 0 \rightarrow a = {}^-b$ y $b = {}^-a$. Usaremos este hecho para demostrar lo siguiente:

Teorema 2-8 El inverso aditivo del inverso aditivo de x es x

$x \in R \rightarrow {}^-({}^-x) = x$

Demostración:

$x + {}^-x = 0$	Postulado del inverso aditivo
$x = {}^-({}^-x)$	Teorema: $a + b = 0 \rightarrow a = {}^-b$ (el inverso aditivo es único).

Las demostraciones de los Teoremas 2-6 y 2-7, como ya se habrá notado, fueron escritas en forma muy diferente. Una demostración matemática no tiene que estar necesariamente escrita en dos columnas, una para las proposiciones y otra para las justificaciones de ellas. Puede consistir en un párrafo expositorio o quizá de una combinación de exposición y columnas «proposición-justificación». En cualquier caso, las proposiciones deben quedar justificadas explícita o implícitamente. Las demostraciones que haga el estudiante deben ser muy explícitas, especialmente a este nivel.

El autor puede decir: «Supóngase que b es el inverso aditivo de x. Entonces $x + b = 0$», y espera que el estudiante piense: «postulado del inverso aditivo».

El autor puede escribir:

$$a + b = 0 \rightarrow (a + b) + {}^-b = 0 + {}^-b$$
$$\rightarrow a + (b + {}^-b) = {}^-b$$
$$\rightarrow a = {}^-b$$

El estudiante puede ir escribiendo en la misma forma, dando las justificaciones en una columna a la derecha: «A causa de la propiedad aditiva de la igualdad, $a + b = 0 \rightarrow (a + b) + {}^-b = 0 + {}^-b$. Usando luego el postulado asociativo a la izquierda y el postulado de la identidad a la derecha, obtenemos $a + (b + {}^-b) = {}^-b$. Finalmente, por los postulados del inverso aditivo y de la identidad, tenemos que $a = {}^-b$.»

Cuando el estudiante se sienta confiado de que puede escribir las demostraciones, haciendo ver cada paso mediante una definición, postulado o teorema como justificación de cada proposición, puede comenzar a combinar pasos para acortar las demostraciones. Posteriormente podrá incluso omitir el enunciado de las justificaciones cuando sean obvias. («Obvio» permanece como un término no definido, aceptando todos el hecho de que profesores y autores lo usarán más libremente que los estudiantes. Más aún, no tendrá el mismo significado para ambos grupos. En general, significaría que la misma proposición con la misma justificación se ha usado tantas veces que la justificación se reconoce de inmediato.) Sin embargo, cuando una proposición se introduce por primera vez, ya sea definición, postulado o teorema, conviene ser explícito al usarla.

En el Ejercicio 34 de la página 57 se le pide al estudiante escribir una demostración del teorema siguiente usando una forma similar a la del Teorema 2-7.

Teorema 2-9 El inverso multiplicativo de un número real es único
$xy = 1 \rightarrow x = y'$ y $y = x'$ $(x, y \neq 0)$

Otro tipo de argumentación, la llamada ***demostración por contradicción*** se usa a menudo en matemáticas. Para demostrar que una implicación es verdadera, se supone que la conclusión es falsa y entonces se demuestra que esto conduce a la negación de alguna proposición ya aceptada como cierta. Pero una proposición y su negación no pueden ambas ser ciertas. De ahí que esto sea una contradicción y, por tanto, la conclusión debe ser verdadera.

Usaremos esto para demostrar el teorema que sigue.

Teorema 2-10 $x \neq 0 \rightarrow x' \neq 0$.

***Demostración*:**

$x \neq 0 \rightarrow x' \in R$ y $xx' = 1$ (¿Por qué?)
Supóngase que $x' = 0$; entonces $xx' = 0$ (¿Por qué?)

Esto implica que $0 = 1$, que es una contradicción del postulado de la identidad. Por tanto, $x' \neq 0$ si $x \neq 0$.

Al final de esta sección aparece una lista de teoremas que se han de demostrar como ejercicios. En muchos casos, al pedirse estas primeras demostraciones, se dan sugerencias para ayudar en la iniciación. El estudiante se preguntará: ¿Cuándo se me ocurriría a mí hacer eso? Lamentablemente, no hay una respuesta simple y directa. Sin embargo, he aquí algunas guías generales.

Existen esencialmente tres tipos de demostración:

1. Una demostración ya sea de la proposición dada o de su contrapositiva.
2. Demostración por contradicción, a veces llamada demostración indirecta. Este método ya fue estudiado y usado para demostrar el Teorema 2-10. Normalmente, se recurre a este método cuando se ha fallado el intento de obtener una demostración directa.
3. Demostración por inducción matemática. Esta solo se usa en casos muy especiales. De hecho, no se usa en este curso, pero su necesidad se analiza en la Sección 3-5.

El método de demostración más comúnmente usado es el método directo. La primera proposición de una demostración de tal tipo podría ser:

(a) Una proposición tomada de la hipótesis del teorema que se desea demostrar.
(b) La proposición de uno de los postulados escrito en términos de los números concernientes al teorema.
(c) Un teorema previamente demostrado que contenga los números de este teorema.

Si se desea demostrar que $x + z = y + z \rightarrow x = y$, se intenta usando como primera proposición:

$x + z = y + z$	Dado

Si esto falla, el siguiente intento consistirá en tratar de demostrar que $x \neq y \rightarrow x + z \neq y + z$. En ese caso, la primera proposición que hay que trabajar es

$x \neq y$	Dado

Al demostrar el Teorema 2-8 $[x \in R \rightarrow {}^-({}^-x) = x]$, la única proposición de la hipótesis es $x \in R$. Hemos convenido en que no necesitamos enunciar esto, de modo que volvemos la vista hacia los postulados. Al ver la conclusión de nuestro teorema, ${}^-({}^-x) = x$, parece razonable usar el postulado del inverso aditivo. Puesto que deseamos incluir los números en nuestro teorema, nuestra primera proposición sería

$x + {}^-x = 0$	Postulado del inverso aditivo
o	
${}^-x + {}^-({}^-x) = 0$	Postulado del inverso aditivo

Realmente, aunque éste no es siempre el caso, aquí se puede usar cualquiera de los dos. La demostración dada en la página 54 usa la primera. Si se comienza con la segunda se puede tener la siguiente demostración:

${}^-x + {}^-({}^-x) = 0$	Postulado del inverso aditivo
$x + [{}^-x + {}^-({}^-x)] = x + 0$	Propiedad aditiva de la igualdad
$(x + {}^-x) + {}^-({}^-x) = x$	Postulado asociativo a la izquierda, Postulado de la identidad aditiva a la derecha
$0 + {}^-({}^-x) = x$	Postulado del inverso aditivo
${}^-({}^-x) = x$	Postulado de la identidad aditiva

Teorema 2-11 El inverso multiplicativo del inverso multiplicativo de x es x. Es decir, $x \in R$ y $x \neq 0 \rightarrow (x')' = x$.

Demostración: La demostración queda como el Ejercicio 35, página 57.

Teorema 2-12 Ley de la cancelación de la suma

$\left.\begin{array}{l} x+z=y+z \rightarrow x=y \\ z+x=z+y \rightarrow x=y \end{array}\right\}$ (Ejercicio 36, pág. 57.)

(*Sugerencia*: Sumar ^-z a ambos lados de la ecuación $x + z = y + z$.)

Teorema 2-13 Ley de la cancelación de la multiplicación

$\left.\begin{array}{l} z \neq 0, xz=yz \rightarrow x=y \\ z \neq 0, zx=zy \rightarrow x=y \end{array}\right\}$ (Ejercicio 37, pág. 57.)

Teorema 2-14 El inverso aditivo de 0 es 0, es decir, $^-0 = 0$. (Ejercicio 38, página 57.) (*Sugerencia*: Usar el Teorema 2-7.)

Teorema 2-15 $xy = 0 \leftrightarrow x = 0$ o $y = 0$. (Ejercicio 39, pág. 58.)

Teorema 2-16 $x = y \leftrightarrow {}^-x = {}^-y$. (Ejercicio 40, pág. 58.)

Teorema 2-17 $x, y \neq 0, x = y \leftrightarrow x' = y'$. (Ejercicio 41, pág. 58.)

2-5 Ejercicios

1. Nombrar los cinco postulados de campo. Dar un enunciado preciso de cada uno.

Nombrar o enunciar con palabras o símbolos el postulado o teorema que justifica cada una de las proposiciones en los Ejercicios del 2 al 21.

2. $5+0=5$
3. $5+{}^-5=0$
4. $5 \cdot 1=5$
5. $(\sqrt{2}+7) \cdot 1=\sqrt{2}+7$
6. $(\sqrt{2}+7) \cdot 0=\sqrt{2} \cdot 0+7 \cdot 0$
7. $(\sqrt{2}+7) \cdot 0=0$
8. $^-(\sqrt{2}+7) \cdot 1={}^-(\sqrt{2}+7)$
9. $\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2})'=1$
10. $(\sqrt{2}+7)+{}^-(\sqrt{2}+7)=0$
11. $(\sqrt{2}+7)(\sqrt{2}+7)'=1$
12. $\frac{1}{2}(\sqrt{2}+5)=\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}+\frac{1}{2} \cdot 5$
13. $(\sqrt{2}+5)3=\sqrt{2} \cdot 3+5 \cdot 3$
14. $(aa')5=1 \cdot 5$
15. $1 \cdot 5=5$
16. $0 \cdot 1=0$
17. $0+0=0$
18. $0+{}^-0=0$
19. $x+2=0 \rightarrow x={}^-2$
20. $x+0={}^-\sqrt{2} \rightarrow x={}^-\sqrt{2}$
21. $^-[{}^-(17\sqrt{2})]=17\sqrt{2}$

Demostrar las proposiciones de los Ejercicios del 22 al 31. Dar las justificaciones de cada proposición, pero no necesariamente un solo postulado o teorema para cada paso. Suponer que $x \cdot x = x^2$.

22. $(x+2)[x+{}^-2]=x^2+2({}^-2)$
23. $(x+1)(x+5')=[x^2+(1+5')x]+5'$
24. $3x+7x=10x$
25. $x+2x=3x$
26. $(4x)(2'x)=2x^2$
27. $(3x+y)(x+y)=(3x^2+4xy)+y^2$
28. $(2x+5)+(x+2)=3x+7$
29. $(x+\sqrt{2})+(7x+{}^-\sqrt{2})=8x$
30. $(x+y)+3=0 \rightarrow x={}^-(y+3)$
31. $3x=3 \rightarrow x=1$
32. Dar una demostración completa del Teorema 2-5, página 53.
33. Brindar las justificaciones que faltan en la demostración del Teorema 2-6, página 52.
34. Dar dos demostraciones del Teorema 2-9, de la página 54, una usando la forma proposición-justificación y la otra mediante una forma similar a la del Teorema 2-7 de la página 54.
35. Demostrar el Teorema 2-11, página 56.
36. Demostrar la ley de la cancelación de la suma (Teorema 2-12, página 57).
37. Demostrar la ley de la cancelación de la multiplicación (Teorema 2-13, página 55).
38. Demostrar el Teorema 2-14, página 57.

39. Completar la demostración del Teorema 2-15, dada a continuación.

Teorema 2-15 $xy = 0 \leftrightarrow x = 0$ o $y = 0$.

En este caso necesitamos demostrar la equivalencia de dos proposiciones. Primeramente demostraremos que

$xy = 0 \rightarrow x = 0$ o $y = 0$

Demostración: $x = 0$ o bien $x \neq 0$.

Si $x \neq 0$, x tiene una inversa x'	1. ________
$xy = 0$	2. ________
$x'(xy) = x'(0)$	3. ________
$(x'x) \cdot y = 0$	4. ________
$1 \cdot y = 0$	5. ________
$y = 0$	6. ________

De igual modo, si $y \neq 0$, entonces $x = 0$.

Ahora necesitamos demostrar la inversa,

$x = 0$ o $y = 0 \rightarrow xy = 0$

Demostración: Sabemos que esto es cierto, de manera inmediata, por el Teorema 2-6: $x \in R \rightarrow x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$.

40. Completar la demostración del Teorema 2-16, dada a continuación:

Teorema 2-16 $x, y \in R$ y $x = y \leftrightarrow {}^-x = {}^-y$.

En este caso necesitamos demostrar una proposición y su inversa. Primeramente demostraremos que $x, y \in R$ y $x = y \rightarrow {}^-x = {}^-y$.

Demostración:

$x = y$	1. ________
$x + {}^-x = y + {}^-x$	2. ________
$0 = y + {}^-x$	3. ________
${}^-y + 0 = {}^-y + (y + {}^-x)$	4. ________
${}^-y = ({}^-y + y) + {}^-x$	5. ________
${}^-y = {}^-x$	6. ________
${}^-x = {}^-y$	7. ________

Ahora necesitamos demostrar la inversa:

${}^-x = {}^-y \rightarrow x = y$

Se ve que podemos invertir los pasos de la demostración anterior dando las justificaciones apropiadas. Por ejemplo, el paso 6 sigue del paso 7 por la propiedad de simetría de la igualdad. El paso 5 se sigue del 6 por los postulados de identidad e inverso. Todos éstos se llaman «pasos reversibles». En esta demostración, *cada* paso es reversible, y si los escribiésemos en el orden inverso, tendríamos la demostración de ${}^-x = {}^-y \rightarrow x = y$. Cuando se presenta esta situación, todo lo que necesitamos decir para demostrar la inversa es: «Los pasos son reversibles; por tanto, ${}^-x = {}^-y \rightarrow x = y$.»

41. **Dar una demostración completa del siguiente teorema:**

Teorema 2-17 $x, y \neq 0$, $x = y \leftrightarrow x' = y'$. (*Sugerencia*: La demostración es semejante a la del Teorema 2-16, dada en el Ejercicio 40.)

Resolver las ecuaciones de los Ejercicios del 42 al 55 dando las justificaciones de cada paso. Se necesitará usar las leyes de la cancelación, demostradas en los Ejercicios 36 y 37. Hay que recordar que no hemos definido la resta ni la división y que conocemos propiedades de la suma y la multiplicación solo para los *números naturales*. Suponer que $x \cdot x = x^2$.

Ejemplo

$3x + 2 = 8$	
$3x + 2 = 6 + 2$	Hecho de los números naturales
$3x = 6$	Ley de la cancelación de la suma
$3x = 3 \cdot 2$	Hecho de la multiplicación de los números naturales
$x = 2$	Ley de la cancelación de la multiplicación

Hemos demostrado que $3x + 2 = 8$ solo si $x = 2$ o que $3x + 2 = 8 \rightarrow x = 2$. En otras palabras, sabemos que $x = 2$ es la única solución posible. Si podemos demostrar que $x = 2 \rightarrow 3x + 2 = 8$, entonces 2 *es* una solución de la ecuación y por cierto que la única. Podríamos dar una demostración de esa proposición en la forma siguiente:

$x = 2 \rightarrow 3x = 6$	Propiedad multiplicativa de la igualdad y hecho de la multiplicación de los números naturales
$\rightarrow 3x + 2 = 6 + 2$	Propiedad aditiva de la igualdad
$\rightarrow 3x + 2 = 8$	Hecho de los números naturales

o bien, puesto que sabemos que 2 es el único candidato, simplemente sustituimos x por 2 en la ecuación original para ver si la proposición resultante es verdadera. ¿$3 \cdot 2 + 2 = 8$? Sí, porque $3 \cdot 2 = 6$ y $6 + 2 = 8$ son hechos de los números naturales.

42. $5x + \sqrt{2} = 15 + \sqrt{2}$
43. $3x + 5x = 16$
44. $2x + 3 = 5$
45. $3x + 1 = 4$
46. $7x + 2 = 5x + 10$ (*Sugerencia*: $7x = (5+2)x$.)
47. $3x + 4 = 7x$
48. $3x = 2x$ (*Sugerencia*: $2x = 2x + 0$; ¿por qué?)
49. $7x = 6x$
50. $3x = 0$ (*Sugerencia*: $0 = 3 \cdot 0$; ¿por qué?)
51. $5x = 0$
52. $3x + 2 = 2$
53. $(\sqrt{2})'x = 1$

54. $x' = 2$

55. $x' = 2'$

56. Examinar la solución de $x(x + 4) = 0$, dada a continuación.

$x(x+4)=0$	Dado
$x(x+4)=x \cdot 0$	Teorema: $x \cdot 0 = 0$
$x+4=0$	Ley de la cancelación de la multiplicación
$(x+4)+{}^{-}4=0+{}^{-}4$	Propiedad aditiva de la igualdad
$x={}^{-}4$	Postulados asociativo e inverso en el lado izquierdo y postulado de la identidad a la izquierda y a la derecha.

¿Hemos demostrado que $x = {}^{-}4$ es una solución?

¿Hemos demostrado que $x = {}^{-}4$ es la única solución?

¿Qué inconveniente existe en esta demostración?

Resolver las ecuaciones dadas en los Ejercicios del 57 al 61, enunciando las justificaciones de cada paso.

57. $x(x + 4) = 0$

58. $(x + {}^{-}4)(x + 4) = 0$

59. $(x + \sqrt{2})(x + {}^{-}1) = 0$

60. $x^2 + 6x = 0$

61. $x^2 = (2\sqrt{2})x$

Continuación del desarrollo del cuerpo o campo de los números reales 3

3-1 PROPIEDADES DEL INVERSO ADITIVO

El postulado K-6a afirma que «para cada número real x existe un número real ^-x, llamado el inverso aditivo de x, tal que $x + {}^-x = 0$ y $^-x + x = 0$». De nuevo recordemos que los elementos de nuestro universo R están definidos solo por los postulados y que estamos construyendo un álgebra con ellos como fundamentos. Podemos, sin embargo, dar otras definiciones siempre que no contradigan a los postulados. Hemos demostrado ya algunos teoremas y podemos usarlos junto con los postulados y definiciones para demostrar otros. Esto deseamos hacerlo, de ser posible, sin tener en cuenta material de los cursos anteriores, puesto que son muy variados en contenido y método. Al hacer esto esperamos lograr un agregado de material común, del cual podamos obtener y dar al estudiante la experiencia que habrá de ayudarle en su desarrollo.

Para todo ello necesitamos la cooperación del estudiante. No hemos definido números «negativos» o «positivos». En tales condiciones, si $x \in R$, solo conocemos una propiedad de ^-x: que es el número que al sumarse a x da 0. Por lo hasta ahora estudiado, sabemos que $^-2$ es un entero negativo y más adelante lo definiremos como tal; pero de momento, solo sabemos que puesto que $2 \in R$, 2 tiene un inverso aditivo $^-2 \in R$, y que $2 + {}^-2 = 0$.

Probablemente, ya sabemos que

$$x + \frac{1}{x} = \frac{x^2+1}{x} \quad \text{y} \quad \frac{2x}{y} - \frac{x}{y} = \frac{x}{y}$$

para algún conjunto A y para $x, y \in A$. Sin embargo, no hemos de usar estos hechos hasta no haber desarrollado los teoremas para demostrarlos para $x, y \in R$. Del mismo modo, no hemos de depender de conocimientos previos al sumar $5 + {}^-7$ o $^-2 + {}^-3$ o $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. En su lugar hemos de suponer que solo conocemos las sumas y productos de números naturales. Esto, junto con los postulados, permitirá encontrar la suma de ciertos pares de números reales tales como 5 y $^-2$. Por ejemplo:

$5 + {}^-2 = (3 + 2) + {}^-2$	Propiedades de los números naturales
$= 3 + (2 + {}^-2)$	Postulado asociativo de la suma
$= 3 + 0$	Postulado del inverso aditivo
$= 3$	Postulado de la identidad de la suma

En la Sección 2-6 demostramos las siguientes propiedades para el inverso aditivo:

Teorema 2-7 $x \in R$ y $x + y = 0 \rightarrow y = {}^{-}x$ y $x = {}^{-}y$.
Teorema 2-8 ${}^{-}({}^{-}x) = x$.
Teorema 2-14 ${}^{-}0 = 0$.
Teorema 2-16 $x = y \leftrightarrow {}^{-}x = {}^{-}y$.

Demostraremos ahora otras propiedades que nos son especialmente importantes en nuestra búsqueda de técnicas que se pueden usar para encontrar los numerales básicos que representen la suma o el producto de cualquier par de números reales.

Teorema 3-1 Para cada par de números reales x, y, $({}^{-}x)y = {}^{-}(xy)$.

Demostración: (Las justificaciones debe darlas el estudiante en el Ejercicio 1, página 62.)

$x + {}^{-}x = 0$	1. ____________
$(x + {}^{-}x)y = 0 \cdot y$	2. ____________
$xy + ({}^{-}x)y = 0 \cdot y$	3. ____________
$xy + ({}^{-}x)y = 0$	4. ____________
$({}^{-}x)y = {}^{-}(xy)$	5. ____________

Corolario 3-1 $b \in R \rightarrow {}^{-}b = {}^{-}1(b)$.
La demostración se deja como ejercicio en el Ejercicio 2, página 62.

Teorema 3-2 Para cada par de números reales x, y, $({}^{-}x)({}^{-}y) = xy$.
La prueba se deja como ejercicio, Ejercicio 3, página 62.

Teorema 3-3 Para cada par de números reales x, y, ${}^{-}(x + y) = {}^{-}x + {}^{-}y$.
La prueba se deja como ejercicio, Ejercicio 4, página 62.

Los siguientes ejemplos ilustran cómo estos teoremas nos permiten encontrar la suma o el producto de cualquier par de elementos del conjunto $W \cup \{x | {}^{-}x \in N\} = \{\ldots, {}^{-}3, {}^{-}2, {}^{-}1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Ejemplo (a)

${}^{-}8 + 5 = {}^{-}(3 + 5) + 5$	Propiedades de los números naturales
$= ({}^{-}3 + {}^{-}5) + 5$	Teorema: ${}^{-}(x + y) = {}^{-}x + {}^{-}y$
$= {}^{-}3 + ({}^{-}5 + 5)$	Postulado asociativo de la suma
$= {}^{-}3 + 0$	Postulado del inverso aditivo
$= {}^{-}3$	Postulado del idéntico aditivo

Ejemplo (b)

${}^{-}15 + {}^{-}3 = {}^{-}(15 + 3)$	Teorema: ${}^{-}(x + y) = {}^{-}x + {}^{-}y$
$= {}^{-}18$	Propiedades de los números naturales

Ejemplo (c)

$({}^{-}5) \cdot 3 = {}^{-}(5 \cdot 3)$	Teorema: $({}^{-}x)y = {}^{-}(xy)$
$= {}^{-}15$	Propiedades de los números naturales

Ejemplo (d)

$({}^{-}5) \cdot ({}^{-}3) = 5 \cdot 3$	Teorema: $({}^{-}x)({}^{-}y) = xy$
$= 15$	Propiedades de los números naturales

El Ejemplo (e) ilustra el uso de los Teoremas 3-1, 3-2 y 3-3, para resolver ciertas ecuaciones —que no pueden resolverse sin ellos.

Ejemplo (e) Resolver para x: $(^-7)x = 10 + {}^-(2x)$.

$(^-7)x = 10 + {}^-(2x)$	Dado
$(^-7)x + 2x = [10 + {}^-(2x)] + 2x$	Propiedad aditiva de la igualdad
$(^-7 + 2)x = 10 + [^-(2x) + 2x]$	Teorema de la distributividad por la derecha en el primer miembro y postulado asociativo de la suma en el segundo miembro de la ecuación
$[^-(5 + 2) + 2]x = 10 + 0$	Propiedades de los números naturales en el primer miembro y postulado del inverso aditivo en el segundo miembro de la ecuación
$[(^-5 + {}^-2) + 2]x = 10$	Teorema: $^-(x + y) = {}^-x + {}^-y$, en el primer miembro y postulado del idéntico aditivo en el segundo miembro
$[^-5 + (^-2 + 2)]x = 10$	Postulado asociativo de la suma
$(^-5)x = 10$	Postulado del inverso aditivo y postulado del idéntico
$(^-5)x = 5 \cdot 2$	Propiedades de los números naturales
$(^-5)x = {}^-5(^-2)$	Teorema: $(^-x)(^-y) = xy$
$x = {}^-2$	Ley de cancelación de la multiplicación

Por tanto, $^-2$ es el único candidato para x. Sustituyéndolo en la ecuación original obtenemos

$(^-7)(^-2) = 10 + {}^-[2(^-2)]$ $7 \cdot 2 = 10 + {}^-[^-(2 \cdot 2)]$	Teorema: $(^-x)(^-y) = xy$ en el primer miembro; teorema: $(^-x)(y) = {}^-(xy)$ y el postulado conmutativo de la multiplicación en el segundo miembro
$7 \cdot 2 = 10 + (2 \cdot 2)$	Teorema: $^-(^-x) = x$
$14 = 14$	Propiedades de los números naturales

Por tanto, $^-2$ es la solución.

3-1 Ejercicios

1. Enunciar los postulados, definiciones y teoremas que justifican cada una de las afirmaciones en la demostración del Teorema 3-1, página 61.
2. Dar una demostración completa del Corolario 3-1, página 61.
3. Dar una demostración completa del Teorema 3-2, página 61.
4. Dar una demostración completa del Teorema 3-3, página 61.

En los Ejercicios del 5 al 22, dar las justificaciones de cada afirmación.

5. $7 + 2 = 2 + 7$
6. $^-5 + 0 = {}^-5$
7. $0 + 0 = 0$
8. $1 + \sqrt{2} = 1(1 + \sqrt{2})$
9. $^-3 + {}^-(^-3) = 0$
10. $^-3 + {}^-5 = {}^-8$
11. $(^-3)(5) = {}^-(15)$
12. $^-3[^-(4 + y)] = 3(4 + y)$
13. $^-16 = {}^-12 + {}^-4$
14. $(15')(15')' = 1$
15. $14x + 14y = 14(x + y)$
16. $^-(2y) = 16 \rightarrow 2y = {}^-16$
17. $^-x = {}^-15 \rightarrow x = 15$
18. $(3x)(^-y) = {}^-[(3x)y]$
19. $^-(2x)(^-y) = 2(xy)$
20. $x = 1 \cdot x$
21. $^-x = {}^-1 \cdot x$
22. $^-4 = {}^-1 \cdot 4$

Usar los postulados o teoremas concernientes al inverso aditivo y las propiedades de los números naturales que permitan encontrar los numerales básicos que representan las sumas y productos dados en los Ejercicios del 23 al 30. Mostrar los pasos con sus justificaciones.

23. $15 + {}^-13$
24. $7 + {}^-10$
25. $18(^-7)$
26. $13(^-5)$

27. $^-15(^-3)$
28. $^-8(^-6)$
29. $^-2 + {}^-15$
30. $^-6 + {}^-4$

Hallar el numeral básico que representa la suma o producto dados en los Ejercicios del 31 al 53. Mostrar los pasos aunque sin necesidad de justificarlos.

31. $15 + {}^-3$
32. $7 + {}^-8$
33. $8 + {}^-7$
34. $8(^-7)$
35. $^-8(^-7)$
36. $^-3 + {}^-9$
37. $13 + 11$
38. $^-13 + 11$
39. $^-13 + {}^-11$
40. $13 + {}^-11$
41. $^-13(11)$
42. $13(^-11)$
43. $^-13(^-11)$
44. $13(11)$
45. $5(3 + {}^-3)$
46. $^-5(^-3 + 4)$
47. $5(^-8) + {}^-5(^-8)$
48. $^-[^-(3 + 5)]$
49. $^-\{^-[^-(3 + 5)]\}$
50. $15 + (^-3 + 7)$
51. $24 + (^-2 + {}^-15)$
52. $[(^-2)(^-3)](^-5)$
53. $(^-7)[3(^-8)]$

En los Ejercicios del 54 al 60, usar el método desarrollado en el Ejemplo (e), página 62, para resolver las ecuaciones siguientes. Mostrar los pasos sin necesidad de justificarlos.

54. $7x + 3 = {}^-18$
55. $2x + {}^-5 = {}^-11$
56. $3x + {}^-4 = 2x + {}^-9$
57. $15x = {}^-(4x) + 38$
58. $^-(6x) = {}^-(2x) + 4$
59. $^-(2x) = {}^-(28)$
60. $^-(3x) = 27$

Encontrar un numeral básico para cada uno de los Ejercicios del 61 al 70. No es necesario mostrar todos los pasos ni enunciar las justificaciones.

61. $^-2[(3 + {}^-5) + 5]$
62. $7[^-8 + (^-3 + 5)]$
63. $(^-7 + 8)(^-15 + {}^-17)$
64. $(^-4 + 6)(^-13 + {}^-4)$
65. $^-5 + (3 + {}^-17)$
66. $(^-4 + {}^-6) + {}^-7$
67. $^-18 + \{^-5 + [18 + (^-7 + {}^-4)]\}$
68. $[(^-5 + {}^-4)(^-3 + 8)](^-10)$
69. $^-(^-13)(^-2) + (^-13 + {}^-2)$
70. $(11 + {}^-5) + (^-5)(11)$

Usar los postulados y teoremas para encontrar una expresión más simple en cada uno de los Ejercicios del 71 al 80. No es necesario mostrar todos los pasos ni dar las justificaciones.

71. $^-2x + 2x$
72. $^-(ax) + a(^-x)$
73. $^-3x + 4x$
74. $7x + 11x$
75. $(^-5x + {}^-2x) + 3x$
76. $(3x + {}^-8x) + 5x$
77. $(^-5 \cdot x)(^-2 \cdot x)$
78. $^-(8x)(4y)$
79. $^-(3a)[^-2(ab)]$
80. $[(3x)y][^-4(xy)]$

3-2 RESTA

En nuestro desarrollo de los números reales hemos supuesto solo dos operaciones: suma y multiplicación. Los postulados solo dan las propiedades de la suma y de la multiplicación. Hemos demostrado también teoremas concernientes a la suma y a la multiplicación. Por tanto, es evidente la ventaja de definir cualquier otra operación en términos de ellas.

Con esto en mente, introduzcamos un nuevo método de asociar los elementos de un par ordenado (x, y), con algún número real y luego investiguemos la asociación para ver si es una operación binaria sobre R.

Definición La *resta* es el proceso que asocia un número real d con un par ordenado de números reales (x, y) tal que $x - y = d \leftrightarrow x = y + d$. $x - y$ se llama la *diferencia* de x y y.

Ejemplo (a) $7 - 2 = 5$, puesto que $2 + 5 = 7$.
5 es el número que la resta asocia con el par (7, 2).

Ejemplo (b) $\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$, ya que $\sqrt{2} + 0 = \sqrt{2}$.

Ejemplo (c) $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ si $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, sin embargo esto no lo sabemos todavía.

Ejemplo (d) $5 - \sqrt{2} = x$ si $x + \sqrt{2} = 5$, pero aún no sabemos si existe tal número real.

Demostremos ahora que la resta es una operación binaria sobre R. Para ello necesitamos dos cosas: primera, que para *cualquier* par ordenado de números reales (x, y), su diferencia exista en R y segunda, que sea única.

Cada número real tiene exactamente un inverso aditivo. Sin embargo, cada par de números tiene una suma única. Por ello, para cada par de números reales x, y existe $x + {}^-y$ y es único. Pero notemos que $y + (x + {}^-y) = x$. Por tanto, por la definición de resta,

$x + {}^-y = x - y$

Luego, $x - y$ existe. Además, es único y se puede demostrar usando el método delineado en la página 53. Así, pues, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3-4 El teorema de la resta

Para cada par de números reales x y y, $x - y$ es el número real único $x + {}^-y$.

Este es un teorema muy útil y poderoso. Usarlo nos permite realizar la operación de resta convirtiéndola en una suma y esto es necesario si deseamos aplicar los postulados y teoremas previos.

Ejemplo (e)

$3 - ({}^-4) = 3 + {}^-({}^-4)$	Teorema de la resta
$= 3 + 4$	Teorema: ${}^-({}^-x) = x$
$= 7$	Propiedades de los números naturales

Ejemplo (f)

$2 - 7 = 2 + {}^-7$	Teorema de la resta
$= 2 + {}^-(2 + 5)$	Propiedades de los números naturales
$= 2 + ({}^-2 + {}^-5)$	Teorema: ${}^-(x + y) = {}^-x + {}^-y$
$= (2 + {}^-2) + {}^-5$	Postulado asociativo de la suma
$= 0 + {}^-5$	Postulado del inverso aditivo
$= {}^-5$	Postulado de identidad para la adición

Ejemplo (g)

$a - bc = a + {}^-(bc)$	Teorema de la resta

Ejemplo (h)

$a - (b + c) = a + {}^-(b + c)$	Teorema de la resta
$= a + ({}^-b + {}^-c)$	Teorema: ${}^-(x + y) = {}^-x + {}^-y$

Las demostraciones de los siguientes teoremas deben ser hechas por el estudiante.

Teorema 3-5	$x \in R \rightarrow x - 0 = x$	Ejercicio 16, página 65.
Teorema 3-6	${}^-(x - y) = {}^-x + y$	Ejercicio 17, página 65.
Teorema 3-7	$x - (y + z) = (x - y) - z$	Ejercicio 18, página 65.
Teorema 3-8	$x + (y - z) = (x + y) - z$	Ejercicio 19, página 65.
Teorema 3-9	$x - (y - z) = (x - y) + z$	Ejercicio 20, página 65.
Teorema 3-10	$x = y \leftrightarrow x - z = y - z$	Ejercicio 21, página 65.
Teorema 3-11	$x(y - z) = xy - xz$	Ejercicio 22, página 65.

3-2 Ejercicios

1. ¿Cuales de los siguientes subconjuntos de R son cerrados bajo la sustracción? Si es posible, justificar la respuesta en cada caso en que el conjunto no sea cerrado.

   (a) $N = \{x \mid x$ es un número natural$\}$
   (b) $W = \{x \mid x$ es un entero no negativo$\}$
   (c) $I = W \cup \{x \mid x = {}^-n, n \in N\}$
   (d) $E = \{x \mid x = 2k, k \in I\}$
   (e) $O = \{x \mid x = 2k + 1, k \in I\}$
   (f) $A = \{1, 0\}$
   (g) $B = \{{}^-1, 0\}$
   (h) $C = \{1, 0, {}^-1\}$

2. Enunciar las definiciones, teoremas y postulados que justifiquen cada una de las proposiciones siguientes.

   (a) $12 - (5 + 3) = 12 + {}^-(5 + 3)$
   (b) $12 + {}^-(5 + 3) = 12 + {}^-8$
   (c) $12 + {}^-8 = (4 + 8) + {}^-8$
   (d) $(4 + 8) + {}^-8 = 4 + (8 + {}^-8)$
   (e) $4 + (8 + {}^-8) = 4 + 0$
   (f) $4 + 0 = 4$

En los Ejercicios del 3 al 15, encontrar el numeral básico que represente la diferencia dada. Mostrar los pasos y dar las justificaciones de cada uno.

3. $5 - 2$
4. $13 - 12$
5. ${}^-7 - 2$
6. ${}^-3 - ({}^-3)$
7. ${}^-15 - 8$
8. ${}^-7 - ({}^-2)$
9. ${}^-15 - ({}^-9)$
10. $15 - 0$
11. ${}^-13 - 0$
12. $0 - 0$
13. $2 - (3 - 7)$
14. $5 + (4 - 18)$
15. $5 - [3 - (7 + {}^-5)]$

Dar las demostraciones completas de cada una de las proposiciones dadas en los Ejercicios del 16 al 25.

16. Teorema 3-5: $x \in R \rightarrow x - 0 = x$
17. Teorema 3-6: ${}^-(x - y) = {}^-x + y$
18. Teorema 3-7: $x - (y + z) = (x - y) - z$
19. Teorema 3-8: $x + (y - z) = (x + y) - z$
20. Teorema 3-9: $x - (y - z) = (x - y) + z$
21. Teorema 3-10: $x = y \leftrightarrow x - z = y - z$
22. Teorema 3-11: $x(y - z) = xy - xz$
23. $xy - xz = {}^-x(z - y)$
24. $(x - 3)^2 = (x^2 - 6x) + 9$
25. $(x - 3)(x + 5) = (x^2 + 2x) - 15$

Resolver las ecuaciones de los Ejercicios del 26 al 28. Mostrar los pasos con sus justificaciones. Asumir que $x \cdot x = x^2$.

26. $x(x - 3) = 0$
27. $(x - 2)(x + 3) = 0$
28. $x^2 - 10x = 0$
29. (a) Dar la ecuación que tendría que cumplirse de ser cierto que para toda x, $y \in R$ la resta sea conmutativa.
    (b) Demostrar la proposición o negarla dando un contraejemplo.
30. (a) Si $(x - y) - z = x - (y - z)$ para x, y, $z \in R$, la resta es asociativa. ¿Lo es? Justificar la respuesta.
    (b) ¿Hay tercias para las cuales la proposición es verdadera?
31. Dar la proposición que tendría que ser cierta para que la multiplicación sea distributiva con respecto a la resta.
32. Hallar la más simple representación posible para el inverso aditivo de cada una de las expresiones siguientes.

    (a) ${}^-4$
    (b) 16
    (c) ${}^-(16x - 4)$
    (d) $({}^-2)({}^-x)$
    (e) ${}^-2 - ({}^-x)$
    (f) ${}^-(2 + x)$
    (g) ${}^-[{}^-({}^-5)]$
    (h) $3x + y$
    (i) ${}^-9 + 9$

3-3 DIVISION

Definamos ahora la división de una manera similar a la que usamos para definir la resta, es decir, como un método particular para asociar un par ordenado de números reales (x, y) con un número real q. Investiguemos después si la división es una operación sobre R.

Definición La *división* es el proceso que asocia un número real q con un par ordenado de números reales (x, y) tales que $x \div y = \frac{x}{y} = q \leftrightarrow yq = x$.

Decimos que x dividido entre y, o que x sobre y es igual a q. q se le llama el *cociente*, x el *dividendo* y y el *divisor*. Al símbolo $\frac{x}{y}$ se le nombra *fracción*. x se llama *numerador* y y *denominador* de la fracción.

Ejemplo (a) $10 \div 2 = 5$ ya que $2 \cdot 5 = 10$.
Ejemplo (b) La división asocia el número ${}^-50$ con $(1\,550, {}^-31)$, puesto que ${}^-31 \cdot {}^-50 = 1\,550$.
Ejemplo (c) $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2$ si, y solo si, $\frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$, pero en este momento no sabemos si esto es cierto.

Si el cociente $\frac{x}{y}$ existe en R para todo par (x, y) y es único, la división es una operación sobre R. Sabemos que no es éste el caso, puesto que $\frac{x}{y}$ no está definido si $y = 0$. Sin embargo, ésta es la única excepción, como se muestra en el teorema siguiente.

Teorema 3-12 Teorema de la división

Para cada par de números reales x y y $(y \neq 0)$, $\frac{x}{y}$ es el número real único xy'.

La demostración de este teorema sigue muy de cerca la del teorema similar para la resta y se le deja al estudiante para que la haga en el Ejercicio 16, página 71.

Nuevamente, recordemos el paralelismo entre la resta y la división. Para restar y de x se suma a x el inverso aditivo de y. Para dividir x entre y se multiplica por el inverso multiplicativo de y. La diferencia entre cualesquiera 2 números reales existe; también se puede dividir cualquier número real entre cualquier número real nulo.

Ejemplo (d) $7 \div \frac{1}{2} = 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)'$.

Ejemplo (e) $7 - \frac{1}{2} = 7 + {}^-\left(\frac{1}{2}\right)$.

Ejemplo (f) $\frac{1}{3} \div \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)'$.

Ejemplo (g) $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} + {}^-\left(\frac{1}{4}\right)$.

Ejemplo (h) $\frac{2}{3} \div 0$ es indefinido

Ejemplo (i) $\frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3} + {}^-0 = \frac{2}{3}$.

Ejemplo (j) $\frac{1}{3} \div \frac{3}{4} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)'$.

Obviamente, necesitamos saber algo más acerca de $\left(\frac{1}{2}\right)'$ y $\left(\frac{3}{4}\right)'$. Algunas de nuestras preguntas se pueden responder mediante los siguientes corolarios del teorema de la división, todos de fácil demostración (Ejercicio 17, página 71).

Corolario 3-2 Si $x \neq 0$, entonces $\frac{1}{x} = x'$.

Corolario 3-3 Si $x \neq 0$, entonces $x\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

Corolario 3-4 $\frac{x}{1} = x$.

Corolario 3-5 Si $x \neq 0$, entonces $\frac{x}{x} = 1$.

Corolario 3-6 Si $x \neq 0$, entonces $\left(\frac{1}{x}\right)' = x$.

Corolario 3-7 Si $y \neq 0$, entonces $\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$.

Podemos usar los Corolarios 3-6 y 3-7 para completar los Ejemplos (d) y (f).

$7 \div \frac{1}{2} = 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)'$	Teorema de la división
$= 7 \cdot 2$	Corolario: $\left(\frac{1}{x}\right)' = x$
$= 14$	Propiedad de la multiplicación de números naturales.
$\frac{1}{3} \div \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)'$	Teorema de la división
$= \frac{1}{3} \cdot 4$	Corolario: $\left(\frac{1}{x}\right)' = x$
$= 4 \cdot \frac{1}{3}$	Postulado conmutativo
$= \frac{4}{3}$	Corolario: $\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$

Para simplificar el Ejemplo (j) más aún, demostraremos el teorema siguiente.

Teorema 3-13 El inverso multiplicativo de $\frac{x}{y}$ es $\frac{y}{x}$ o sea $\left(\frac{x}{y}\right)' = \frac{y}{x}$, en donde $x, y \neq 0$.

Demostración: Primero haremos ver que $\frac{x}{y} \neq 0$.

$x \neq 0$	Dado
$\frac{x}{y} = 0 \leftrightarrow y \cdot 0 = x$	Definición de división
$\leftrightarrow x = 0$	Teorema: $x \cdot 0 = 0$ y propiedad de simetría de la igualdad.

Esto contradice la hipótesis de que $x \neq 0$. Luego, $\left(\frac{x}{y}\right) \neq 0$ y, por tanto, debe tener un inverso multiplicativo $\left(\frac{x}{y}\right)'$, tal que $\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \left(\frac{x}{y}\right)' = 1$. Pero esto implica que:

$$\left(x \cdot \frac{1}{y}\right)\left(\frac{x}{y}\right)' = 1 \qquad \text{(¿Por qué?)}$$

Entonces

$$\left(\frac{1}{x} \cdot y\right)\left[\left(x \cdot \frac{1}{y}\right)\left(\frac{x}{y}\right)'\right] = \left(\frac{1}{x} \cdot y\right) \cdot 1 \qquad \text{(¿Por qué?)}$$

y

$$\left[\left(x \cdot \frac{1}{x}\right)\left(y \cdot \frac{1}{y}\right)\right]\left(\frac{x}{y}\right)' = \frac{1}{x} \cdot y \qquad \text{(¿Por qué?)}$$

y

$$\left(\frac{x}{y}\right)' = \frac{y}{x} \qquad \text{(¿Por qué?)}$$

Los ejemplos que siguen necesitan del uso de estos teoremas y corolarios.

Ejemplo (k) $(\sqrt{2})' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Ejemplo (l) $(^-3)' = \dfrac{1}{^-3}$.

Ejemplo (m) $(\sqrt{2}-3)' = \dfrac{1}{\sqrt{2}-3}$.

Ejemplo (n) $\left(\dfrac{2}{3}\right)' = \dfrac{3}{2}$.

Ejemplo (o) $\left(\dfrac{5-7\sqrt{2}}{^-6}\right)' = \dfrac{^-6}{5-7\sqrt{2}}$.

Ejemplo (p) $\dfrac{1}{3}\cdot 8 = \dfrac{8}{3}$.

Ejemplo (q) $2\cdot\dfrac{3}{5} = 2\cdot\left(3\cdot\dfrac{1}{5}\right) = 6\cdot\dfrac{1}{5} = \dfrac{6}{5}$.

Ejemplo (r) $\dfrac{5}{7}\div\dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{7}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)' = \dfrac{5}{7}\cdot\dfrac{3}{2} = \ ?$.

Para demostrar el teorema que vamos a usar al multiplicar fracciones, necesitamos el teorema siguiente:

Teorema 3-14 $\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{xy}$; $x, y \neq 0$.

Demostración: (Las justificaciones las dará el estudiante en el Ejercicio 18, página 71.) Ni x ni y son nulas. Por tanto, $xy \neq 0$ (puesto que $xy = 0 \leftrightarrow x = 0$ o $y = 0$). Luego xy tiene un inverso multiplicativo $(xy)'$ y de ahí que

$(xy)(xy)' = 1$ 1. ____________

$(xy)\left(\dfrac{1}{xy}\right) = 1$ 2. ____________

$\left(\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{y}\right)\left[xy\cdot\left(\dfrac{1}{xy}\right)\right] = \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{y}$ 3. ____________

$\left[\left(x\cdot\dfrac{1}{x}\right)\left(y\cdot\dfrac{1}{y}\right)\right]\cdot\dfrac{1}{xy} = \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{y}$ 4. ____________

$\dfrac{1}{xy} = \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{y}$ 5. ____________

Teorema 3-15 $\dfrac{w}{x}\cdot\dfrac{y}{z} = \dfrac{wy}{xz}$; $x, z \neq 0$.

Demostración: (Las justificaciones las dará el estudiante en el Ejercicio 20, página 71.)

$\dfrac{w}{x}\cdot\dfrac{y}{z} = \left(w\cdot\dfrac{1}{x}\right)\left(y\cdot\dfrac{1}{z}\right)$ 1. ____________

$= (wy)\left(\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{z}\right)$ 2. ____________

$= wy\cdot\left(\dfrac{1}{xz}\right)$ 3. ____________

$= \dfrac{wy}{xz}$ 4. ____________

Teorema 3-16 $\frac{xz}{yz} = \frac{x}{y}$; $y, z \neq 0$.

Demostración: (Las justificaciones las dará el estudiante en el Ejercicio 21, página 71.)

$\frac{xz}{yz} = xz \cdot \left(\frac{1}{yz}\right)$	1. ______
$= xz \cdot \left(\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{z}\right)$	2. ______
$= \left(x \cdot \frac{1}{y}\right)\left(z \cdot \frac{1}{z}\right)$	3. ______
$= \frac{x}{y}$	4. ______

¿Reconoce el lector estos últimos teoremas como reglas que ha estado usando en aritmética y álgebra? El Teorema 3-16 se usa cuando se reduce una fracción a términos más simples o se eleva a términos mayores; los Teoremas 3-14 y 3-15 se usan para multiplicar fracciones. Podemos ahora completar el Ejemplo (j) de la página 66.

$\frac{1}{3} \div \frac{3}{4} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)'$	Teorema de la división
$= \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3}$	Teorema: $\left(\frac{x}{y}\right)' = \frac{y}{x}$
$= \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 3}$	Teorema: $\frac{x}{y} \cdot \frac{z}{w} = \frac{xz}{yw}$
$= \frac{4}{9}$	Postulado de la identidad y propiedades de los números naturales.

Ejemplo (s)

$\frac{17}{34} = \frac{1 \cdot 17}{2 \cdot 17}$	Postulado de la identidad y propiedades de los números naturales
$= \frac{1}{2}$	Teorema: $\frac{xz}{yz} = \frac{x}{y}$

Ejemplo (t)

$\frac{7}{24} \cdot \frac{16}{5} = \frac{7 \cdot 16}{24 \cdot 5}$	(¿Por qué?)
$= \frac{7(2 \cdot 8)}{(3 \cdot 8)5}$	(¿Por qué?)
$= \frac{14 \cdot 8}{15 \cdot 8}$	(¿Por qué?)
$= \frac{14}{15}$	(¿Por qué?)

Ahora también podemos sumar fracciones.

Ejemplo (u)

$\frac{3}{7}+\frac{2}{7}=3\cdot\frac{1}{7}+2\cdot\frac{1}{7}$	Teorema: $\frac{x}{y}=x\cdot\frac{1}{y}$
$=(3+2)\frac{1}{7}$	Teorema distributivo por la derecha
$=\frac{5}{7}$	(¿Por qué?)

Ejemplo (v)

$$\frac{3}{7}+\frac{7}{10}=\frac{3\cdot 10}{7\cdot 10}+\frac{7\cdot 7}{10\cdot 7}$$

$$=\frac{30}{70}+\frac{49}{70}$$

$$=30\cdot\frac{1}{70}+49\cdot\frac{1}{70}$$

$$=(30+49)\frac{1}{70}$$

$$=\frac{79}{70}$$

Sigamos los pasos de los Ejemplos (u) y (v) para demostrar los dos teoremas siguientes (Ejercicios 22 y 23, página 71).

Teorema 3-17 $\frac{x}{z}+\frac{y}{z}=\frac{x+y}{z}$; $z\neq 0$.

Teorema 3-18 $\frac{w}{x}+\frac{y}{z}=\frac{wz+yx}{xz}$; $x, z\neq 0$.

Puesto que la división entre 0 no está definida, debe excluirse del conjunto satisfactor de la variable a cualquier número que haga 0 al divisor, al entrar en lugar de la variable en una proposición que comprenda una división. A partir de este momento hemos de suponer que ése es el caso sin tener que decirlo explícitamente. Por ejemplo, diremos que $\frac{9}{a}+\frac{2}{a}=\frac{11}{a}$ y sabemos que a es cualquier número real excepto 0; o bien que $\frac{9}{a-1}+\frac{2}{a-1}=\frac{11}{a-1}$ y que $a\neq 1$.

Las demostraciones de los siguientes teoremas quedan como ejercicios:

Teorema 3-19 $\frac{-x}{-y}=\frac{x}{y}$ (Ejercicio 46, pág. 72).

Teorema 3-20 $\frac{-x}{y}=\frac{x}{-y}=-\left(\frac{x}{y}\right)$ (Ejercicio 47, pág. 72).

Teorema 3-21 $\frac{x}{y}-\frac{z}{y}=\frac{x-z}{y}$ (Ejercicio 49, pág. 72).

Teorema 3-22 $\frac{x}{y}\div\frac{z}{w}=\frac{x}{y}\cdot\frac{w}{z}$ (Ejercicio 50, pág. 72).

3-3 Ejercicios

1. ¿Es la división una operación sobre los conjuntos siguientes?
   (a) N
   (b) W
   (c) $\{x \mid x = {}^-n,\ n \in N\}$
   (d) $I = W \cup \{x \mid x = {}^-n,\ n \in N\}$
   (e) $\left\{1, 2, \frac{1}{2}\right\}$
   (f) $\{1, {}^-1\}$
   (g) $\{1\}$

En los Ejercicios del 2 al 9, dar una proposición en la que figure la multiplicación y sea equivalente a la proposición dada.

2. $75 \div 5 = 15$
3. $\frac{81}{9} = 9$
4. $\frac{3}{5} \div 3 = \frac{1}{5}$
5. $\frac{2}{3} \div \frac{3}{4} = \frac{8}{9}$
6. $\frac{5}{1} = 5$
7. $500x \div 10x = 50$
8. $\frac{2x + 2y}{2} = x + y$
9. $17a \div 17 = a$

En los Ejercicios del 10 al 13, dar una proposición de la división que sea equivalente a la proposición dada.

10. $(18)(3x) = 54x$
11. $(x + 2)(x + 3) = x^2 + 5x + 6$
12. $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$
13. $7(x + 2) = 7x + 14$

14. Usar la definición de división para encontrar lo siguiente:
    (a) $15 \div {}^-3$
    (b) ${}^-27 \div {}^-3$
    (c) ${}^-100 \div 10$
    (d) $100 \div {}^-5$
    (e) $\frac{{}^-84}{{}^-4}$
    (f) $\frac{{}^-38}{19}$

15. Dar una expresión o numeral para el inverso multiplicativo en cada una de las siguientes expresiones. (*No* se use 3′ como inverso multiplicativo de 3.)
    (a) 72
    (b) ${}^-15$
    (c) $x - 15$
    (d) $\frac{1}{15}$
    (e) $\frac{1}{7x - 5}$
    (f) $\frac{a}{b + 1}$
    (g) $7 \div 2$
    (h) ${}^-3\sqrt{2}$

16. Dar la demostración completa del Teorema 3-12, página 66.
17. Dar la demostración completa de los corolarios siguientes:
    (a) Corolario 3-2
    (b) Corolario 3-3
    (c) Corolario 3-4
    (d) Corolario 3-5
    (e) Corolario 3-6
    (f) Corolario 3-7
18. Dar las justificaciones para cada proposición en la demostración del Teorema 3-14, página 66.
19. Sin usar ningún teorema posterior al 3-14, resolver los siguientes problemas. Mostrar los pasos con la justificación de cada uno.
    (a) $7 \cdot \frac{2}{5}$
    (b) $\frac{7}{8} \cdot \frac{9}{11}$
    (c) $\frac{4}{5} \cdot \frac{10}{11}$
    (d) $\frac{5\sqrt{2}}{3} + \frac{8\sqrt{2}}{3}$
    (e) $\frac{3}{5} + \frac{2}{3}$
    (f) $\frac{5}{7} + \frac{7}{9}$
20. Dar las justificaciones de cada proposición en la demostración del Teorema 3-15, página 68.
21. Dar las justificaciones de cada proposición en la demostración del Teorema 3-16, página 69.
22. Dar una demostración completa del Teorema 3-17. (*Sugerencia*: Referirse al Ejemplo (u), página 70.)
23. Dar una demostración completa del Teorema 3-18. (*Sugerencia*: Referirse al Ejemplo (v), página 70.)

En los Ejercicios del 24 al 36, usar cualquier teorema que se halla enunciado para resolver los problemas. Mostrar los pasos con sus justificaciones.

24. $\frac{7}{8} \cdot \frac{3}{5}$
25. $\frac{4}{9} \cdot \frac{21}{16}$
26. $\frac{8}{9} + \frac{1}{5}$
27. $\frac{17}{19} + 34$
28. $5 + \frac{2}{3}$
29. $\frac{3}{5} + \frac{2}{3}$
30. $\frac{5}{7} + \frac{11}{12}$
31. $\frac{3}{5x} \cdot \frac{2}{3x}$
32. $\frac{7x}{8} \cdot \frac{2y}{3x^2}$

33. $\dfrac{5}{x+y}+\dfrac{3}{x}$

34. $(8x+4)\div 2$

35. $\dfrac{3x}{x+2}+\dfrac{7}{x}$

36. $\dfrac{5x+7}{3x+1}+\dfrac{3x}{3x+1}$

37. (a) Escribir la proposición que debe ser cierta si la división es conmutativa.
(b) Demostrar la proposición si es verdadera o negarla dando un contraejemplo.

38. (a) Escribir la proposición que debe ser cierta si la división es asociativa.
(b) Si la proposición es verdadera, demostrarla. Si no, niéguese con un contraejemplo.

39. (a) ¿Es distributiva la división respecto a la suma?, es decir, ¿$a\div(b+c)=(a\div b)+(a\div c)$?
(b) ¿$(b+c)\div a=(b\div a)+(c\div a)$?

En los Ejercicios del 40 al 45, resolver la ecuación dada. Mostrar los pasos con sus justificaciones.

40. $\dfrac{3}{5}x=\dfrac{2}{7}$

41. $\dfrac{5}{x+1}=\dfrac{2}{11}$

42. $4+\dfrac{x}{2}=3x+\dfrac{1}{2}$

43. $2x-4=7x+11$

44. $\dfrac{4x}{5}+3=\dfrac{7}{10}$

45. $8x-9=3x-3$

46. Demostrar el Teorema 3-19: $\dfrac{^-x}{^-y}=\dfrac{x}{y}$. (*Sugerencia*: Usar el Corolario 3-1.)

47. Demostrar el Teorema 3-20: $\dfrac{^-x}{y}=\dfrac{x}{^-y}={^-\left(\dfrac{x}{y}\right)}$.

48. Usar los Teoremas 3-19 y 3-20 para escribir expresiones equivalentes a cada una de las siguientes:

(a) $\dfrac{^-3}{^-4}$ (e) $^-\left(\dfrac{^-5x}{^-4}\right)$

(b) $\dfrac{7}{^-5}$ (f) $\dfrac{^-a-b}{b-a}$

(c) $^-\left(\dfrac{5}{6}\right)$ (g) $^-\left(\dfrac{3x+y}{3x-y}\right)$

(d) $\dfrac{^-x+y}{^-2}$ (h) $\dfrac{x-y}{x+y}$

49. Demostrar el Teorema 3-21: $\dfrac{x}{y}-\dfrac{z}{y}=\dfrac{x-z}{y}$.

50. Demostrar el Teorema 3-22: $\dfrac{x}{y}\div\dfrac{z}{w}=\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{w}{z}$.

En los Ejercicios del 51 al 56, usar los teoremas de esta sección para efectuar las operaciones indicadas. Mostrar los pasos con sus justificaciones.

51. $\dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{3}$

52. $\dfrac{2}{7}-\dfrac{1}{14}$

53. $\dfrac{7}{8}\div\dfrac{14}{17}$

54. $\dfrac{5}{^-9}\div\dfrac{^-10}{27}$

55. $\dfrac{a}{b}\div b$

56. $\dfrac{a}{2}-\dfrac{b}{3}$

En los Ejercicios del 57 al 67, usar los teoremas para realizar las operaciones indicadas. No se necesita mostrar los pasos ni dar las justificaciones.

57. $\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}$

58. $\dfrac{7a}{2}+\dfrac{3a}{7}$

59. $\dfrac{2a}{3x}\cdot\dfrac{5x^2}{16}$

60. $\dfrac{5xy}{6z}\cdot\dfrac{12z^2}{9y}$

61. $\dfrac{3ab}{4}-\dfrac{b}{8a}$

62. $\dfrac{6x}{y}-\dfrac{3y}{2x}$

63. $\dfrac{15xy}{z}\div 3xy$

64. $\dfrac{x^2-y^2}{y}\div\dfrac{x+y}{y^2}$

65. $\dfrac{a+b}{2}-\dfrac{a-b}{6}$

66. $\dfrac{5a}{a-b}+\dfrac{2}{3}$

67. $\dfrac{x-y}{x+y}\cdot\dfrac{x^2-y^2}{xy}$

En los Ejercicios del 68 al 73, usar un teorema de esta sección para reducir cada una de las fracciones dadas.

68. $\frac{143}{169}$

69. $\frac{323}{380}$

70. $\frac{9xyz}{14xy}$

71. $\frac{3(a+b)^2(x-y)}{6(a+b)(x-y)^2}$

72. $\frac{ax+ay}{bx+by}$

73. $\frac{4x-8y}{12x-24y}$

3-4 LOS POSTULADOS DE ORDEN

Los postulados de la igualdad no nos ayudan a comparar números que no son iguales, tales como 13 y 2 o $2\sqrt{2}$ y 2. En el caso de 13 y 2 sabemos que 2 es la cardinalidad de un conjunto que se puede equiparar con un subconjunto propio de un conjunto de cardinalidad 13 y, por tanto, 2 es menor que 13. Pero esto no nos ayuda a comparar $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{2}$ o $2\sqrt{2}$ y 2. Decimos que una persona con un cuarto de su problema correcto tiene menor cantidad correcta que una persona con la mitad correcta; o que un terreno de media hectárea es mayor que otro de un cuarto de hectárea. Este es el lenguaje que necesitamos formalizar.

Deseamos hacer ver que los números reales se pueden *ordenar*, o en otros términos, que el conjunto R es un campo o *cuerpo ordenado*. Esto significa que dados dos elementos diferentes de R uno debe ser menor que el otro y debemos estar en posibilidad de decidir cuál es el más pequeño.

Como primer paso en el desarrollo de estas nociones debemos suponer que el conjunto de los números reales R tiene un subconjunto propio P, con las propiedades descritas en los postulados siguientes, llamados *postulados de orden*.

Postulado O-1

Postulado O-2 El postulado de tricotomía

Si $x \in R$, entonces una, y solo una, de las proposiciones siguientes es *verdadera*:
$x \in P$, $\quad {}^{-}x \in P \quad$ o $\quad x = 0$

Postulado O-3 El postulado de cerradura para P

Si x, $y \in P$, entonces $x + y \in P$ y $xy \in P$.

De inmediato se puede tener las definiciones siguientes.

Definición Todo elemento de P se llama número real *positivo*.

Definición x es *negativo* $\leftrightarrow$ ${}^{-}x$ es positivo.

Definición Para cada par de números reales x y y, x es *menor que* y (que se denota por $x < y$) si, y solo si, $(y - x) \in P$.

Definición Para cada par de números reales x, y, x es *mayor que* y (que se denota por $x > y$) si, y solo si, $y < x$.

Definición Las siguientes proposiciones se llaman *desigualdades*.

$x < y$ (x es menor que y)
$x > y$ (x es mayor que y)
$x \leq y$ (x es menor o igual que y)
$x \geq y$ (x es mayor o igual que y)

Ahora bien, si nos es dado cualquier número real $x \neq 0$, sabemos por el postulado de tricotomía, que x es positivo o bien ^-x es positivo. Por definición, si ^-x es positivo x es negativo. En otras palabras, el conjunto de los números reales es la unión de 3 conjuntos ajenos: el de los números positivos, el que contiene solo al 0 y el de los números negativos.

$$R = P \cup \{0\} \cup \{x \mid {}^-x \in P\}$$

Demostremos primero que los números positivos son mayores que 0 y que los negativos son menores que 0.

Teorema 3-23 x es positivo $\leftrightarrow x > 0$.

Demostración:

x es positivo	$\leftrightarrow x + 0$ es positiva	Postulado de la identidad
	$\leftrightarrow x + {}^-0$ es positiva	Teorema: $^-0 = 0$
	$\leftrightarrow x - 0$ es positiva	Teorema: $x - y = x + {}^-y$
	$\leftrightarrow 0 < x$	Definición de $<$
	$\leftrightarrow x > 0$	Definición de $>$

Teorema 3-24 x es negativa $\leftrightarrow x < 0$.

Demostración: (Las justificaciones las dará el estudiante en el Ejercicio 13, página 77.)

x es negativo	$\leftrightarrow {}^-x$ es positivo	1. ____________
	$\leftrightarrow 0 + {}^-x$ es positivo	2. ____________
	$\leftrightarrow 0 - x$ es positivo	3. ____________
	$\leftrightarrow x < 0$	4. ____________

Así, pues, todo número no nulo es positivo o bien negativo. De ser positivo es mayor que 0, y si es negativo es menor que 0. Decimos entonces, que cualquier número real se puede ordenar con respecto al cero. El teorema siguiente muestra que dos números cualesquiera no nulos pueden ser ordenados.

Teorema 3-25 El Teorema de tricotomía

Dados cualesquiera dos números reales x y y, una, y solo una, de las proposiciones siguientes es verdadera:

$$x < y, \qquad y < x, \qquad \text{o} \qquad x = y$$

Demostración: Puesto que R es cerrado ante la resta,

$$x, y \in R \rightarrow x - y \in R$$

Luego, por el postulado de tricotomía, una, y solo una, de las expresiones siguientes es verdadera:

$$x - y \in P, \qquad {}^-(x - y) \in P, \qquad \text{o} \qquad x - y = 0$$

Ya que, para $a, b \in R$, $^-(a - b) = {}^-a + b$, tenemos

$$x - y \in P, \qquad {}^-x + y \in P, \qquad \text{o} \qquad x - y = 0$$

Pero, usando el postulado conmutativo de la suma y el teorema de la resta,

$$^-x + y = y + {}^-x = y - x$$

De modo que hemos de tener una, y solo una, de las siguientes proposiciones:

$$x - y \in P, \qquad y - x \in P, \qquad \text{o} \qquad x - y = 0$$

Al resolver la ecuación $x - y = 0$ y aplicando la definición de $<$, podemos ver que una, y solo una, de las proposiciones siguientes ha de ser verdadera:

$y < x, \quad x < y, \quad \text{o} \quad x = y$

Se le pide al estudiante demostrar el siguiente corolario en el Ejercicio 14, página 77.

Corolario 3-8 Para cada $x \in R$ una, y solo una, de las proposiciones siguientes ha de ser verdadera:

$x < 0, \quad x > 0, \quad \text{o} \quad x = 0$

Antes de proseguir, hagamos una pausa para examinar estos teoremas, postulados y definiciones para ver qué tanto nos dicen acerca de un número real o de un par de números reales, excluyendo cuidadosamente cualquier impresión preconcebida de «negativo» y «positivo». Por ejemplo, $25 \in R$. Pero hasta ahora no sabemos si es positivo o negativo. Como $25 \neq 0$, sabemos que tiene que ser una cosa o bien la otra. Si es negativo, será menor que cero y $^{-}25$ será positivo.

Si aplicamos el teorema de tricotomía a los números 11 y 36, concluiremos que $11 < 36$ o $36 < 11$. De la definición de $<$,

$11 < 36 \leftrightarrow 36 - 11$ es positivo
$\leftrightarrow 25$ es positivo

De modo que hasta que sepamos si $25 > 0$ o $25 < 0$, no podremos decir si $11 < 36$ o bien si $36 < 11$. Parece lógico empezar por decidir si 1 es positivo o negativo y si el estudiante da una leída adelante, verá que el primer teorema de la Sección 3-5 afirma que $1 > 0$.

Sin embargo, hay otros teoremas que hemos de necesitar y cuya demostración es fácil en este momento. Demostraremos algunos y pediremos al estudiante que demuestre otros.

Demostraremos primero que el producto de dos números negativos es positivo. Luego, el estudiante puede usar la demostración como guía para su vez demostrar las conocidas leyes referentes al producto de un positivo por un negativo y a la suma de dos números negativos (Ejercicios 15 y 16, página 77).

Proposición El producto de dos números negativos es positivo

Demostración: Sean x, y dos números negativos cualesquiera.

^{-}x es positivo, ^{-}y es positivo	Definición de negativo
$(^{-}x)(^{-}y)$ es positivo	Postulado de cerradura de P
$(^{-}x)(^{-}y) = xy$	Teorema: $(^{-}a)(^{-}b) = ab$
xy es positivo	Propiedad de sustitución de la igualdad

El siguiente grupo de teoremas es importante porque nos proporciona propiedades de las desigualdades similares a las de la igualdad que son muy necesarias para la solución de ecuaciones. En la Sección 3-5 se usarán estos teoremas para resolver desigualdades.

La propiedad de adición es la más fácil de demostrar. Por tanto, aparece dada como un ejercicio para el estudiante.

Teorema 3-26

$x < y \rightarrow x + z < y + z$
$x > y \rightarrow x + z > y + z$
(Ejercicio 17, pág. 77).

Se puede sumar cualquier número a ambos lados de una desigualdad y obtener una desigualdad equivalente. Sin embargo, el resultado de multiplicar ambos lados por un número depende de si el multiplicador es positivo o es negativo. Para multiplicar por un positivo usaremos el

Teorema 3-27

$x < y$ y $z > 0 \rightarrow xz < yz$
$x > y$ y $z > 0 \rightarrow xz > yz$

Demostración:

$x < y \rightarrow y - x \in P$	Definición de $<$
$z > 0 \rightarrow z \in P$	Teorema: $x > 0 \rightarrow x$ es positivo
$(y - x)z \in P$	Postulado de cerradura para P
$yz - xz \in P$	Teorema: $x(y - z) = xy - xz$, Postulado conmutativo
$xz < yz$	Definición de $<$

Esto demuestra la primera proposición del teorema. Podemos ahora demostrar la segunda proposición.

$x > y$ y $z > 0 \leftrightarrow y < x$ y $z > 0$	Definición de $>$
$\rightarrow yz < xz$	Demostrado anteriormente
$\rightarrow xz > yz$	Definición de $>$

Cuando se multiplican por un número negativo, se debe cambiar un «menor que» por un «mayor que», y viceversa.

Teorema 3-28

$x < y$ y $z < 0 \rightarrow xz > yz$
$x > y$ y $z < 0 \rightarrow xz < yz$

Demostración: (Dada como el Ejercicio 18, página 77.)

Veremos también que las relaciones de orden $<$ y $>$, al igual que $=$, son transitivas.

Teorema 3-29 El teorema de transitividad para desigualdades

$x < y$ y $y < z \rightarrow x < z$
$x > y$ y $y > z \rightarrow x > z$

Demostración: (Dada como el Ejercicio 19, página 77. Usar la definición de $<$ y el postulado de cerradura para P.)

Ahora podemos usar estos teoremas para encontrar propiedades más generales de la suma y la multiplicación de desigualdad.

Teorema 3-30

$x < y,\ a < b \rightarrow x + a < y + b$
$x > y,\ a > b \rightarrow x + a > y + b$

Demostración: (Ejercicio 20, página 77.)

Teorema 3-31

$x, y, a, b > 0,\ x < y \text{ y } a < b \rightarrow ax < by$
$x, y, a, b > 0,\ x > y \text{ y } a > b \rightarrow ax > by$

Demostración: (Ejercicio 21, página 77.)

3-4 Ejercicios

1. ¿Qué nos dice el postulado de tricotomía acerca del número real 1?

2. ¿Es $1 = 0$? Justificar la respuesta.

3. ¿Qué nos dice el postulado de tricotomía acerca del número real $^-1$?

4. ¿Qué nos dice el teorema de tricotomía acerca del par dè números 0 y 1?

5. ¿Qué nos dice el teorema de tricotomía acerca del par de números $^-1$ y 1?

6. ¿Podemos concluir a partir de alguno de nuestros postulados, definiciones o teoremas que 1 sea un número positivo?

7. Aplicar la definición de «menor que» a los siguientes hechos *supuestos*. ¿Qué podemos concluir?

(a) $5 < 7$
(b) $^-3 < {}^-2$
(c) $15 - 5 \in P$
(d) $20 - 16 \in P$
(e) $14 - 18 \in P$
(f) $^-3 - (^-2) \in P$

8. Aplicar la definición de «mayor que» a los siguientes hechos *supuestos*. ¿Qué podemos concluir?

(a) $5 > 2$
(b) $^-3 > {}^-7$
(c) $10 > 0$
(d) $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$
(e) $\sqrt{2} > 1$

9. Aplicar la definición de «negativo» a los siguientes hechos *supuestos*. ¿Qué podemos concluir?

(a) $^-5$ es negativo
(b) 4 es negativo
(c) $a + b$ es negativo
(d) $a + b$ es positivo
(e) xy es positivo
(f) xy es negativo
(g) $^-(a + b)$ es negativo
(h) $^-(xy)$ es positivo

10. Aplicar, ya sea el Teorema 3-23 o el 3-24, a cada una de las proposiciones del Ejercicio 9. ¿Cuáles son las conclusiones?

11. Aplicar la definición de $>$ y el Teorema 3-25 a cada una de las proposiciones del Ejercicio 8. ¿Cuáles son las conclusiones?

12. Suponer que cada una de las proposiciones siguientes es verdadera y escribir una conclusión que se pueda derivar de ella. Enunciar el postulado, definición o teorema que se use en cada caso. (La conclusión no es necesariamente cierta. ¿Por qué?)

(a) $^-5 > 0$
(b) $^-2 \in P$
(c) $a \neq b$ y a no es menor que b
(d) $7 - 5 \in P$
(e) $7 < 0$
(f) $^-8 - 6 \in P$
(g) $3 > 1$
(h) 5 no es menor que 3 y $5 \neq 3$
(i) $2 \in P$ y $7 \in P$
(j) $^-4$ es un número negativo
(k) a no es mayor que 0 y a no es menor que 0
(l) $b \neq 0$ y $b \not> 0$

13. Dar las razones de las proposiciones en la demostración del Teorema 3-24, página 74.

14. Demostrar el Corolario 3-8, página 75.

15. *Demostrar*: El producto de un número positivo y un número negativo es negativo. (Véase demostración en la página 75.)

16. *Demostrar*: La suma de dos números negativos es negativa. (Véase demostración de la página 75.)

17. Demostrar el Teorema 3-26:

(a) $x < y \rightarrow x + z < y + z$
(b) $x > y \rightarrow x + z > y + z$

(*Sugerencia*: Usar $y - x \in P$ para demostrar $(y + z) - (x + z) \in P$.)

18. Demostrar el Teorema 3-28:

(a) $x < y$, y $z < 0 \rightarrow xz > yz$
(b) $x > y$, y $z < 0 \rightarrow xz < yz$

(*Sugerencia*: Usar $z < 0 \rightarrow {}^-z > 0$.)

19. Demostrar el Teorema 3-29: El teorema de transitividad de las desigualdades.

(a) $x < y$ y $y < z \rightarrow x < z$
(b) $x > y$ y $y > z \rightarrow x > z$

(*Sugerencia*: Usar la definición de $<$ y el postulado de cerradura de P.)

20. Demostrar el Teorema 3-30:

(a) $x < y, a < b \rightarrow x + a < y + b$
(b) $x > y, a > b \rightarrow x + a > y + b$

21. Demostrar el Teorema 3-31:

(a) $x, y, a, b > 0,\ x < y$ y $a < b \rightarrow ax < by$
(b) $x, y, a, b > 0,\ x > y$ y $a > b \rightarrow ax > by$

Nombrar o enunciar los postulados, definiciones o teoremas que justifiquen cada proposición dada en los Ejercicios del 22 al 32.

22. $3 < 10$ y $10 < 50 \rightarrow 3 < 50$

23. $3, 10, 50 > 0,\ 3 < 10$, y $10 < 50 \rightarrow 30 < 500$

24. $3 < 10$ y $10 < 50 \rightarrow 13 < 60$

25. $5 > x$ y $x > 0 \rightarrow 5x > x^2$

26. $5 > x$ y $^-5 < 0 \to {}^-25 < (^-5)x$

27. $x > y$ y $y = 15 \to x > 15$

28. x es positivo, $y + 3$ es positivo $\to x(y + 3)$ es positivo

29. $a - b \in P, x - y \in P \to (a - b) + (x - y) \in P$

30. $x < y$ y $2 > {}^-x \to y + 2 > 0$

31. $x < y + 2$ y $y < z + 3 \to x < z + 5$

32. $x > 0$ y $y < 0 \to x^2 > xy$

3-5 ORDENAMIENTO DE LOS ENTEROS

Ahora sí estamos listos para avanzar un poco en nuestra búsqueda de un orden en R. Hemos hecho ya algunas suposiciones y definiciones. Hemos demostrado que cualesquiera dos números reales son iguales o bien diferentes y que si son diferentes uno tiene que ser menor que el otro. Sin embargo, aún no estamos en posición de responder a la pregunta: Si $a \neq b$, ¿es $b < a$ o es $a < b$?; es decir, aún no hemos ordenado los reales.

Como primer paso para ordenar los reales debemos ordenar los enteros no negativos y sus inversos aditivos. Sabemos que hay números positivos y negativos, que los números positivos son mayores que cero y que los negativos son menores que cero. Sabemos también que, dado un número y su inverso aditivo, uno de ellos es positivo y el otro es negativo. La pregunta es: ¿cuál es el positivo? Comenzaremos con el número 1, demostrando que:

Teorema 3-32 $1 > 0$

Demostración: $0, 1 \in R$. Por tanto, por el teorema de tricotomía, una, y solo una, de las proposiciones siguientes ha de ser verdadera.

$1 < 0$, $0 < 1$ o $1 = 0$

$1 \neq 0$ (¿Por qué?)

Supóngase que $1 < 0$; entonces 1 es negativo. (¿Por qué?)

Luego, $^-1$ es positivo y $^-1 > 0$ (¿Por qué?)

El Teorema 3-27 afirma que $x < y$ y $z > 0 \to xz < yz$. Por tanto,

$1 < 0$ y $^-1 > 0 \to 1(^-1) < 0(^-1)$

$\to {}^-1 < 0$ (¿Por qué?)

$\to 1 > 0$ (¿Por qué?)

Hemos demostrado que $1 < 0 \to 1 > 0$. Pero esto contradice el teorema de tricotomía; de modo que nuestra suposición ha de ser falsa; es decir, $1 \not< 0$. De ahí que, por el mismo teorema de tricotomía y puesto que $1 \neq 0$ y $1 \not< 0$, debe cumplirse la única alternativa restante. Luego, $0 < 1$, de donde $1 > 0$.

Ahora bien, sabemos que 1 es un número positivo, puesto que

$1 > 0 \to 1 \in P$

Pero

$1 \in P \to 1 + 1 \in P \to 2 \in P$ (¿Por qué?)

y

$1, 2 \in P \to 2 + 1 \in P \to 3 \in P$

y

$1, 3 \in P \to 3 + 1 \in P \to 4 \in P$

Hemos demostrado ya que 1, 2, 3 y 4 son números positivos y al hacerlo desarrollamos un sistema infinito que nos conduce mediante un razonamiento inductivo, a la afirmación del

Teorema 3-33 $x \in N \rightarrow x$ es un número positivo.

Sabemos que el razonamiento inductivo no siempre conduce a conclusiones válidas y que, por tanto, la discusión anterior no constituye una demostración del Teorema 3-33. En el siguiente curso de álgebra, el estudiante aprenderá cómo construir demostraciones usando la inducción matemática. Una demostración tal para este teorema empezaría, como lo hicimos nosotros, por demostrar que la proposición general es verdadera para ciertos valores de la variable; pero la cuestión es, ¿estamos seguros que la proposición es verdadera para $x = 500$ cuando la hemos demostrado solo para $x = 1, 2, 3, 4$? Es evidente que lo será en este caso por el tipo de sistema numérico que hemos desarrollado; sin embargo, no siempre es éste el caso. Lo que necesitamos demostrar deductivamente es que el *siguiente* paso en este sistema *siempre* es posible. Esto se logra en una demostración mediante inducción matemática.

Puesto que muchos de los estudiantes están haciendo sus primeras demostraciones matemáticas en este curso, sentimos que es mejor esperar hasta que hayan ganado confianza en su habilidad para hacer demostraciones deductivas, antes de pasar a entender o a hacer demostraciones por inducción matemática. Ocasionalmente será necesario que enunciemos, temporalmente sin demostración, algún teorema que deseemos que conozca el estudiante. Casi siempre estos teoremas serán generalizaciones de proposiciones previamente demostradas para casos especiales y usualmente el estudiante estará capacitado para ver qué se puede demostrar para cualquier caso. Lo único que se necesita es desarrollar el lenguaje adecuado para hacer tal tipo de demostraciones.

Los números naturales son, en consecuencia, números positivos, lo que significa que si $x \in N$, ^-x debe ser un número negativo. El cero no es positivo ni negativo.

Definición $I = \{x \mid {}^-x \in N\} \cup \{0\} \cup N$ se llama conjunto de los *enteros*. Los números naturales se llaman también *enteros positivos*. Los elementos de $\{x \mid {}^-x \in N\}$ se llaman *enteros negativos*.

Si $x \in N$, ^-x usualmente se escribe $-x$. Así, pues, por ejemplo, escribimos -7 como símbolo del entero negativo que anteriormente solo había sido identificado como $^-7$, inverso aditivo del número natural 7.

Definición $\{0\} \cup N = \{x \in I \mid x \geq 0\}$ se llama conjunto de los *enteros no negativos*. $\{x \mid {}^-x \in N\} \cup \{0\} = \{x \in I \mid x \leq 0\}$ se llama conjunto de los *enteros no positivos*.

Ya que

$x < y \rightarrow x + z < y + z$

se sigue que

$$\begin{aligned} 0 < 1 &\rightarrow 0 + 1 < 1 + 1 \rightarrow 1 < 2 \\ &\rightarrow 1 + 1 < 2 + 1 \rightarrow 2 < 3 \\ &\rightarrow 2 + 1 < 3 + 1 \rightarrow 3 < 4, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Así,

$0 < 1, 1 < 2, 2 < 3, 3 < 4$, etc.

lo que podemos escribir

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 \cdots \qquad (1)$$

Los enteros negativos son menores que cero. En particular, $^-1 < 0$. De donde

$^-1 < 0 \rightarrow {}^-1 + {}^-1 < 0 + {}^-1 \rightarrow {}^-2 < {}^-1$

$^-2 < {}^-1 \rightarrow {}^-2 + {}^-1 < {}^-1 + {}^-1 \rightarrow {}^-3 < {}^-2$

$^-3 < {}^-2 \rightarrow {}^-3 + {}^-1 < {}^-2 + {}^-1 \rightarrow {}^-4 < {}^-3$, etc.

Por tanto,

$\cdots {}^-4 < {}^-3 < {}^-2 < {}^-1 < 0$

o

$$\cdots -4 < -3 < -2 < -1 < 0 \quad (2)$$

Combinando las proposiciones (1) y (2), tenemos

$\cdots -4 < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < 4 \cdots$

Y así los enteros quedan ordenados.

Además de bajar el signo negativo para representar los números negativos, de ahora en adelante, seguiremos la práctica acostumbrada de escribir $-x$, en lugar de ^-x, para representar al inverso aditivo de $x \in R$.

3-6 PROPIEDADES DE LOS ENTEROS

El conjunto de los enteros es un subconjunto del de los números reales. La suma y la multiplicación están definidas en él. Los postulados asociativo, conmutativo y distributivo son válidos. Los elementos idénticos 0 y 1 son enteros y cada entero tiene un inverso aditivo que es un entero. La resta, entonces, queda definida para los enteros. Si cada entero tuviese un inverso multiplicativo en I, la división también sería una operación sobre I. Sin embargo, como ya sabemos, no es ése el caso: $3' = \frac{1}{3}$ y $\frac{1}{3} \notin I$. Todo esto nos lleva a la conclusión siguiente: El conjunto de los enteros *no* es un campo o *cuerpo*. Es *ordenado*, pero no es un cuerpo.

3-7 LOS NUMEROS RACIONALES

Un subconjunto de R que *sí* es un cuerpo es el de los números racionales Q.

Definición Un *número racional* es un número real que se puede expresar como $\frac{a}{b}$, en donde a y b son enteros y $b \neq 0$.

Según eso, los enteros son números racionales, ya que $a \in I \rightarrow a = \frac{a}{1}$. En realidad, cada entero se puede representar en la forma $\frac{a}{b}$. Por ejemplo,

$$5 = \frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \frac{25}{5}, \text{ etc.}$$

Del mismo modo, *cualquier* número racional puede escribirse como al cociente de muchos pares de enteros:

$$\frac{3}{7} = \frac{6}{14} = \frac{27}{63}, \text{ etc.}$$

Esto trae como consecuencia una cuestión. Dados dos números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, ¿bajo qué condiciones representan ambos el mismo número? La respuesta aparece

dada en el siguiente teorema. Nótese que estamos demostrándolo para toda a, b, c, $d \in R$ (b, $d \neq 0$), ya que por ser $I \subseteq R$, el teorema sigue siendo válido si a, b, c, $d \in I$.

Teorema 3-34 Si a, b, c, $d \in R$ y b, $d \neq 0$, entonces $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow ad = bc$.

Demostración: Demostraremos primero que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow ad = bc$.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	Dado
$bd\left(\frac{a}{b}\right) = bd\left(\frac{c}{d}\right)$	Propiedad multiplicativa de igualdad
$ad = bc$	Postulados conmutativo y asociativo y Definición de división: $y \cdot \frac{x}{y} = x$

Demostraremos ahora la inversa: $ad = bc \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

$ad = bc, b, d \neq 0$	Dado
$b, d \neq 0 \rightarrow \frac{1}{b}, \frac{1}{d} \in R$	Postulado del inverso multiplicativo y Corolario: $\frac{1}{x} = x'$
$\left(\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{d}\right)(ad) = \left(\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{d}\right)(bc)$	Propiedad multiplicativa de la igualdad
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	(¿Por qué?)

Luego, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow ad = bc$.

Así, pues, ahora *podemos* decir si dos números racionales son *iguales*. Por ejemplo,

$\frac{13}{-17} = \frac{-143}{187}$ ya que $13 \times 187 = 2431$ y $(-17)(-143) = 2431$

$\frac{-3x}{-y} = \frac{6xy}{2y^2}$ ya que $-3x(2y^2) = (-y)(6xy)$.

En el segundo ejemplo hemos hecho ver que las dos expresiones representan el mismo número real; si es racional o no, depende de x y de y.

La siguiente pregunta es: ¿Cómo podemos saber si un número racional es menor que otro? Un problema fundamental ahora es cómo determinar si $\frac{a}{b}$ es positivo, negativo o cero.

Teorema 3-35 Si a, $b \in R$, $b \neq 0$, entonces $\frac{a}{b} = 0 \leftrightarrow a = 0$.

Demostración:

$\frac{a}{b} = 0 \leftrightarrow b \cdot 0 = a$ Definición de división

$\leftrightarrow \quad 0 = a$ Teorema: $x \cdot 0 = 0$

$\leftrightarrow \quad a = 0$ Propiedad de simetría de la igualdad

Nótese que también aquí hemos demostrado un teorema para todos los números reales, aunque por el momento, solo necesitamos saber cuándo $\frac{a}{b} = 0$, si $a, b \in I$.

Antes de pasar a demostrar el siguiente teorema, que da las condiciones bajo las cuales un número es menor que otro, hemos de restringirnos a fracciones con denominadores positivos. Esto lo podemos hacer, ya que cada número real se puede representar de forma $\frac{a}{b}$, en donde $a, b \in R, b \neq 0$. Si $b \notin P$, $-b \in P$, y $\frac{-a}{-b}$ será la forma equivalente deseada.

Teorema 3-36 Si $a, b, c, d \in R$ y $b > 0$, $d > 0$, entonces $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \leftrightarrow ad < bc$.

Demostración: (El estudiante dará las justificaciones: Ejercicio 4, página 86.)

Demostraremos primero que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \rightarrow ad < bc$.

$b > 0, d > 0$ 1. ______________

$bd > 0$ 2. ______________

$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ 3. ______________

$bd\left(\frac{a}{b}\right) < bd\left(\frac{c}{d}\right)$ 4. ______________

$ad < bc$ 5. ______________

Ahora deseamos demostrar que $ad < bc \rightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Según el teorema de tricotomía, una, y solo una, de las afirmaciones siguientes debe ser verdadera:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $\quad \frac{c}{d} < \frac{a}{b}$, $\quad$ o $\quad \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

Supongamos que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Entonces $ad = bc$ $\left(\text{teorema: } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow ad = bc\right)$ lo cual contradice la hipótesis de que $ad < bc$.

Si $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$, entonces $bc < ad$ (la primera parte de este teorema y postulado conmutativo). Esto también es una contradicción.

Del hecho de que $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$ y $\frac{c}{d} \not< \frac{a}{b}$, se sigue que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.

Podemos escribir cada número racional en la forma $\frac{a}{b}$, en donde $a, b \in I$ y $b > 0$.

Por tanto, podemos comparar cualesquiera dos números racionales. A continuación se dan algunos ejemplos.

Ejemplo (a) Comparar $\frac{4}{15}$ y $\frac{1}{3}$.

$4(3) < 1(15)$. De ahí que $\frac{4}{15} < \frac{1}{3}$.

Ejemplo (b) Comparar $\frac{-3}{5}$ y $\frac{4}{-7}$.

Comparamos $\frac{-3}{5}$ y $\frac{-4}{7}$, y vemos que $-21 < -20$. Luego $\frac{-3}{5} < \frac{4}{-7}$.

Ejemplo (c) Demostrar que $\frac{3}{5} > 0$ y $\frac{-3}{5} < 0$.

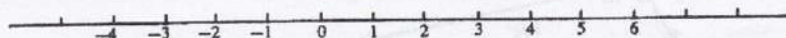
Comparemos primero $\frac{0}{1}$ y $\frac{3}{5}$: $0 \cdot 5 < 1 \cdot 3$. Por tanto, $0 < \frac{3}{5}$ y $\frac{3}{5} > 0$.

Si comparamos $\frac{0}{1}$ y $\frac{-3}{5}$, notamos que $0 \cdot 5 > 1(-3)$, de modo que $\frac{-3}{5} < 0$.

Luego, dados dos números racionales distintos, sabemos que uno tiene que ser menor que el otro. En otras palabras, el conjunto de los números racionales es *ordenado*.

3-8 LA REPRESENTACION GEOMETRICA DE LOS NUMEROS REALES

Para visualizar mejor algunas de las relaciones que existen en los números reales podemos representarlos como puntos de una recta. Es costumbre hacer esto del modo siguiente. Escojamos cualesquiera dos puntos de la recta. Representemos mediante el punto de la izquierda el número 0 y mediante el de la derecha el 1. La distancia entre ambos puntos es la *longitud unitaria*. Repetimos la longitud unitaria a la derecha del punto 1 y a la izquierda del punto 0, como se muestra en la figura. Mediante cada uno de estos puntos representemos un entero, de manera



que el primer punto a la derecha del 0 represente al 1, el segundo al 2, etc. Un entero positivo n, según eso, corresponde a un punto a n unidades a la derecha de 0. Un entero negativo $-n$ corresponderá a un punto a n unidades a la izquierda de 0. A tal figura se le llama *recta numérica*. Al punto que representa al 0 se le llama *origen*. Si un punto P representa a un número n, a P se le llama *gráfica* de n y n se dice que es la *coordenada* de P. Podemos denotar al punto cuya coordenada es n por $P(n)$, que se lee «el punto P de n».

La recta numérica ilustra gráficamente el orden de los números, de modo muy natural. Si x y y son dos enteros y si $x < y$, entonces el punto $P(x)$ queda a la izquierda del punto $P(y)$.

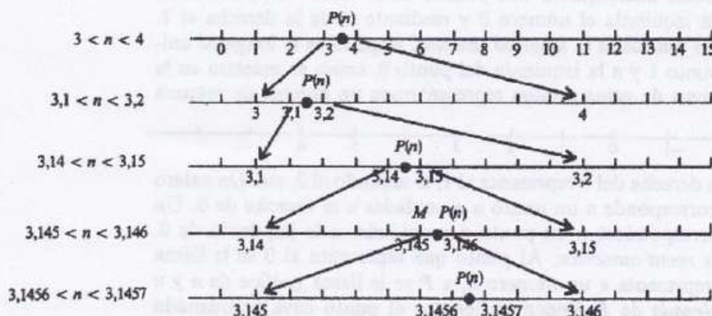
Si suponemos que un segmento de recta se puede dividir en cualquier número de partes iguales, es fácil ver que cada número racional, que no sea un entero, corresponde también exactamente a un punto de la recta numérica. Por ejemplo, $P\left(\frac{1}{2}\right)$ será un punto en medio de $P(0)$ y $P(1)$; $P\left(\frac{8}{7}\right)$ es un punto a $\frac{1}{7}$ de la distancia entre $P(1)$ y $P(2)$.

Al usar la forma decimal de un número racional, podemos localizar el punto de la línea que corresponde al número, en forma tan precisa como deseemos, procediendo de la siguiente manera. La forma decimal de $\frac{8}{7}$ es el decimal periódico $1,\overline{142857}$ (el grupo de dígitos que forma el periodo queda bajo la línea; así, $1,\overline{142857} = 1,142857142857\ldots$). El primer dígito del número nos dice que el punto $P\left(\frac{8}{7}\right)$ queda entre $P(1)$ y $P(2)$, el segundo dígito indica que $P\left(\frac{8}{7}\right)$ queda entre $P(1,1)$ y $P(1,2)$, el tercero, que está entre $P(1,14)$ y $P(1,15)$, etc.

Cada número real se puede escribir en forma decimal; un número racional como un decimal periódico y un irracional como un decimal no periódico. Sean 3,14562 los primeros seis dígitos de un número tal, n. Puesto que el primer dígito es 3, sabemos que

$3 < n < 4$	y puesto que el siguiente dígito es 1
$3,1 < n < 3,2$	y puesto que el siguiente es 4
$3,14 < n < 3,15$	y puesto que el siguiente es 5
$3,145 < n < 3,146$	etc.
$3,1456 < n < 3,1457$	

Este conjunto de desigualdades nos proporciona un método para refinar la localización de $P(n)$ en la recta numérica, método que ilustramos gráficamente en la figura (nótese que la longitud unitaria en la segunda línea es 10 veces la de la primera y así sucesivamente). Si el número es racional, su representación decimal puede tener un 0 como dígito repetido; por ejemplo, $\frac{7}{2} = 3,5000\ldots$ En este caso el punto será uno de los puntos de división en alguna etapa de nuestro refinamiento. En la figura de abajo, en la cuarta línea, M corresponde al número 3,145.



Si el número es de cualquier otro tipo de decimales periódicas o es de decimales no periódicas, el ejemplo muestra un proceso que reduce, con cada paso sucesivo, la longitud del segmento de línea en el que debe quedar el punto que representa al número. Según esto, resulta razonable suponer que *cada número real corresponde exactamente a un punto de la recta numérica.*

Por otra parte, puesto que cada punto de la línea queda a *alguna* distancia del origen, *cada punto debe corresponder a un número real único*. Es, a causa de esto, por lo que se dice que el conjunto de números reales es *completo*. Ahora podemos decir que: *R es un campo o cuerpo ordenado completo.*

3-9 VALOR ABSOLUTO

Para cada número real x, hay un número $-x$. Si x es positivo, $-x$ es negativo, pero si x es negativo, entonces $-x$ es positivo. Estos dos números representan puntos sobre la recta numérica, a saber: el positivo representa un punto a la derecha del origen y a cierta distancia y el negativo representa a otro a la misma distancia, pero a la izquierda. Ahora bien, la distancia ¿es x unidades o es $-x$ unidades? Si queremos que la distancia sea positiva (como normalmente sucede), debemos decir que es x o es $-x$, dependiendo de cuál sea la positiva, lo cual no deja de ser una afirmación extremadamente confusa. Así, pues, establezcamos una terminología para simplificar la proposición y esperemos que sirva también para hacer preciso el lenguaje y ayudar a aclarar la situación confusa.

Definición El *valor absoluto* de cualquier número real x (que se denota por $|x|$) es x, si x es positiva, es $-x$ si x es negativa y es 0 si x es cero. En forma simbólica escribimos

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Ejemplo (a) $|7| = 7.$

Ejemplo (b) $|-7| = 7.$

Ejemplo (c) Si $x = -\sqrt{2}$, $|x| = \sqrt{2}$.

Ejemplo (d) Si $x = \sqrt{2}$, $|x| = \sqrt{2}$.

Ejemplo (e) ¿Cuánto vale $|n|$? Es n si $n > 0$, pero es $-n$ si $n < 0$. (Mostrarlo usando primero $n = 5$ y después $n = -5$.)

Ejemplo (f) ¿Cuánto vale $|n-1|$? Es $(n-1)$ si $(n-1) \geq 0$. Es $-(n-1)$ si $(n-1) < 0$. (Mostrarlo usando $n = 4$ de modo que $n - 1 \geq 0$ y después usando $n = 0$, de modo que $n - 1 < 0$.)

Resolver para n cada una de las ecuaciones siguientes.

Ejemplo (g) $|n| = 5 \leftrightarrow n = 5$ o $n = -5$.

Ejemplo (h) $|n+1| = 7 \leftrightarrow n + 1 = 7$ o $n + 1 = -7$. Por tanto, $n = 6$ o $n = -8$.

Ejemplo (i)

$$\left|2n - \frac{3}{5}\right| = \frac{2}{3} \leftrightarrow 2n - \frac{3}{5} = \frac{2}{3} \quad \text{o} \quad 2n - \frac{3}{5} = -\frac{2}{3}$$

$$\leftrightarrow 30n - 9 = 10 \quad \text{o} \quad 30n - 9 = -10$$

$$\leftrightarrow 30n = 19 \quad \text{o} \quad 30n = -1$$

$$\leftrightarrow n = \frac{19}{30} \quad \text{o} \quad n = -\frac{1}{30}$$

3-10 DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS DE LA RECTA NUMERICA

Si $P(n)$ es un punto de la recta numérica, entonces $|n|$ es la distancia desde el origen hasta $P(n)$. Dados cualesquiera dos puntos de la recta numérica, $P(a)$ y $P(b)$, la distancia entre ambos es $a - b$ si $a > b$ y es $b - a$ si $b > a$; resumiendo, podemos decir que la distancia es $|a - b|$. Podemos usar esto para ayudarnos a visualizar los conjuntos solución de ecuaciones o desigualdades que contengan valores absolutos.

Ejemplo (*a*) Hallar el conjunto solución* de $|x| = 5$.

Solución: Como $|x| = |x - 0|$, $|x| = 5 \rightarrow |x - 0| = 5$. Esto se puede interpretar del modo siguiente: Hallar los puntos $P(x)$ tales que la distancia desde $P(x)$ hasta el origen sea 5. Obviamente hay dos: $P(5)$ y $P(-5)$. El conjunto solución es, entonces, $\{5, -5\}$.

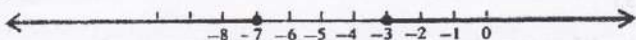
Ejemplo (*b*) Graficar $\{x \mid |x| < 5\}$ en la recta numérica.

Solución: $|x| < 5 \rightarrow |x - 0| < 5$. Si la distancia entre $P(x)$ y $P(0)$ es menor que 5, $P(x)$ puede ser cualquier punto a la izquierda de $P(5)$ y a la derecha $P(-5)$ como se muestra mediante la línea reteñida sobre la recta numérica de la figura. Colocamos círculos alrededor de $P(-5)$ y $P(5)$ para indicar que dichos puntos no están incluidos en la gráfica.



Ejemplo (*c*) Graficar el conjunto solución de $|x + 5| \geq 2$.

Solución: Para interpretar $|x + 5|$ como la distancia entre dos puntos, escribimos $|x + 5| = |x - (-5)|$. Así, pues, el conjunto solución de $|x - (-5)| \geq 2$ debe contener a todos los números reales x tales que la distancia entre $P(-5)$ y $P(x)$ sea mayor o igual a 2. $P(x)$, por tanto, puede ser $P(-3)$, $P(-7)$ o cualquier punto a la derecha de $P(-3)$ o a la izquierda de $P(-7)$. El conjunto solución es $\{x \mid x \geq -3 \text{ o } x \leq -7\}$ y la gráfica es la que muestra la figura. Usamos puntos remarcados para indicar que -3 y -7 están incluidos en el conjunto solución y puntas de flecha para indicar la inclusión de todos los números a la derecha o a la izquierda de un punto.



3-5 Ejercicios

1. Ordenar los siguientes números reales usando la relación $<$: 5,2, −2,98, $-\frac{9}{4}$, $\sqrt{26}$, $5\frac{1}{4}$, $\frac{-7}{2}$, $\frac{^{-}8}{-5}$, $^{-}\left(\frac{7}{6}\right)$.

2. Ordenar los números reales siguientes mediante la relación $>$: 1, 1,2, 1,234567, 1,23457, 1,23, 1,234, 1,23456, 1,2345, 1,2345678.

3. Marcar cada uno de los siguientes números como *positivo* o *negativo*, según corresponda.

   (a) $-\frac{5}{7}$ (b) $-\frac{-2}{3}$ (c) $7-(-2)$ (d) $\frac{17}{-5}$

   (e) $\frac{-2}{x}$, $-x \in P$ (f) $\frac{-3}{-y}$, $-y \in P$ (g) $-x$, $x \in P$ (h) $\pi - 3{,}14$

4. Dar las justificaciones de las proposiciones de la demostración del Teorema 3-36, página 82.

5. Sustituir la coma entre cada uno de los siguientes pares de números por el símbolo apropiado: $<$, $=$ o $>$.

   (a) $\frac{5}{7}, \frac{3}{5}$ (b) $\frac{-5}{7}, \frac{-3}{-5}$ (c) $\frac{-7}{2}, -\frac{9}{4}$ (d) $\frac{-7}{-5}, 0$

* Alguno autores emplean la expresión *conjunto solución* en el mismo sentido que el de *conjunto verdad*. *N. del T.*

(e) $\frac{-5}{3}, 0$

(f) $\frac{8096}{325}, \frac{7491}{285}$

(g) 1,502, 1,5002

(h) $-2{,}003, -2{,}030$

(i) $|-5|, |3|$

(j) $-\frac{1}{3}, {}^{-}\left(\frac{1}{4}\right)$

6. Ordenar cada uno de los siguientes conjuntos de números mediante la relación $<$.

(a) $\{\sqrt{3}, 1, 2\}$
(b) $\{\sqrt{3}, 1{,}7, 1{,}6\}$
(c) $\{\sqrt{3}, 1{,}73, 1{,}74\}$
(d) $\{\sqrt{3}, 1{,}732, 1{,}733\}$
(e) $\{1, 0, 0{,}1, 0{,}1234, 0{,}123, 0{,}12345, 0{,}123456, 0{,}12, 0{,}1234567, 0{,}1234567\ldots\}$
(f) $\{1, 0, 0{,}9, 0{,}99, 0{,}9999, 0{,}99999, 0{,}999, 0{,}99999\ldots\}$

7. Dar el numeral más simple para cada uno de los números reales siguientes

(a) $|15|$
(b) $|-15|$
(c) $-|15|$
(d) $-|-15|$
(e) $\left|-\frac{1}{2}\right|$
(f) $|x|$, en donde $x = -4$
(g) $|x|$, en donde $x = 0$
(h) $|x - 1|$, en donde $x = -2$
(i) $|-x + 1|$, en donde $x = -2$
(j) $|-x|$, en donde $x = 3$

8. Hallar el inverso aditivo de cada uno de los siguientes números reales y simplificar. Usar la notación $-x$ en lugar de ${}^{-}x$.

(a) -5
(b) $-\frac{x}{y}$
(c) $-(x-1)$
(d) $\frac{x-4}{x+4}$
(e) $5'$
(f) $\frac{1}{5}$
(g) $\frac{-1}{5}$
(h) $\frac{-x-y}{x+y}$

9. Hallar el inverso multiplicativo de cada uno de los números reales dados en el Ejercicio 8.

En los Ejercicios del 10 al 18, suponer que $a, b \in R$. Sean A y B puntos de una recta numérica con coordenadas a y b, respectivamente. Expresar en palabras la interpretación geométrica de cada expresión.

10. $a < -5$
11. $-4 < a < 7$
12. $|a| < 5$
13. $|a| = 5$
14. $|a| > 5$
15. $1{,}41 < a < 1{,}42$
16. $a < 0$
17. $|a - 2| = 4$
18. $|b + 4| = 2$

En los Ejercicios del 19 al 26, usar la interpretación geométrica de cada una de las expresiones para encontrar su conjunto solución y graficarlo.

19. $|x| = 4$
20. $|x| < 4$
21. $|x| > 5$
22. $|x - 1| = 3$
23. $|x - 1| < 3$
24. $|x - 1| > 3$
25. $|x + 4| > 1$
26. $|x + 4| < 1$

27. De los Ejemplos (a), (b) y (c), de la página 86, vemos que si E es cualquier número o expresión algebraica que represente a un número y C es cualquier número real positivo específico.

$$|E| = C \leftrightarrow E = C \quad \text{o} \quad E = -C$$
$$|E| < C \leftrightarrow -C < E < C$$
$$|E| > C \leftrightarrow E > C \quad \text{o} \quad E < -C$$

Según eso, podemos remplazar cada una de las expresiones que contengan un valor absoluto por una expresión equivalente cuyo conjunto solución podamos determinar. Por ejemplo,

(1) $|x + 5| = 2 \leftrightarrow x + 5 = 2 \text{ o } x + 5 = -2 \leftrightarrow x = -3 \text{ o } x = -7$

Así, pues, el conjunto solución es $\{-3, -7\}$.

(2) $|x + 5| > 2 \leftrightarrow x + 5 > 2 \text{ o } x + 5 < -2 \leftrightarrow x > -3 \text{ o } x < -7$

El conjunto solución es $\{x \mid x > -3 \text{ o } x < -7\}$.

(3) $|x + 5| < 2 \leftrightarrow -2 < x + 5 < 2 \leftrightarrow -7 < x < -3$

El conjunto solución es $\{x \mid -7 < x < -3\}$.

Usar este acercamiento algebraico para encontrar los conjuntos solución de cada una de las proposiciones siguientes. .

(a) $|x + 10| = 5$
(b) $|x + 10| > 5$
(c) $|x + 10| < 5$
(d) $|3x - 2| = 8$
(e) $|5x - 1| \geq 19$
(f) $|x + 5| \leq 2$

En los Ejercicios del 28 al 36, graficar cada uno de los conjuntos dados sobre la recta numérica. $x \in R$ a menos que se especifique algo distinto.

28. $\{x \mid x \in I \ \text{ y } \ -4 < x < 6\}$
29. $\{x \mid -4 < x < 6\}$
30. $\left\{x \mid x > \frac{5}{3}\right\}$
31. $\left\{x \mid x \in I \ \text{ y } \ -\frac{7}{2} < x < \frac{9}{4}\right\}$
32. $\left\{x \mid x < -\frac{1}{2}\right\}$
33. $\{x \mid x > 2 \ \text{ y } \ x < 6\}$
34. $\{x \mid x < 2 \ \text{ y } \ x < 6\}$
35. $\{x \mid x < 2 \ \text{ o } \ x < 6\}$
36. $\{x \mid x > 2 \ \text{ o } \ x < 6\}$

En los Ejercicios del 37 al 41 usar los postulados de orden, definiciones y teoremas necesarios para resolver la desigualdad dada. Mostrar cada paso y dar las justificaciones cada vez que sean usadas. Por ejemplo,

Resolver: $2x < 4x + 5$

$$2x < 4x + 5$$
$$2x + (-4x) < (4x + 5) + (-4x)$$
Teorema: $x < y \rightarrow x + z < y + z$
$$-2x < 5$$
$$(-2x)(-\tfrac{1}{2}) > 5(-\tfrac{1}{2})$$
Teorema: $x < y,\ z < 0 \rightarrow xz > yz$
$$x > -\tfrac{5}{2}$$

37. $2x + 1 < 7$
38. $-2x > 5$
39. $-4x < -7$
40. $\frac{x}{2} < -5x + \frac{2}{3}$
41. $2x + 5 < 4x - 7$

En los Ejercicios del 42 al 55, resolver la desigualdad dada y graficar su solución sobre una recta numérica. No es necesario dar las justificaciones de los pasos en la solución.

42. $3x - 2 > 4$
43. $4x < 2x - 3$
44. $3x + 5 < 7x + 4$
45. $2x + 5 < x + 7$
46. $-3x > 6$
47. $-\frac{x}{7} < -2$
48. $|a| < 3$
49. $|x - 7| < 8$
50. $2x - \frac{1}{2} > 3x + \frac{2}{3}$
51. $\frac{7x}{3} + \frac{5}{4} > -\frac{5}{6} + 3x$
52. $|a + 2| < 4$
53. $|a + 2| > 4$
54. $\frac{3x + 7}{-3} < 1$
55. $1 > \frac{3x + 7}{3}$

En los Ejercicios del 56 al 63, resolver cada una de las ecuaciones dadas. *No* es necesario mostrar todos los pasos ni dar las justificaciones.

56. $\frac{7x}{5} = \frac{-2}{3}$
57. $\frac{3x + 2}{4} = \frac{5x}{7}$
58. $|a + 2| = 8$
59. $|x| = -5$
60. $7x + 3(x - 5) = 4(x + 2)$
61. $(5x + 2)(x - 3) = 0$
62. $3x(x + 2) = x(3x - 4) + 7$
63. $5x^2 + 15x = 0$

En los Ejercicios del 64 al 79, efectuar toda operación indicada y simplificar. *No* es necesario mostrar los pasos ni dar las justificaciones.

64. $15 - \left(-\frac{3}{4}\right)$
65. $^{-}\left(\frac{7}{5}\right) - \frac{-1}{5}$
66. $\frac{3x}{x - 5} + {}^{-}\left(\frac{2x + 1}{x - 5}\right)$
67. $\frac{5x - 1}{x + 2} \cdot \frac{2x + 4}{5x^2 - x}$
68. $(3x - 5)(x - 2)$
69. $(4x + 1)(5x - 2)$
70. $(3x + 7y) - (8x + 2y)$
71. $(14a - 3b) - (-4b)$
72. $4[x - 2(y - 3)]$
73. $7 - [x - 4(3 - 7)] + x$
74. $\left(-\frac{5}{9}\right) \div \left(-\frac{7}{8}\right)$

75. $\dfrac{72xyz}{60xz}$

76. $\dfrac{14x^2+2x}{7x+1}$

77. $\dfrac{1}{x-y}-\dfrac{2}{y-x}$

78. $\dfrac{3a+b}{3a-b}+\dfrac{2b}{b-3a}$

79. $\dfrac{7xy}{4zy}\cdot\dfrac{18z}{35yw}$

3-11 TEOREMAS IMPORTANTES DEL CAPITULO 3 PARA REFERENCIA POSTERIOR

Teoremas acerca de los inversos aditivos y de la resta:

Teorema 3-1 $(-x)y = -(xy)$

Teorema 3-2 $(-x)(-y) = xy$

Teorema 3-3 $-(x+y) = -x+(-y)$

Teorema 3-4 $x-y = x+(-y)$

Teoremas acerca de las fracciones (los denominadores no deben ser cero);

Corolario 3-7 $\dfrac{x}{y} = x\cdot\dfrac{1}{y}$

Teorema 3-15 $\dfrac{w}{x}\cdot\dfrac{y}{z} = \dfrac{wy}{xz}$

Teorema 3-16 $\dfrac{xz}{yz} = \dfrac{x}{y}$

Teorema 3-17 $\dfrac{x}{z}+\dfrac{y}{z} = \dfrac{x+y}{z}$

Teorema 3-18 $\dfrac{w}{x}+\dfrac{y}{z} = \dfrac{wz+yx}{xz}$

Teorema 3-20 $\dfrac{-x}{y} = \dfrac{x}{-y} = -\dfrac{x}{y}$

Teorema 3-22 $\dfrac{x}{y}\div\dfrac{z}{w} = \dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{w}{z}$

Teoremas acerca de las desigualdades

Teorema 3-26 $x < y \rightarrow x + z < y + z$

$x > y \rightarrow x + z > y + z$

Teorema 3-27 Si $z > 4$ $x < y \rightarrow xz < yz$

$x > y \rightarrow xz > yz$

Teorema 3-28 Si $z < 0$ $x < y \rightarrow xz > yz$

$x > y \rightarrow xz < yz$

4 Técnicas y aplicaciones

4-1 USO DEL SISTEMA DE LOS NUMEROS REALES

En el Capítulo 3 nuestro objetivo era *entender* los principios del sistema de los números reales. En este capítulo el énfasis se hará en las *aplicaciones* de aquellos principios.

El conjunto de los números reales es puramente abstracto, es decir, existe solo como idea en la mente del hombre. Al principio esas ideas se desarrollaron como respuesta a la necesidad del hombre de relacionarse con su medio ambiente, para lo cual el conjunto de los números reales era la herramienta para resolver problemas referentes a cantidades físicas.

Lo interesante radica en que fue solo hasta los últimos 200 años que los matemáticos comprendieron que para explotar en forma completa al conjunto de los números reales como una herramienta, era necesario entender su estructura como una idea; por ejemplo, las *propiedades de cuerpo* o *campo* estudiadas en el Capítulo 3, son una parte de dicha estructura. Haber comprendido este hecho condujo a un formidable avance en el desarrollo de la matemática. Por ello resulta de gran ayuda para el estudiante comprender que cada paso de la solución de un problema en álgebra, tiene en el fondo un conjunto de principios fundamentales.

En este capítulo trabajaremos nuevamente con elementos del conjunto de los números reales R y supondremos que R es un cuerpo ordenado completo y, por tanto, que las hipótesis aceptadas y los teoremas demostrados en el Capítulo 3 son válidos. Cada variable usada, tal como x, y, a y b representarán elementos de R, a menos que se especifique otra cosa. Además, admitiremos sin demostración los teoremas siguientes que son extensiones por inducción matemática de los postulados conmutativo, asociativo y distributivo, y que necesitaremos en los capítulos que siguen para tener rapidez de manipulación y cálculo.

Teorema 4-1 Leyes conmutativa y asociativa extendidas
La suma o el producto de cualquier número finito de números reales es independiente de la forma en que se ordenen o se agrupen.

Así, por ejemplo, no importa cómo cambiemos el orden o agrupación de los términos de la expresión $(a + b) + [c + (d + e)] + (f + g)$, sabemos que la suma será siempre la misma. De ahí que generalmente escribiremos $a+b+c+d+e+f+g$ sin símbolos de agrupación y en cualquier orden, tal como $c+g+d+f+a+b+e$.

Teorema 4-2 Ley distributiva extendida

El producto de un número real t y la suma de cualquier número finito de números reales es igual a la suma de los productos de t con cada uno de los sumandos de la suma finita.

Por ejemplo, un producto tal como $t(a + b + c + d + e + f + g)$ se puede escribir inmediatamente en la forma $ta + tb + tc + td + te + tf + tg$, no importa cuantos términos haya en la suma.

El énfasis de este capítulo va a cambiar. Aquí nos concentraremos a desarrollar habilidades basadas en los fundamentos asentados en los capítulos previos, más que en un análisis paso por paso de las ideas.

4-2 TERMINOLOGIA

Comenzaremos por revisar informalmente algo de terminología familiar al lector, tomado de su primer curso de álgebra.

Recordemos que muchas de las expresiones que usamos en álgebra están formadas por combinaciones de numerales, variables y símbolos de operación. Esas son las llamadas *expresiones algebraicas* o simplemente *expresiones*. $4x^2 + 5xy - \sqrt{2}y^2$ es un ejemplo, como también lo es $3xyz + \left(\frac{2xy}{5 - z}\right)^3$ El lector puede pensar en otros ejemplos más complicados.

Las expresiones son la materia prima con que están constituidos los enunciados matemáticos y es importante que al analizarlos tengamos nombres para sus partes. Las partes de una expresión separadas una de otra por un signo + o − se llaman *términos* de la expresión. A menudo, una expresión se llama *polinomio* y en particular *monomio*, *binomio* o *trinomio*, según tenga uno, dos o tres términos. Por ejemplo, $4x^2 + 5xy - \sqrt{2}y^2$ es un trinomio, y $3xyz + \left(\frac{2xy}{5 - z}\right)^3$ es un binomio.

Los términos mismos están formados por números y variables multiplicados entre sí, llamados *factores*. El factor numérico se llama *coeficiente numérico* o simplemente *coeficiente* de los factores. Según eso, el término $5xy$ tiene como factores 5, x y y, y 5 es el coeficiente de xy. El signo del término generalmente se considera que pertenece al coeficiente. Así, pues, el coeficiente de y^2 en el término $-\sqrt{2}y^2$ es $-\sqrt{2}$.

En un sentido más general de la palabra coeficiente, cualquier grupo de factores de un término es coeficiente de los otros. Por ejemplo, al referirnos al término $5xy$ habrá ocasiones en que convenga decir que $5x$ es el coeficiente de y. Similarmente, $5y$ es el coeficiente de x.

Los términos que difieren solo en sus coeficientes numéricos se llaman *términos semejantes*. Por ejemplo, $-5x^2y$ y $\sqrt{2}x^2y$ son términos semejantes; también, $3(x^2 + y)$ y $51(x^2 + y)$ son términos semejantes.

Un término puede estar formado por una fracción; por ejemplo, la expresión

$$\frac{3x - 5}{9x^2 - 4} + x - \frac{8}{3x + 2}$$

tiene tres términos. Ordinariamente, no decimos que una fracción tenga coeficiente.

Recordemos también que x^n, en donde $n \in N$, se llama la *potencia enésima*

de x e indica un producto en el que x aparece como factor n veces. x se llama *base de la potencia* y n *exponente de la potencia*. Así,

$x^1 = x$	(primera potencia de x)
$x^2 = x \cdot x$	(segunda potencia de x o x cuadrada)
$x^3 = x \cdot x \cdot x$	(tercera potencia de x o x cúbica)
$x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$	(cuarta potencia de x o x a la cuarta)
$\vdots$	
$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_{n \text{ factores}}$	(enésima potencia de x o x a la n)

Ejemplo (a) $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$.
Ejemplo (b) $(x + 5)^2 = (x + 5)(x + 5)$.

4-3 OPERACIONES —SUMA Y RESTA— EN EXPRESIONES

Las expresiones se pueden sumar, restar y multiplicar mediante el uso de los postulados, teoremas y definiciones de los Capítulos 2 y 3.

Por ejemplo, para sumar $5x - 8$ y $-7x + 4$ procederemos como sigue:

$(5x-8)+(-7x+4)=[5x+(-8)]+(-7x+4)$	Teorema de la resta
$=5x+\{[(-8)+(-7x)]+4\}$	Postulado asociativo
$=5x+\{[(-7x)+(-8)]+4\}$	Postulado conmutativo
$=[5x+(-7x)]+[(-8)+4]$	Postulado asociativo
$=[5+(-7)]x+[(-8)+4]$	Ley distributiva por la derecha
$=-2x+(-4)$	Propiedades de la suma
$=-2x-4$	Teorema de la resta

Pero nuestra meta es ejecutar operaciones como éstas, rápida y fácilmente. El quinto paso, que dice $(5x - 8) + (-7x + 4) = [5 + (-7)]x + [(-8) + 4]$, indica que la suma se debe realizar *sumando los coeficientes de términos semejantes*.

No demostraremos esto formalmente como un teorema, pero observemos que es simplemente el resultado de reacomodar los términos y coeficientes mediante el uso de los postulados asociativo y conmutativo de la suma y el postulado distributivo.

Ejemplo (a) Sumar $(3x + 7)$ y $(2x^2 - 5x + 6)$.

$$(3x + 7) + (2x^2 - 5x + 6) = [0 + 2]x^2 + [3 + (-5)]x + [7 + 6]$$
$$= 2x^2 - 2x + 13$$

Observemos que hemos interpretado a $3x + 7$ como $0x^2 + 3x + 7$, de modo que el coeficiente de x^2 es 0.

La resta es simplemente como la suma, excepto que *restamos los coeficientes de términos semejantes*.

Ejemplo (b) Restar $2x^2 - 5x + 6$ de $3x + 7$.

$$(3x + 7) - (2x^2 - 5x + 6) = [0 - 2]x^2 + [3 - (-5)]x + (7 - 6)$$
$$= -2x^2 + 8x + 1$$

Tanto en la suma como en la resta con frecuencia usamos otro procedimiento, basado en el teorema de la resta y el teorema $-(x+y) = -x + (-y)$: Eliminamos paréntesis y reunimos términos semejantes. Si los paréntesis están precedidos de un signo menos, cambiamos el signo de cada término incluido en ellos. Si los paréntesis están precedidos de un signo más o no tienen signo, no cambiamos el signo de los términos.

Ejemplo (c)

$$(3x+7)+(2x^2-5x+6) = 3x+7+2x^2-5x+6 = 2x^2-2x+13$$

(los signos de los términos dentro del paréntesis no cambian)

Ejemplo (d)

$$(3x+7)-(2x^2-5x+6) = 3x+7-2x^2+5x-6 = -2x^2+8x+1$$

(se cambian los signos de los términos del sustraendo)

En el caso de paréntesis dentro de paréntesis (o llaves { } o corchetes [ ] o cualquier otro símbolo de agrupación), en general lo más atinado es eliminar los paréntesis interiores primero y después proceder hacia afuera.

Ejemplo (e) Efectuar las operaciones indicadas y presentar los resultados en la forma más simple.

$$8y - \{-7x - [(3y-7x)-(2y-8x)] + 5x\}$$

Solución:

$$\begin{aligned} 8y - \{-7x - [(3y-7x)-(2y-8x)] + 5x\} &= 8y - \{-7x - [3y - 7x - 2y + 8x] + 5x\} \\ &= 8y - \{-7x - [y+x] + 5x\} \\ &= 8y - \{-7x - y - x + 5x\} \\ &= 8y - \{-3x - y\} \\ &= 8y + 3x + y \\ &= 3x + 9y \end{aligned}$$

4-1 Ejercicios

En los Ejercicios del 1 al 18, efectuar las operaciones indicadas y simplificar.

1. $(4-3)^3$
2. $-\left(-\frac{1}{2}\right)^4$
3. $-\left(-\frac{1}{2}\right)^3$
4. -2^6
5. $(-2)^6$
6. $\frac{-4^3}{2^3}$
7. $\frac{3^4-3^2}{3^2}$
8. $\frac{-3^2}{(1-4)^3}$
9. $(0{,}01)^3$
10. $\left(\frac{0{,}01}{0{,}005}\right)^3$
11. $\frac{(3^2)^3}{9^3}$
12. $\frac{27^3}{(3^3)^3}$
13. $\frac{16^4}{2^{16}}$
14. $(\sqrt{2})^2$
15. $(\sqrt{2})^6$
16. $(\sqrt{2})^3$
17. $\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2$
18. $(-\sqrt{2})^3$

19. Considerar la expresión

$$3x^4 + 2xyz - \sqrt{2}x^2y + yz^2$$

(a) ¿Cuántos términos contiene la expresión?
(b) En el término $2xyz$, ¿cuál es el coeficiente de yz?
(c) ¿Cuál es el coeficiente numérico del tercer término de la expresión?
(d) ¿Cuál es el coeficiente de x^3 en el término $3x^4$?
(e) ¿Cuál es el coeficiente numérico del cuarto término?

20. Escribir el coeficiente numérico de cada uno de los términos de las expresiones dadas en los ejercicios que siguen:

(a) $xyz - 2x + 4y$ (c) $\sqrt{2} - wy - x^2$

(b) $-\frac{2}{3} + \frac{4}{5}x - \frac{6}{7}y$ (d) $(3x^2y)(2xy^2)$

En los Ejercicios del 21 al 27, hallar el valor numérico más simple de la expresión dada, si $a = -2$, $b = -1$, $c = 0$, $d = \frac{1}{2}$, $f = 2$.

21. $(a - b)(f - a^2)$
22. $2ab(a - 4d)$
23. $\dfrac{4cf}{b^2 - a^2}$
24. $\dfrac{a^2 - f^2}{2d}$
25. $a[b - 2d(3a - 2f)]$
26. $(-b + f)[2a - (f - 4b)]$
27. $(2a + df) - 3(2a + df) - a(2a + df)$

Efectuar las operaciones indicadas en los Ejercicios del 28 al 46.

28. $(-2x^3 + 7x^2 - x) + (4x^3 - 8x^2 + x - 6)$
29. $(12xy^2 + 3x^2y - 4x^3) + (-10xy^2 - 3x^2y - x^3)$
30. $[(2a - b) + (2a - c)] + (-4a + b + c)$
31. $3x^2 - (4x^2 - 2x)$
32. $(4x^2 - 6xy - y^2) - (-2x^2 + xy - y^2)$
33. $(4a^2 + 4ab - 7b^2) - (a^2 + 7ab - 2b^2)$
34. $(x^4 - x^2 + 1) - (x^4 + 2x^2 + 1) + (3x^4 - 3x^2 - 2)$
35. $4a - [a - (2a + b)]$
36. $(3a - 4b) - [(2a - b) - (3a - b)]$
37. $[(6x + 7) - (-2x + 4)] - (-2x - 8)$
38. $-4x - \{-3y - [(4x - 2y) - (2x + y)]\}$
39. $3x - 4y - \{x - (x + y) - [(-2x + y) - x] - 3y\}$
40. $(2xy + yz - xz) - [(-2xy - yz + xz) - (xy + 2yz - xz)]$
41. $(4x + \sqrt{2}y) + (\sqrt{2}x - y) - (x - 3y)$
[*Sugerencia*: $3x + \sqrt{2}x = (3 + \sqrt{2})x$.]
42. $(2a - \sqrt{2}b) - [(a + \sqrt{2}b) - (\sqrt{2}a - 3b)]$
43. $-5(x + \sqrt{2}y) + 3[2x - (2\sqrt{2}x - y)]$
44. $4 - [2\sqrt{2}x - \sqrt{2}(2x - 3y)] + 7\sqrt{2}y$
45. $(3a - 4b) - \{[a - (2a + b)] - a\}$
46. $\{2 - [3 - (4 + x)]\} + 2(7 - x)$

En los Ejercicios 47 al 50, dar una expresión que sea equivalente a la expresión dada, pero que contenga los últimos tres términos dentro de un paréntesis precedido de un signo *más*.

47. $6x^4 - 7x^3 + 2x^2 - x + 7$
48. $4a^5b - 7a^4b^2 - 2a^3b - a^2b^2 - 3ab^3 + b^4$
49. $2a - 3b + 4c - d$
50. $-x^2 - 2xy - x - 7$

En los Ejercicios del 51 al 54, dar una expresión que sea equivalente a la expresión dada, pero que contenga los últimos tres términos dentro de un paréntesis precedido de un signo *menos*.

51. $a - b - c + d$
52. $12p^3 - 8p^2 - 7p + 4$
53. $r^3 + r^2s + 2rs^2 + s^3$
54. $x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$

En los Ejercicios del 55 al 58, simplificar la expresión dada mediante la suma de los coeficientes de términos semejantes. En cada caso, h, k y m representan constantes reales.

55. $4x + 2y + mx + ky$
56. $h^2x + hx^2 + mx - mx^2$
57. $\sqrt{2}xy + kxy - hx^2y + mx^2y$
58. $h^2 + kx^2 - 3x + 4x^2 - hx + k^2x^2$

4-4 MULTIPLICACION

Mediante los postulados, definiciones y teoremas del Capítulo 3 podemos multiplicar expresiones.

Ejemplo (a)

$(3x)(5x - 8) = (3x)(5x) - (3x) \cdot 8$ Teorema: $x(y - z) = xy - xz$

$= (3 \cdot 5)x^2 - (3 \cdot 8)x$ Postulados conmutativo y asociativo y definición de x^2

$= 15x^2 - 24x$

Pasos semejantes se pueden dar en problemas más largos, tales como el siguiente (en el que se omiten las justificaciones).

Ejemplo (b)

$$\begin{aligned}(3x+7)(2x^2-5x+6) &= (3x+7)(2x^2)+(3x+7)(-5x)+(3x+7)6\\ &= (3x)(2x^2)+7(2x^2)+3x(-5x)+7(-5x)+(3x)6+7\cdot 6\\ &= 6x^3+14x^2-15x^2-35x+18x+42\\ &= 6x^3+[14+(-15)]x^2+(-35+18)x+42\\ &= 6x^3-x^2-17x+42\end{aligned}$$

Observamos que como resultado de usar la ley distributiva repetidas veces, *hemos multiplicado cada término de un factor por cada uno del otro factor en forma sucesiva y después sumamos términos semejantes.*

Según esa idea, la multiplicación se puede arreglar de la forma siguiente:

$$\begin{array}{l} 2x^2-5x+6\\ \underline{3x+7}\\ 6x^3-15x^2+18x\\ \qquad\underline{14x^2-35x+42}\\ 6x^3-\ \ x^2-17x+42\end{array}$$

(nótese que estos términos son los mismos que en el paso 3 del desarrollo anterior).

En todas las operaciones de suma, resta y multiplicación es necesario, para la rapidez de cálculo, *desarrollar destreza haciendo las operaciones mentalmente siempre que sea posible.*

4-2 Ejercicios

Efectuar las operaciones indicadas escribiendo los resultados en la forma más simple.

1. $3xy(2x^2+3xy-5y^2)$
2. $-2ab(a^2-3ab+b^2)$
3. $(2y)(3z^2)-2(xy)(z^2)+(4z)(-yz)-(yz)(xz)$
4. $-12(x^2-y)-6(y-x^2)+17(x^2-y)$
5. $-x(x^2+6xy-y^2)+3x(x^2+6xy-y^2)-7x(x^2+6xy-y^2)$
6. $2x\{x-y[(3x+y)-(x-y)]\}$
7. $5-x\{2-x(3x-2)+[7-(2-x)]\}$
8. $(3x+2)(x+5)$
9. $(x+7y)(2x-y)$
10. $(x-2)(x^2+5x-3)$
11. $(x+3)(x^2-3x+9)$
12. $(y^2-3)(y^2+4y+2)$
13. $(2y^3-y^2+2y-1)(2y-1)$
14. $(y^2-3y-1)(y^2+2y+2)$
15. $(2-x)(x^2+3x-4)$
16. $(2x-3y)^2$
17. $3xy(x-2y)^2$
18. $(x^2-y^2)(x-y)$
19. $(x^2+xy+y^2)(x-y)$
20. $(x+2y)^3$
21. $(x-y)^3$
22. $(x^2+xy-y^2)^2$
23. $(m-3)(1-3m^2+m)$
24. $(2x+1)[(x-3)(x+3)]$
25. $(m+n)(m-3n)^2$
26. $(m+k)(2m-k)(m+k)$
27. $xy(y+x-2)(y-x+2)$
28. $2xy(3y-x-1)^2$
29. $(x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)$
30. $(a^2+2ab+b^2)(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)$

4-5 MULTIPLICACION POR VISUALIZACION

Ciertos casos de multiplicación se presentan con tanta frecuencia que se deben hacer mentalmente por visualización.

Ejemplo (a)

$$(3x+7)(2x-3) = 6x^2 + 14x - 9x - 21$$
$$= 6x^2 + 5x - 21$$

En este caso, $14x - 9x$ se efectúa mentalmente de manera que se llega a la respuesta sin pasos intermedios.

Ejemplo (b) $(-ab - 5y)(3ab - 4y) = -3a^2b^2 - 11aby + 20y^2$.

Ejemplo (c) $(3x+7)(3x+7) = 9x^2 + 42x + 49$.

Ejemplo (d)

$$(3x+7)(3x-7) = 9x^2 + 21x - 21x - 49 \quad \text{(mentalmente)}$$
$$= 9x^2 - 49$$

4-6 DIFERENCIA ENTRE DOS CUADRADOS

El Ejemplo (d) de la Sección 4-5 es ejemplo de un caso muy importante: el único caso en que el producto de dos binomios es también un binomio. *El producto de la suma y la diferencia de dos números reales es la diferencia de sus cuadrados.*

Ejemplo (a) Hallar el producto de la suma y la diferencia de a y b.
Suma: $a + b$.
Diferencia: $a - b$.
Producto de la suma y la diferencia: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Ejemplo (b)

$$(5x+4y)(5x-4y) = (5x)^2 - (4y)^2$$
$$= 25x^2 - 16y^2$$

En caso como éste, el paso intermedio siempre se debe hacer mentalmente.

Ejemplo (c)

$$\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\right)\left(\frac{2}{x}-\frac{3}{y}\right) = \left(\frac{2}{x}\right)^2 - \left(\frac{3}{y}\right)^2 \quad \text{(mentalmente)}$$
$$= \frac{4}{x^2} - \frac{9}{y^2}$$

Ejemplo (d) $[(x+y)+a][(x+y)-a] = (x+y)^2 - a^2$.

4-7 EL CUADRADO DE UN BINOMIO

Otro caso muy importante es el del producto de un binomio por sí mismo, es decir, el cuadrado de un binomio.

Ejemplo (a) $(2x-3)^2$ significa, por supuesto, $(2x-3)(2x-3)$.

$$(2x-3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$$

Esto se puede efectuar del mismo modo en que se multiplican cualesquiera dos binomios. Sin embargo, esto lo necesitamos tan a menudo que vale la pena tener una regla adecuada que derivaremos simplemente de la observación.

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$$

Por consiguiente: *el cuadrado de un binomio es un trinomio cuyo primer término es el cuadrado del primer término del binomio, cuyo segundo término es doble del producto de los dos términos del binomio y cuyo tercer término es el cuadrado del último término del binomio.* Tales trinomios se llaman *cuadrados perfectos.*

Ejemplo (b)

$$(3x+5y)^2 = (3x)^2 + 2\cdot(3x)(5y) + (5y)^2$$
$$= 9x^2 + 30xy + 25y^2$$

El paso intermedio se debe hacer mentalmente.

Ejemplo (c) $(x-\sqrt{2})^2 = x^2 + 2\cdot(x)(-\sqrt{2}) + (\sqrt{2})^2$ **(mentalmente)**

$$= x^2 - 2x\sqrt{2} + 2$$

Ejemplo (d)

$$[(x+y)+2a][(x+y)-2a] = (x+y)^2 - (2a)^2$$
$$= x^2 + 2xy + y^2 - 4a^2$$

4-3 Ejercicios

Encontrar cada uno de los productos siguientes. Efectuar el trabajo mentalmente, dando el resultado en la forma más simple.

1. $(2x^2yz)(3xy^2z^3)$
2. $(-2ab)(-3a^2b^3)$
3. $-(\sqrt{2}\,ab^3)(3a^3b^2)$
4. $-2x(3x-4x^2)$
5. $-4a(-a^2+2ab-b^2)$
6. $-\sqrt{2}\,x(\sqrt{2}\,xy - 3x^2y^2 - \sqrt{2}\,y)$
7. $x^2y(2x^2y^2 - 7xy - 4)$
8. $-x^3y^2(x^3-8y^3)$
9. $x(y^2z) + y(2xyz) - x(zy^2)$
10. $(2xy)^2$
11. $(-7ab^2)^2$
12. $(ab)(a^2b)(a^2-ab+2b^2)$
13. $(y-8)(y+3)$
14. $(2k-3)(k-7)$
15. $(-m+2)(2m-5)$
16. $(x-y)(x+y)$
17. $(a+b)(c+d)$
18. $(a+4b)(a-2b)$
19. $(-x-y)(-3x+y)$
20. $(x+8)(x+5)$
21. $(3r-7s)(r+2s)$
22. $(2x+7)(2x-7)$
23. $(x-2y)(x+2y)$
24. $(a^2+b)(a^2-b)$
25. $(cx+b)(cx-b)$
26. $(3x+4y)(4x-3y)$
27. $(5s-2t)(7s+t)$
28. $(m-2n)(2m+n)$
29. $(ax+b)(2ax-3b)$
30. $(m+7)(x-5)$
31. $(x+2y)(a-3b)$
32. $(3m-n)(3m+n)$
33. $(2x-5)(2x+5)$
34. $(2x-5)^2$
35. $(2x+5)^2$
36. $(3m-5n)^2$
37. $(2-y)^2$
38. $(5x-7y)^2$
39. $(3x-2)^2$
40. $(cx+b)^2$
41. $(y^3+7)(y^3-2)$
42. $(c^2+2b^2)(c^2-2b^2)$
43. $(4-3y)(y-3)$
44. $(2x-y)(3y-2x)$
45. $(2x+y)(y-2x)$
46. $[(x+y)-3][(x+y)+3]$
47. $[(2h-k)+3][(2h-k)-3]$
48. $(x+2y+4)(x-2y-4)$
49. $(m^2-2mn+n^2)(m^2+2mn-n^2)$
50. $[(x-2y)+4]^2$
51. $[(a+b)+c]^2$
52. $(a+b-2)^2$
53. $(2m-n+3)^2$
54. $[(x+a)+(y-b)]^2$
55. $(x+2)(x^2+x+1)$

56. Mediante las definiciones y técnicas desarrolladas en este capítulo, tenemos

$$(x+y)^1 = x+y$$
$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$$
$$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)^2 = (x+y)(x^2+2xy+y^2) = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$

(a) Por multiplicación directa, demostrar que

$$(x+y)^4 = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$$

y

$$(x+y)^5 = x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$$

Cuando escribimos $(x+y)^n$, $n \in N$, como una suma de términos que contienen potencias de x y de y, decimos que hemos desarrollado $(x+y)^n$, o que hemos escrito el desarrollo de $(x+y)^n$.

(b) Desarrollar $(x+y)^6$.

(c) ¿Cuántos términos tiene el desarrollo de cada una de las potencias siguientes?

(1) $(x+y)^1$ (3) $(x+y)^3$
(2) $(x+y)^2$ (4) $(x+y)^6$

(d) ¿Cuántos términos cree el estudiante que ha de haber en el desarrollo de $(x+y)^7$? ¿En el desarrollo de $(x+y)^n$, $n \in N$?

(e) ¿Cuál es la suma de los exponentes de x y y, en cada término del desarrollo de $(x+y)^5$?

(f) Si n representa el exponente de $(x+y)$ en cada uno de los desarrollos analizados anteriormente, notamos que en cada caso el primer término es x^n y que los exponentes de x decrecen de uno en uno en cada término. ¿Puede usted describir lo que sucede con los exponentes de y en el desarrollo?

(g) Los coeficientes del desarrollo siguen un patrón que se ilustra en el siguiente arreglo, conocido como *triángulo de Pascal.*

	1
$(a+b)^1$	1 1
$(a+b)^2$	1 2 1
$(a+b)^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5$	1 5 10 10 5 1
...	...

Nótese que en este arreglo cada renglón principia y acaba en 1 y que cada uno de los otros elementos se encuentra sumando los números a su derecha y a su izquierda en el renglón anterior. ¿Puede usted dar los elementos de los siguientes tres renglones de dicho arreglo?

(h) Si suponemos que las propiedades antes analizadas son válidas en el desarrollo de $(x+y)^n$, en donde n es cualquier entero positivo, entonces podemos usarlas para eliminar una gran cantidad de cálculos al desarrollar expresiones como $(x+3)^{10}$ o $(y-7)^{12}$. ¿Puede usted escribir el desarrollo de $(x+1)^8$?

57. Mediante los resultados del Ejercicio 56, dar el desarrollo de lo siguiente:

(a) $(x+2)^6$ (b) $(x-1)^5$
(c) $(2x+1)^7$

4-8 FACTORIZACION EN EL CONJUNTO DE LOS ENTEROS

En el conjunto de los enteros multiplicamos usando una tabla de multiplicación ya memorizada. Si usamos la tabla a la inversa para expresar un número como 54, como el producto de factores, tales como $9 \cdot 6$, decimos que estamos *factorizando* el número.

Recordemos que los enteros mayores que 1 cuyos únicos factores enteros no negativos son ellos mismos y 1 se llaman *números primos*. Por ejemplo, 23 es un número primo, puesto que sus únicos factores son 23 y 1.

Cuando se factoriza un entero de modo que cada factor es un número primo (o -1, si es negativo), decimos que lo hemos factorizado completamente. El teorema fundamental de la aritmética es un teorema que afirma que no importa cómo comencemos la factorización, siempre llegaremos a los mismos factores primos una vez que hallamos factorizado completamente un entero.

Ejemplo (a)

$54 = 6 \cdot 9$
$= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, factorizado completamente,
$= 2 \cdot 3^3$, usando notación exponencial.

Pero también,

$54 = 18 \cdot 3$
$= 2 \cdot 9 \cdot 3$
$= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, el mismo resultado.

Ejemplo (b)

$-105 = -1 \cdot 105$
$= -1 \cdot 15 \cdot 7$
$= -1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, factorizado completamente.

4-9 FACTORIZACION DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Hemos analizado cómo multiplicar ciertos tipos de expresiones algebraicas visualizándolas. Ahora el estudiante debe encontrarse suficientemente familiarizado con los productos obtenidos en esos casos especiales como para reconocerlos e invertir el procedimiento cuando sea necesario factorizar.

Ejemplo (a) Factorizar $4x^2 - 9y^2$.

Solución: Se puede reconocer que esta expresión es la diferencia de dos cuadrados: $(2x)^2 - (3y)^2$. De modo que escribimos $4x^2 - 9y^2 = (2x + 3y)(2x - 3y)$ que es el producto de la suma y la diferencia de las cantidades $2x$ y $3y$.

Ejemplo (b) Factorizar $x^2 - 3x + 2$.

Solución: Vemos que este es el tipo de producto que resulta de la multiplicación de dos binomios. Escribimos

$x^2 - 3x + 2 = (___\ \ ___)(___\ \ ___)$

y entonces, teniendo presente nuestro método para encontrar mentalmente el producto de dos de tales binomios, llenamos los términos. El producto de los primeros términos tiene que ser x^2 de donde resulta razonable suponer que ambos primeros términos tienen que ser x. Los segundos términos se deben multiplicar para dar $+2$ y su suma debe ser -3. Por tanto,

$x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$

El último paso es la comprobación que se efectúa al obtener mentalmente el término medio del producto por visualización:

$-2x$ y $-1x$ *sí* dan $-3x$

En general, limitamos nuestra discusión a expresiones que no contienen fracciones o divisiones y en las cuales los coeficientes, tanto de la expresión original como de sus factores, son enteros. En tal caso, decimos que estamos *factorizando sobre los enteros*. $x^2 - 3x + 2$ se puede descomponer en los factores $2\left(\frac{1}{2}x - 1\right)(x - 1)$, por ejemplo, pero esto no sería una factorización sobre los enteros.

Ejemplo (c) Factorizar $x^2 - 8x - 20$.

Solución: $x^2 - 8x - 20$ es similar al último ejemplo. Encontramos que -10 y 2 son los enteros cuyo producto es -20 y cuya suma es -8 y ponemos

$x^2 - 8x - 20 = (x - 10)(x + 2)$

y finalmente comprobamos multiplicando por inspección.

Ejemplo (d) Factorizar $x^2 + 8x + 6$.

Solución: Esta es otra expresión del mismo tipo por lo que hemos de buscar dos enteros positivos cuyo producto sea 6 y cuya suma sea 8. Los únicos pares de enteros positivos cuyo producto es 6 son 1, 6 o 2, 3, pero en ninguno de los dos casos la suma es 8. Así, pues, esta expresión no se puede factorizar sobre los enteros. En un capítulo posterior veremos que se puede factorizar sobre los números reales, ya que es posible encontrar un par de números reales, aunque no enteros, cuyo producto es 6 y cuya suma es 8.

Ejemplo (e) Factorizar $9x^2 - 27xy - 10y^2$.

Solución: Evidentemente esta expresión también es el producto de dos binomios. Pongamos

$$9x^2 - 27xy - 10y^2 = (__x - __y)(__x + __y) \quad \text{(¿Por qué esos signos?)}$$

Debemos tratar de encontrar los coeficientes de x cuyo producto sea 9 y los coeficientes de y cuyo producto sea -10.

$$9 = 1 \cdot 9 \text{ o } 3 \cdot 3, \qquad -10 = -1 \cdot 10 \text{ o } -10 \cdot 1 \text{ o } -2 \cdot 5 \text{ o } -5 \cdot 2$$

todo es asunto de intento y error y desarrollo de la intuición mediante la experiencia.

En este caso tenemos cuanto más doce combinaciones básicas posibles que probar:

$(x - y)(9x + 10y)$ o $(x + y)(9x - 10y)$

o $(x - 10y)(9x + y)$ o $(x + 10y)(9x - y)$

o $(x - 2y)(9x + 5y)$ o $(x + 2y)(9x - 5y)$

o $(x - 5y)(9x + 2y)$ o $(x + 5y)(9x - 2y)$

o $(3x - 10y)(3x + y)$ o $(3x + 10y)(3x - y)$

o $(3x - 2y)(3x + 5y)$ o $(3x + 2y)(3x - 5y)$

pero concentraremos nuestros esfuerzos en los productos de una de las columnas, puesto que en cada renglón el producto de los factores en la columna de la izquierda difiere del producto de la derecha solo en el signo del término medio. Una vez que hayamos encontrado factores para los cuales el producto tenga un término medio cuyo coeficiente sea $+27$ o -27, podemos escoger los signos apropiados. El primer término para la primera posibilidad sería $-89xy$; para la segunda, $-13xy$; para la tercera, $-27xy$, y aquí nos detenemos. Luego,

$$9x^2 - 27xy - 10y^2 = (3x - 10y)(3x + y)$$

Ejemplo (f) $9x^2 - 48x + 64$.

Solución: Este trinomio podría ser el *cuadrado de un binomio*, puesto que $9x^2$ es el cuadrado de $3x$ y 64 es el cuadrado de -8. La única cosa que falta para estar seguros es ver si $-48x$ es el doble del producto de $3x$ y -8. Pongamos

$$9x^2 - 48x + 64 = (3x - 8)^2$$

y luego tomemos el doble de $(3x)(-8)$, que es $-48x$, lo que satisface la inspección.

Ejemplo (g) $14x^2 + 6x$.

Solución: $14x^2 + 6x$ tiene como factor de cada término a $2x$, de modo que simplemente *usamos el postulado distributivo* una vez y escribimos:

$$14x^2 + 6x = 2x(7x + 3)$$

Ejemplo (h) $6y(x + 5) - 7(x + 5)$.

Solución: Puesto que $x + 5$ es factor de ambos términos, ponemos

$$6y(x + 5) - 7(x + 5) = (x + 5)(6y - 7)$$

Ejemplo (i) $(x - 5)^2 - 9y^2$.

Solución: Podemos factorizar esta expresión en forma de diferencia de dos cuadrados:

$$\begin{aligned}(x - 5)^2 - 9y^2 &= (x - 5)^2 - (3y)^2 \quad \text{(mentalmente)}\\ &= [(x - 5) + 3y][(x - 5) - 3y]\\ &= (x - 5 + 3y)(x - 5 - 3y)\end{aligned}$$

Ejemplo (j) Factorizar $27ax^2 - 75a^3$.

Solución: Notemos primero que $3a$ es factor de ambos términos. Separémoslo como factor quedando

$$\begin{aligned}27ax^2 - 75a^3 &= 3a(9x^2 - 25a^2), \quad \text{que todavía se puede factorizar:}\\ &= 3a(3x + 5a)(3x - 5a)\end{aligned}$$

Decimos que $27ax^2 - 75a^3 = 3a(3x + 5a)(3x - 5a)$ está «completamente» factorizado sobre los enteros. Factorizar un entero completamente, significa continuar la factorización hasta que todos los factores sean números primos (o -1). Las expresiones algebraicas deben ser factorizadas «completamente», es decir, hasta que ningún factor de más de un término se pueda seguir factorizando sobre los enteros, excepto por sacar 1 o -1.

1-4 Ejercicios

Factorizar completamente sobre los enteros.

1. $x^2 - a^2$
2. $x^2 - 9$
3. $x^3 + 4x$
4. $a^2x^2 + a^2$
5. $x^2 - 5x + 6$
6. $x^2 - 5x - 6$
7. $y^2 - 6y + 9$ (*Sugerencia*: Factorizarlo como un trinomio cuadrado perfecto.)
8. $y^2 + 24y + 144$
9. $x^2 + 18x + 81$
10. $9t^2 - 60t + 100$
11. $16a^2 - 49y^2$
12. $121 - 25x^2$
13. $121x^2 - 66x + 9$
14. $121x^2 - 110x + 9$
15. $x^2 - 5x - 14$
16. $x^2 + 3x - 28$
17. $t^2 - 5t - 66$
18. $v^2 - 19v - 66$
19. $3x^2 + 16x - 35$
20. $40x^2 - 47x + 12$
21. $144a^2 - 120a + 25$
22. $64 + 144k + 81k^2$
23. $64 + 444k + 81k^2$
24. $144a^2 - 125a + 25$
25. $169x^2 - 225y^2$
26. $400 - 289s^2t^2$
27. $15x^2 + 21x$
28. $36a^3b^2 - 45ab^4$
29. $3t^3 - 15t^2 - 12t$
30. $65 + 8x - x^2$
31. $v^2 - 20v + 91$
32. $x^2 - 24xy + 119y^2$
33. $63a^2 - 32ab - 63b^2$
34. $42z^2 - 85z + 42$
35. $(s + t)^2 - a^2$
36. $(2a + b)^2 - 9$
37. $s^2 - (a + b)^2$
38. $324z^2 - (8x - y)^2$
39. $(a + b)^2 - 6(a + b) + 9$
40. $x^2 - 4x(a + b) + 4(a + b)^2$
41. $(x - y)^2 - (a + b)^2$
42. $(2x - 5)^2 - (3x - 5)^2$
43. $3x^2 - 12y^2$

44. $16x^2 - 36a^2$
45. $x^2a^3 - 4xa^3 + 4a^3$
46. $7t^2 - 42t + 63$
47. $x^4 - 8x^2 - 9$
48. $x^4 - 10x^2 + 9$
49. $30a^3x^2 + 17a^2xy + 2ay^2$
50. $108k^2z^3 + 57k^2z^2 - 240k^2z$
51. $x^4 - 81$
52. $16t^4 - v^4$
53. $x^8 - 17x^4 + 16$
54. $a^8 - 256b^8$
55. $144x^4 + 216$

4-10 LA SUMA O DIFERENCIA DE DOS CUBOS

Es fácil comprobar mediante multiplicación directa que

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

y

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

Este es un resultado importante porque garantiza que invirtiendo las fórmulas podemos siempre factorizar la *suma de dos cubos*, así como la *diferencia de dos cubos*.

Ejemplo (a) Factorizar completamente $x^3 - 27$.

Solución: Primero observamos que 27 es el cubo de 3 de modo que lo que tenemos es la diferencia entre dos cubos. Podemos escribir $x^3 - 27 = x^3 - 3^3$ aunque esto debe hacerse mentalmente. Ahora aplicamos a la inversa la segunda fórmula de arriba:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

y pensamos en x y 3 en lugar de en a y b:

$$\begin{aligned} x^3 - 3^3 &= (x - 3)(x^2 + x \cdot 3 + 3^2) \\ &= (x - 3)(x^2 + 3x + 9) \end{aligned}$$

Ejemplo (b) Factorizar completamente $8y^3 + 1$.

Solución: Esto se puede factorizar como la suma de dos cubos:

$$\begin{aligned} 8y^3 + 1 &= (2y)^3 + 1^3 \text{ (mentalmente)} \\ &= (2y + 1)[(2y^2 - (2y) \cdot 1 + 1^2] \text{ (mentalmente)} \\ &= (2y + 1)(4y^2 - 2y + 1) \end{aligned}$$

Notemos que podemos establecer el proceso mental para encontrar el segundo factor en la forma siguiente: Encontramos el primer factor, *elevamos al cuadrado su primer término, multiplicamos sus dos términos y cambiamos el signo, y finalmente elevamos al cuadrado su segundo término.*

En los dos ejemplos anteriores, el segundo factor del resultado no es de nuevo factorizable (inténtese). ¿Es éste siempre el caso tratándose de la factorización de la suma o la diferencia de dos cubos? Inténtese encontrar un contraejemplo.

4-11 FACTORIZACION POR AGRUPACION

En algunos de los ejemplos y ejercicios de las secciones pasadas ha sido necesario interpretar un binomio como si fuese un monomio para lograr que la expresión se ajuste a alguna de las formas de factorización que tenemos en mente. Esta es la meta de la factorización por agrupación.

Ejemplo (a) Factorizar $2ax - 5a + 2bx - 5b$.

Solución: Observamos la repetición de los 2 y los -5; por lo que insertamos paréntesis para agrupar del modo siguiente:

$$2ax - 5a + 2bx - 5b = (2ax - 5a) + (2bx - 5b)$$

Al factorizar cada uno de los dos términos, vemos que aparecerá $2x - 5$ como factor común de *ambos términos*, por lo que escribimos:

$$\begin{aligned} 2ax - 5a + 2bx - 5b &= (2ax - 5a) + (2bx - 5b) \\ &= a(2x - 5) + b(2x - 5) \\ &= (2x - 5)(a + b) \end{aligned}$$

Ejemplo (b) Factorizar completamente $x^3 - 6x^2 - x + 6$.

Solución:

$$\begin{aligned} x^3 - 6x^2 - x + 6 &= (x^3 - 6x^2) - (x - 6) \\ &= x^2(x - 6) - 1(x - 6) \\ &= (x - 6)(x^2 - 1) \\ &= (x - 6)(x + 1)(x - 1) \end{aligned}$$

Al tratar de factorizar por agrupación hay que estar alerta sobre las posibilidades de agrupar, de manera que se adapte a una de las formas de factorización.

Ejemplo (c) Factorizar completamente $x^2 - 2xy + y^2 - 9a^2$.

Solución: $x^2 - 2xy + y^2 - 9a^2$ se puede agrupar de modo que forme la diferencia de dos cuadrados.

$$\begin{aligned} x^2 - 2xy + y^2 - 9a^2 &= (x^2 - 2xy + y^2) - 9a^2 \\ &= (x - y)^2 - (3a)^2 \\ &= [(x - y) + 3a][(x - y) - 3a] \\ &= (x - y + 3a)(x - y - 3a) \end{aligned}$$

A veces, los términos deben ser reacomodados para lograr la ventaja de una posibilidad de factorización.

Ejemplo (d) Factorizar completamente $x^2 + x + y - y^2$.

Solución: Aquí reordenamos los términos antes de agrupar.

$$\begin{aligned} x^2 + x + y - y^2 &= x^2 - y^2 + x + y \\ &= (x^2 - y^2) + (x + y) \\ &= (x + y)(x - y) + (x + y) \cdot 1 \\ &= (x + y)[(x - y) + 1] \\ &= (x + y)(x - y + 1) \end{aligned}$$

4-5 Ejercicios

En los Ejercicios del 1 al 41, factorizar completamente.

1. $x^3 - a^3$
2. $x^3 + a^3$
3. $8a^3 + 1$
4. $27x^3 - 8y^3$
5. $64 + 8y^3$
6. $216 - 27x^3$
7. $64 - 343y^3$
8. $1000a^3x^3 + 729$

9. $40x^6 + 625y^9$
10. $4a^3z^5 - 32a^6z^2$
11. $(x-a)^3 + b^3$
12. $8 - (m-n)^3$
13. $x^6 - y^6$ (*Sugerencia*: Factorizar primero como una diferencia de cuadrados.)
14. $8a^6 + 1$
15. $x^6 - 7x^3 - 8$
16. $27a^6 + 28a^3b^3 + b^6$
17. $5(a-b) + x(a-b)$
18. $2(x+y) + m(x+y) - n(x+y)$
19. $3x(2a-b) - 5y(b-2a)$
20. $4a(x+y) - (x+y)$
21. $(5x-2y) + 2b(5x-2y)$
22. $3(x-y)(x+y) + 6(x-y)(2x+y)$
23. $3(x-y)^2(x+y) - 15(x-y)(x+y)^2$
24. $a^2(a-b) - 2a(a-b) + (a-b)$
25. $x + y + 7ax + 7ay$
26. $6c - 5d + 12ac - 10ad$
27. $ax + 2bx + ay + 2by$
28. $2ab - 7b + 4a - 14$
29. $6x^3 - x^2 - 6x + 1$
30. $21x^3 + 12x^2 - 14x - 8$
31. $x^2 - 4y^2 + x + 2y$
32. $x^2 - 3ax + 3a - 1$
33. $x^2 - 2x + 1 - y^2$
34. $4a^2 - b^2 + 2bx - x^2$
35. $8(x-2)^3 - 27(x+1)^3$
36. $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - a^3$
37. $x^3 - y^3 - x^2 - xy - y^2$
38. $4 - 2a + a^2 - 8 - a^3$
39. $x^2 + 6x + 9 - y^2 + 4y - 4$
40. $x^2 - y^2 + x^3 - y^3$
41. $4a^2 + b^3 - 8a^3 - b^2$
42. (a) Factorizar $x^6 - y^6$ tanto como se pueda, empezando por interpretarlo como la diferencia de dos cubos.
(b) Factorizar $x^6 - y^6$ tanto como se pueda, empezando por interpretarlo como la diferencia de dos cuadrados.
(c) ¿Cómo explicar el hecho de que obtuvieron tres factores en un caso y cuatro en el otro?
(d) Cuando se factoriza la diferencia de dos cubos, el segundo factor (es decir, el que tiene tres términos), ¿resulta ser siempre no factorizable? Explicar.

Factorizar completamente las expresiones de los Ejercicios 43 y 44.

43. $x^{12} - y^{12}$
44. $x^{12} + y^{12}$

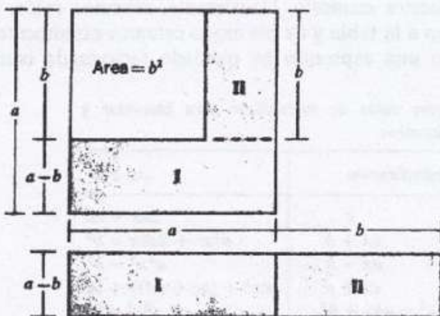
En los Ejercicios del 45 al 48, factorizar cada expresión tanto como se pueda sin conocer el entero que representa k.

45. $a^{2k} - b^{2k}, k \in N$
46. $a^{3k} - b^{3k}, k \in N$
47. $x^{4k} - 2x^{2k} + 1, k \in N$
48. $35x^{4k} - 8x^{2k} - 3, k \in N$

49. Una interpretación geométrica de

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

es la siguiente. En la figura, el área del cuadrado mayor, del lado a es a^2, en tanto que la del cuadrado menor, del lado b, es b^2.



(a) ¿Cuál es el área de la parte sombreada?
(b) En la parte baja de la figura hemos reacomodado las piezas de la parte sombreada colocando la parte II a continuación de la parte I para formar un rectángulo. ¿Cuál es el área de dicho rectángulo?
(c) Notar que el área de la porción sombreada permanece igual aunque se hayan reacomodado sus partes. ¿Qué conclusiones podemos sacar?

4-12 FACTORIZACION COMPLETA EN EL CONJUNTO DE POLINOMIOS SOBRE LOS REALES

Al factorizar 63, usamos primero la tabla de multiplicar ya memorizada para escribir $63 = 9 \cdot 7$. Después, de la tabla reconocemos que 9 no es primo, sino $3 \cdot 3$ y escribimos $63 = 3 \cdot 3 \cdot 7$. Como sabemos que 3 y 7 son primos, sabemos que $63 = 3 \cdot 3 \cdot 7$ está ya completamente factorizado.

Tabla de multiplicar para enteros

	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

El proceso de factorización en el conjunto de los enteros depende, pues, del uso, a la inversa, de la tabla de multiplicar para enteros ya memorizada. Sabemos cuáles enteros son primos, por lo que reconocemos cuándo un entero ha quedado completamente factorizado.

Del mismo modo, las propiedades de la multiplicación aprendidas para binomios y trinomios se usan a la inversa para factorizar expresiones algebraicas. En efecto, tenemos ya una breve tabla de multiplicar para binomios y trinomios en nuestra memoria. Usualmente, sabemos cuáles binomios y trinomios no se adaptan a la tabla y de ese modo estamos usualmente capacitados para reconocer cuándo una expresión ha quedado factorizada completamente.

Breve tabla de multiplicar para binomios y trinomios

Multiplicación	$ax + b$
c	$cax + cb$
$ax + b$	$a^2x^2 + 2abx + b^2$
$ax - b$	$a^2x^2 - b^2$
$cx + d$	$acx^2 + (bc + ad)x + bd$
$a^2x^2 - abx + b^2$	$a^3x^3 + b^3$

Nótese que esta simple tabla tiene solo una columna, a diferencia de la tabla mostrada para los enteros, que tiene ocho.

La razón es que ésta es una clase diferente de «factorización completa», de la factorización completa de enteros, puesto que trabaja a partir de una tabla de multiplicar de distinta clase y con diferentes elementos que no son precisamente enteros. Aun cuando las variables representen enteros, factorizar completamente una expresión no significa generalmente que el valor numérico real de la expresión esté factorizado completamente. Por ejemplo,

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$$

está factorizada completamente, pero si $x = 10$,

$$x^2 - 3x + 2 = 10^2 - 3 \cdot 10 + 2 = 72$$

y

$$(x - 2)(x - 1) = (10 - 2)(10 - 1)$$
$$= 8 \cdot 9$$

que *no* está completamente factorizado.

Por tanto, si deseamos trabajar con las ideas comprendidas en la factorización debemos entender más claramente qué tipo de expresión es lo que estamos factorizando. Esa expresión es lo que se llama una *forma polinomial* o simplemente *polinomio*.

Al factorizar $x^2 - 3x + 2$ usando la tabla anterior, no importa lo que sea x; de hecho, x puede no ser un número real. Lo que es importante es la secuencia de coeficientes 1, -3, 2 del trinomio. Para ver esto, imaginemos la tabla formada exclusivamente por los coeficientes, colocados cuidadosamente en sus columnas apropiadas:

Breve tabla de multiplicar para binomios y trinomios. — Solo coeficientes

x^2	x	1	x^3	x^2	x	1
Multiplicación					a	b
		c			ca	cb
	a	b		a^2	$2ab$	b^2
	a	$-b$		a^2	0	$-b^2$
	c	d		ac	$bc+ad$	bd
a^2	$-ab$	b^2	a^3	0	0	b^3

El proceso de factorización consiste en encontrar el renglón al que se adapta 1, -3, 2 y seleccionar los coeficientes. La única posibilidad es el cuarto renglón con $ac = 1$ y $bd = 2$. Escogemos $a = 1$, $b = -2$, $c = 1$ y $d = -1$ porque esta selección hace que $bc + ad = -3$. De este modo obtenemos los factores $(1x - 2)$ $(1x - 1)$. Obsérvese que esto corresponde a nuestra idea cuando escribimos $(_x ___)(_x ___)$ y tratamos de llenar los espacios en blanco. Nótese que una vez que la forma queda determinada, solo se usan los coeficientes.

Para enfatizar esta idea, señalemos que $x^2 - 3x + 2$, $m^2 - 3mn + 2n^2$ y $k^4z^2 - 3k^2zy^3 + 2y^6$ serían factorizadas, en muchos aspectos, en la misma forma; de una manera determinada, por los coeficientes 1, -3, 2.

La clave es que lo que estamos factorizando es una *forma*. Las potencias de x acomodadas en orden proporcionan la forma, de manera muy similar a la idea del valor posicional en nuestro sistema numeral indo-arábigo y los coeficientes determinan el polinomio en particular con el que estamos trabajando. Puesto que x no toma ningún valor y sirve principalmente para ocupar un lugar, se le llama un *indeterminado*.

El tipo más simple de polinomio es el polinomio en una variable. Por ejemplo, $2x^3 - 5x^2 + 3x - 4$ es un polinomio en la variable única x. Tales polinomios en x tienen la forma $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$. El primer término se llama *término inicial* y su coeficiente, *coeficiente inicial* y su exponente da el *grado del polinomio*. Por tanto, $2x^3 - 5x^2 + 3x - 4$ es un polinomio de tercer grado, cuyo coeficiente inicial es 2.

Posteriormente seremos más explícitos al dar una definición de polinomio. Por el momento basta simplemente decir que una combinación de símbolos que representen números reales y variables sin valores asignados junto con las operaciones de suma, resta y multiplicación (pero no división entre variables) se llama *polinomio sobre los reales*. Del mismo modo, si solo se nos permite usar números enteros como coeficientes, hablamos de un *polinomio sobre los enteros*.

Ejemplo (a) $5x + 3$, $8a^3 - 2a^2b + 9b^3$ y $6xyz$ son ejemplos de polinomios sobre los enteros. Son también polinomios sobre los reales.

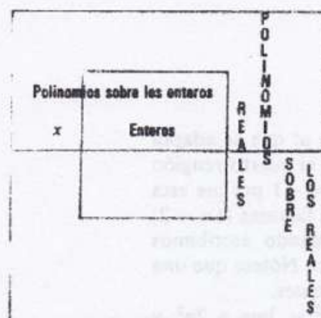
Ejemplo (b) $\frac{9}{4}x^3 - 9x^2 + 81\sqrt{2}x - 4\pi$ es un polinomio sobre los reales, pero no sobre los enteros. Sus coeficientes son $\frac{9}{4}$, -9, $81\sqrt{2}$ y -4π.

Ejemplo (c) $\frac{6}{x^3} + \frac{5}{x^2} - \frac{8}{x} + 7$ no es un polinomio, puesto que comprende la división entre una variable.

Ejemplo (d) x es un polinomio sobre los reales, con coeficientes 1, 0.

Ejemplo (e) -8 es un polinomio sobre los reales con coeficiente -8.

Todos los polinomios como ésos constituyen el *conjunto de polinomios sobre los reales*. Nótese que R es un subconjunto de este conjunto, como se indica en el Ejemplo (e). Nótese también que x es un elemento de dicho conjunto e igualmente lo será cualquier símbolo que usemos como variable.



Las operaciones de suma y multiplicación se llevan a cabo en este conjunto como se indicó en las Secciones 4-3 y 4-4. Según eso, hemos estado trabajando con operaciones en el conjunto de polinomios sobre los reales a través de la mayor parte de este capítulo.

Ahora nos preguntamos ¿cuáles de los postulados de cuerpo son válidos en este conjunto? ¿Los postulados de cerradura, conmutatividad, asociatividad, distributividad, identidad e inversos? ¿Cuál es la identidad aditiva y cuál la multiplicativa?

Observamos que todos los postulados, excepto uno (¿cuál?) son válidos y hay una identidad aditiva y una identidad multiplicativa (¿cuáles son?). En este sentido, el conjunto de polinomios es semejante al de los enteros. De hecho, ambos son ejemplos del tipo de conjunto llamado *dominio entero o dominio de integridad.*

Luego, debemos esperar que la factorización de polinomios sea similar a la factorización de enteros. En realidad sí lo es. Así como un entero se puede factorizar como el producto de números primos (o el producto de números primos y -1) en una forma única, también un polinomio sobre los reales se puede factorizar como el producto de *polinomios irreducibles* en una forma única (excepto por la eliminación de factores constantes).

Ejemplo (f) $-3x + 4$ es irreducible sobre los reales puesto que no se puede factorizar más, excepto por un intrascendente factor constante como en

$$-3\left(x - \frac{4}{3}\right) \quad \text{o} \quad \frac{1}{2}(-6x + 8)$$

Ejemplo (g) $x^2 + 1$ es irreducible sobre los reales.

Pero en la mayor parte de los ejercicios siguientes nos restringiremos de nuevo a la factorización en el conjunto de polinomios sobre los enteros, llamado *factorización sobre los enteros*. Dicho polinomio es *irreducible* sobre los enteros si no se puede factorizar aún más (como no sea por sacar 1 o -1) en polinomios con coeficientes enteros.

Ejemplo (h) $-3x + 4$ es irreducible sobre los enteros, aunque también se puede escribir como $-1(3x - 4)$.

Ejemplo (i) $9x^2 - 2$ es irreducible sobre los enteros. Es interesante notar, sin embargo, que no es irreducible sobre los reales puesto que se puede escribir

$$9x^2 - 2 = (3x + \sqrt{2})(3x - \sqrt{2})$$

4-13 RESUMEN DE LA FACTORIZACION

1. Obtener un monomio como factor común: Cuando esto sea posible, debe hacerse siempre como *primer paso* en cualquier problema de factorización.

   $ua + ub + uc = u(a + b + c)$

2. Factorización de la diferencia de dos cuadrados:

   $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

3. Factorización del trinomio general:

   $acx^2 + mx + bd = (ax + b)(cx + d)$

   en donde a, b, c y d deben determinarse de modo que $ad + bc = m$.

4. Factorización del trinomio cuadrado perfecto:

   $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

5. Factorización de la suma o diferencia de dos cubos:

   $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

   $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

6. Factorización por agrupación: Se trata de observar en qué forma una expresión complicada se adapta a una de las formas anteriores mediante el reacomodo de términos y la inserción de paréntesis.

4-6 Ejercicios

En los Ejercicios del 1 al 34, factorizar completamente sobre los enteros.

1. $4a^2x^2 - 25x^2$
2. $x^4 - y^4$
3. $a^5 - 8a^3 + 16a$
4. $a^2x + a^2 - b^2x - b^2$
5. $24y^2 - 48xy + 18x^2$
6. $20x^4 - 17x^2 - 63$
7. $2x^4 - 128xy^3$
8. $84y^3 - 105y^2 + 21y$
9. $kx^2 - 3mx^2 + 2kx - 6mx$

10. $x^2 - 4x + 4 - 9y^2$
11. $a^3 - b^3 + a^2 - b^2$
12. $(x+3)^2 - 7(x+3) + 12$
13. $x^6 - 1$
14. $x^6 + 1$
15. $x^4 - y^4 - 3x^2 - 3y^2$
16. $a^6 - b^6 + a^3 + b^3$
17. $x^3 - x^2 - 2xy - y^2 + y^3 - x - y$
18. $u^2 + uv - 2v^2 - u + v$
19. $81z^4 - 3z^2d^2$
20. $x^6 - 9x^3 + 8$
21. $(3x-2)^2 - 2(3x-2)(5y-4) + (5y-4)^2$
22. $4(8m+5)^2 - 12(8m+5)(m-3) + 9(m-3)^2$
23. $(x^3k^6 + 8) + (xk^2 + 2)^2$
24. $16x^3 + 144xy^2$
25. $(2x-1)^3 + (3x+1)^3$
26. $5ax - by + 10b - 50a - bx + 5ay$
27. $5x^2 + 5x + 5$
28. $81a^4b^4 - 16$
29. $x^4y^3 + x^6y^3 - x^5y^4$
30. $x^5 + x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 4x + 4$
31. $(t-v)^2 - (t^2 - v^2)$
32. $(t-v)^3 - (t^3 - v^3)$
33. $c^6 + 2c^3 + 1$
34. $(u-v)^2 + u^4 + u^2 - v^4 - v^2$

En los Ejercicios del 35 al 39, factorizar sobre el conjunto de los números reales.

35. $\frac{9}{16}x^2 - \frac{4}{9}y^2$
36. $x^2 - 2$
37. $x^2 + 4\sqrt{2}x + 6$
38. $x^3 - 2\sqrt{2}$
39. $0{,}64a^2 - 0{,}49b^2$

40. Demostrar simplemente por multiplicación que $x^2 + 2x - 1$ se puede factorizar sobre los reales en la forma

$$(x + 1 - \sqrt{2})(x + 1 + \sqrt{2})$$

41. **En la misma forma, demostrar que**

$$x^2 - x - \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$$

42. **Nótese que $x^4 + x^2 + 1$ sería un cuadrado perfecto si el término de en medio fuese $2x^2$ en vez de x^2. Así, pues, sumemos otra x^2, pero restemos x^2 al mismo tiempo para que la expresión no se altere. Esto nos da la diferencia de dos cuadrados que se puede factorizar sobre los enteros:**

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 + 1 &= x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 \\ &= (x^2+1)^2 - x^2 \\ &= (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x) \\ &= (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

Usar esa técnica para factorizar $x^4 + 3x^2 + 4$.

En los Ejercicios 43, 44 y 45, usar la técnica del Ejercicio 42 para factorizar completamente sobre los enteros. En cada caso, pregúntese usted qué puede agregar al término de en medio para convertir el trimonio en un cuadrado perfecto.

43. $x^4 - 7x^2y^2 + y^4$
44. $x^4 + 4$
45. $t^4 - 7t^2 + 9$

46. **Usar una técnica semejante a la del Ejercicio 42 para factorizar $x^2 + 2x - 1$ sobre el conjunto de los reales. (*Sugerencia*: Sumar algo a uno de los términos para obtener un cuadrado perfecto. Comparar la respuesta con el Ejercicio 40.)**
47. **Usar una técnica semejante a la del Ejercicio 42 para factorizar $x^2 - x - \frac{1}{4}$ sobre los reales. (Comparar con el Ejercicio 41.)**
48. **Por multiplicación directa de $(a - b)$ y $(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$, demostrar que la diferencia de quintas potencias siempre se puede factorizar sobre los enteros.**
Usar ese resultado para factorizar $243x^5 - 1$.

4-14 FRACCIONES

Recordemos que cuando el cociente de dos números reales $x \div y$ se escribe como una fracción $\frac{x}{y}$, x se llama *numerador* y y se llama *denominador*. Ambos se llaman términos de la fracción. Decimos que una fracción como $\frac{54}{48}$ está reducida a sus términos más simples, cuando, mediante el teorema $\frac{xz}{yz} = \frac{x}{y}$, hemos eliminado los factores que sean comunes a ambos términos. Según eso, $\frac{54}{48} = \frac{27 \cdot 2}{24 \cdot 2} = \frac{27}{24} = \frac{9 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{9}{8}$,

con lo que $\frac{54}{48}$ ha quedado reducido a sus términos más simples. Una fracción con numerador y denominador enteros está reducida a sus términos más simples cuando todos los factores comunes distintos de 1 o -1 han sido eliminados del numerador y del denominador. Así, pues, $\frac{54}{48}$ está reducida a sus términos más simples cuando la escribimos como $\frac{9}{8}$.

Hablamos de elevar una fracción a términos superiores cuando usamos el teorema $\frac{xz}{yz} = \frac{x}{y}$ en la forma $\frac{x}{y} = \frac{xz}{yz}$ para poner $\frac{9}{8} = \frac{9 \cdot 4}{8 \cdot 4} = \frac{36}{32}$.

Nótese que «reducir a sus términos más simples» tiene significado para números reales solo si estamos hablando de fracciones con términos enteros. Por ejemplo, $\frac{9}{8} = \frac{2,25}{2} = \frac{1,5}{4/3} = \frac{0,45}{0,4} = \frac{0,009}{0,008} = \cdots$, donde se puede continuar indefinidamente escribiendo términos más pequeños, puesto que los reales no tienen términos mínimos. Sin embargo, puede existir una «forma más simple».

La técnica que hemos de usar para reducir fracciones con términos enteros es la de factorizar numerador y denominador completamente y eliminar los factores comunes a ambos.

Ejemplo (a) $\frac{27}{24} = \frac{3 \cdot 3 \cdot \cancel{3}}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cancel{3}} = \frac{3^2}{2^3}$ o $\frac{9}{8}$.

Ejemplo (b) $\frac{3}{6} = \frac{\cancel{3}}{2 \cdot \cancel{3}} = \frac{1}{2} \left(\text{no } \frac{0}{2}\ !!! \right)$.

No se debe caer en el error de pensar que una vez que se ha cancelado un factor *nada* queda (esto es, cero). En realidad, queda un *uno*, porque usando el teorema $\frac{xz}{yz} = \frac{x}{y}$, pensamos en $\frac{3}{6} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2}$.

Para ayudarse en caso de duda, se remplaza un factor cancelado por un 1. Según lo anterior,

$$\frac{3}{6} = \frac{\cancelto{1}{3}}{2 \cdot \cancelto{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo (c) $\frac{\sqrt{2} + 3}{5\sqrt{2} + 15} = \frac{\cancel{\sqrt{2} + 3}}{5(\cancel{\sqrt{2} + 3})} = \frac{1}{5}$.

4-15 FRACCIONES Y FORMAS RACIONALES

Si $x \in R$ y $x \neq 0$ o -2, entonces $\frac{x^2 - 4}{6x^2 + 12x}$ es un número real. Deseamos reducirlo a sus términos más simples. Entonces, mediante el teorema $\frac{xz}{yz} = \frac{x}{y}$ podemos escribir

$$\frac{x^2 - 4}{6x^2 + 12x} = \frac{(x - 2)\cancel{(x + 2)}}{6x\cancel{(x + 2)}} = \frac{x - 2}{6x}$$

De inmediato acude la pregunta: ¿Está este número real en sus términos más

simples? Si x es un entero puede estar o no en sus términos más simples, dependiendo de qué entero sea x.

Por ejemplo, si $x = 4$, $\frac{x-2}{6x} = \frac{4-2}{6 \cdot 4} = \frac{2}{12 \cdot 2} = \frac{2}{24}$, *no* está en sus términos más simples. En cambio, si $x = 7$, $\frac{x-2}{6x} = \frac{7-2}{6 \cdot 7} = \frac{5}{42}$, *sí* está en sus términos más simples.

Si x no es un entero, entonces no tiene sentido hablar de que $\frac{x-2}{6x}$ está en sus términos más simples. Por ejemplo, si $x = 2{,}020020002\ldots$, tenemos que

$$\frac{x-2}{6x} = \frac{2{,}020020002\ldots - 2}{6 \cdot (2{,}020020002\ldots)} = \frac{0{,}020020002\ldots}{12{,}120120012\ldots}$$

y cómo proceder de aquí en adelante resulta muy poco claro, por decir poco.

Así, pues, si decidimos hablar de $\frac{x-2}{6x}$ como una expresión en sus términos más simples, nuestra decisión debe depender de su forma como «cociente» de dos polinomios, independientemente de lo que represente x. Tal tipo de fracciones, con numerador y denominador formados por polinomios sobre los reales (con denominador no cero), se llaman *formas racionales sobre los reales.*

Cuando decimos que una fracción tal como $\frac{x^2-4}{6x^2+12x}$ está reducida a sus términos más simples, es la forma racional la que está reducida a sus términos más simples, más bien que el número real que pueda representar. *Una forma racional está reducida a sus términos más simples* o a su *forma más simple*, cuando los polinomios que forman su numerador y su denominador no tienen factores en común, excepto constantes.

Con frecuencia estaremos tratando con *formas racionales sobre los enteros.* Tales formas racionales están *reducidas a sus términos más simples* sobre los enteros cuando los polinomios sobre los enteros que forman su numerador y su denominador no tienen factores comunes sobre los enteros, excepto 1 o -1. En general, esto es lo que esperamos cuando decimos «reducir la fracción a sus términos más simples».

Si sustituimos las variables de una forma racional por números reales, la fracción se vuelve un número real, siempre que el denominador no sea cero. Por ejemplo,

$\frac{x^2+9x-5}{3x-9}$ es una forma racional.

Si $x = -1$, tenemos el número real $\frac{(-1)^2+9(-1)-5}{3(-1)-9} = \frac{13}{12}$. Si $x = 3$, entonces $\frac{3^2+9 \cdot 3-5}{3 \cdot 3-9} = \frac{31}{0}$, que no es un número real, puesto que el denominador es 0.

Esto ilustra el hecho de que siempre que se use una forma racional para representar un número real, aquellos números reales para los cuales el denominador sea 0, deben quedar eliminados; es decir, no debemos sustituir las variables por ninguno de aquellos números reales que hagan 0 al denominador. *De modo que sabemos que deben quedar excluidos de los conjuntos satisfactores de las variables, aunque no se diga en forma explícita.*

Ejemplo (a) ¿Para qué valores reales de x no está definida $\dfrac{3x+2}{x^2-4x}$ como número real?

Solución: $\dfrac{3x+2}{x^2-4x} = \dfrac{3x+2}{x(x-4)}$, por lo que vemos que el denominador será 0 si $x = 0$ o si $x = 4$.

Por ello hemos de excluir al 0 y al 4 del conjunto de valores de x.

Ejemplo (b) Reducir a sus términos más simples: $\dfrac{x^2-6x+5}{3x^2-75}$.

Solución:

$$\frac{x^2-6x+5}{3x^2-75} = \frac{(x-1)(x-5)}{3(x^2-25)} = \frac{(x-1)(x-5)}{3(x+5)(x-5)}$$

$$= \frac{x-1}{3(x+5)}$$

Ejemplo (c) Reducir $\dfrac{x^6-y^6}{x^4-y^4}$ a sus términos más simples.

Solución:

$$\frac{x^6-y^6}{x^4-y^4} = \frac{(x^3-y^3)(x^3+y^3)}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}$$

$$= \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)(x+y)(x^2-xy+y^2)}{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)}$$

$$= \frac{(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)}{x^2+y^2}$$

Ejemplo (d) Reducir a sus términos más simples $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}$.

Solución: $\dfrac{\cancel{x^2}-6x+\cancel{9}}{\cancel{x^2}-\cancel{9}} = -6x$ está *mal* porque se han cancelado *términos* en vez de factores.

Primero debemos factorizar.

$$\frac{x^2-6x+9}{x^2-9} = \frac{(x-3)^2}{(x-3)(x+3)} = \frac{(x-3)\cancel{(x-3)}}{(x+3)\cancel{(x-3)}} = \frac{x-3}{x+3}$$

Nota: $\dfrac{\cancel{x}-\cancel{3}}{\cancel{x}+\cancel{3}} = -1$ está de nuevo *mal* porque otra vez se han cancelado términos. $\dfrac{x-3}{x+3}$ ya está reducida a sus más simples términos.

Ejemplo (e) Reducir $\dfrac{x^2-5xy-6y^2}{y^2-x^2}$ a sus términos más simples.

Solución:

$$\frac{x^2-5xy-6y^2}{y^2-x^2} = \frac{x^2-5xy-6y^2}{-(x^2-y^2)} = -\frac{x^2-5xy-6y^2}{x^2-y^2} \quad \text{(¿Por qué?)}$$

$$= -\frac{(x-6y)(x+y)}{(x-y)(x+y)} = -\frac{x-6y}{x-y}$$

Recordemos que $x - y = -(y - x)$, que debemos tener presente para usar junto con el teorema:

$$\frac{-x}{y} = \frac{x}{-y} = -\frac{x}{y}$$

Ejemplo (f) $\dfrac{3-x}{x^2-9}=\dfrac{\overset{1}{-(x-3)}}{(x+3)\underset{1}{(x-3)}}=\dfrac{-1}{x+3}=-\dfrac{1}{x+3}.$

Las fracciones se deben *elevar a términos superiores* en la mayoría de los problemas de suma o resta. Para eso usamos el teorema $\dfrac{xz}{yz}=\dfrac{x}{y}$, en la forma $\dfrac{x}{y}=\dfrac{xz}{yz}$.

Ejemplo (g) Expresar $\dfrac{5}{2a}$ como una fracción con denominador $12a^2$.

Solución:

$$\frac{5}{2a}=\frac{5\cdot(\ )}{2a\cdot(\ )}=\frac{\quad}{12a^2}$$

Nuestra forma de pensar es la siguiente: ¿Qué se debe multiplicar por $2a$ para que el producto sea $12a^2$? La respuesta es $6a$, por lo cual debemos multiplicar numerador y denominador por $6a$.

$$\frac{5}{2a}=\frac{5\cdot 6a}{2a\cdot 6a}=\frac{30a}{12a^2}$$

Ejemplo (h) Expresar $\dfrac{5x}{s-2t}$ como una fracción cuyo denominador sea $s^2+5st-14t^2$.

Solución:

$$\frac{5x}{s-2t}=\frac{5x(\qquad\qquad)}{(s-2t)(\qquad\qquad)}=\frac{\quad}{s^2+5st-14t^2}$$

Primero factorizamos $s^2+5st-14t^2$ y obtenemos $(s-2t)(s+7t)$. ¿Qué debemos multiplicar por $s-2t$ para obtener $s^2+5st-14t^2$? La respuesta es $s+7t$. Luego, debemos multiplicar numerador y denominador por $s+7t$.

$$\frac{5x}{s-2t}=\frac{5x(s+7t)}{(s-2t)(s+7t)}\quad \text{o}\quad \frac{5xs+35xt}{s^2+5st-14t^2}$$

4-16 MULTIPLICACION Y DIVISION DE FRACCIONES

En el Capítulo 3 se demostraron algunos teoremas, para operar con fracciones, que hemos de usar aquí.

Multiplicación: $\dfrac{w}{x}\cdot\dfrac{y}{z}=\dfrac{wy}{xz}$ (Teorema 3-15)

División: $\dfrac{w}{x}\div\dfrac{y}{z}=\dfrac{w}{x}\cdot\dfrac{z}{y}$ (Teorema 3-22)

Usualmente es posible hacer reducciones durante el curso de la multiplicación.

Ejemplo (a) Multiplicar $\dfrac{33}{35}\cdot\dfrac{7}{12}$.

Solución:

$$\frac{33}{35}\cdot\frac{7}{12}=\frac{33\cdot 7}{35\cdot 12}=\frac{\not{3}\cdot 11\cdot\not{7}}{5\cdot\not{7}\cdot 2\cdot 2\cdot\not{3}}=\frac{11}{5\cdot 2\cdot 2}\quad \text{o}\quad \frac{11}{20}$$

Generalmente omitimos el primer paso y comenzamos por factorizar los numeradores y denominadores para facilitar la reducción.

$$\frac{33}{35}\cdot\frac{7}{12}=\frac{\cancel{3}\cdot 11}{5\cdot\cancel{7}}\cdot\frac{\cancel{7}}{2\cdot 2\cdot\cancel{3}}=\frac{11}{5\cdot 2\cdot 2}\quad \text{o}\quad \frac{11}{20}$$

Debemos evitar efectuar las multiplicaciones en el numerador y el denominador antes de reducir, como en

$$\frac{33}{35}\cdot\frac{7}{12}=\frac{231}{420}=?$$

Ejemplo (b) $\dfrac{x^2-9}{3x^2+11x-4}\cdot\dfrac{5x+20}{x^2-4x+3}$ *se podría* multiplicar escribiendo

$$\frac{(x^2-9)(5x+20)}{(3x^2+11x-4)(x^2-4x+3)}=\frac{5x^3+20x^2-45x-180}{3x^4-x^3-39x^2+49x-12}$$

pero esta última respuesta no es muy útil y está lejos de ser la más simple.

La multiplicación se podría hacer factorizando completamente, primero todos los numeradores y denominadores y después, cancelando todos los factores comunes al numerador y al denominador. Finalmente usaríamos el teorema $\dfrac{w}{x}\cdot\dfrac{y}{z}=\dfrac{wy}{xz}$ para completar el problema.

$$\frac{x^2-9}{3x^2+11x-4}\cdot\frac{5x+20}{x^2-4x+3}=\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{(3x-1)\cancel{(x+4)}}\cdot\frac{5\cancel{(x+4)}}{\cancel{(x-3)}(x-1)}$$

$$=\frac{5(x+3)}{(3x-1)(x-1)}$$

Nótese que el numerador y el denominador quedan en forma factorizada.

Mediante el teorema $\dfrac{w}{x}\div\dfrac{y}{z}=\dfrac{w}{x}\cdot\dfrac{z}{y}$, cada problema que contenga una división se puede transformar en un problema con multiplicación.

Esto lo decimos: *Invertir el divisor y multiplicar.*

Ejemplo (c)

$$\frac{5}{6}\div\frac{15}{8}=\frac{5}{6}\cdot\frac{8}{15}$$

$$=\frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{1}{\cancel{2}}\cdot 3}\cdot\frac{\overset{1}{\cancel{2}}\cdot 2\cdot 2}{3\cdot\underset{1}{\cancel{5}}}=\frac{2\cdot 2}{3\cdot 3}\quad \text{o}\quad \frac{4}{9}$$

Ejemplo (d)

$$\frac{x^2-9y^2}{3ax+6ay}\div\frac{x^2-3xy}{ax+ay}=\frac{(x-3y)(x+3y)}{3a(x+2y)}\div\frac{x(x-3y)}{a(x+y)}$$

$$=\frac{\overset{1}{\cancel{(x-3y)}}(x+3y)}{3\underset{1}{\cancel{a}}(x+2y)}\cdot\frac{\overset{1}{\cancel{a}}(x+y)}{x\underset{1}{\cancel{(x-3y)}}}=\frac{(x+3y)(x+y)}{3x(x+2y)}$$

4-7 Ejercicios

1. ¿En cuáles de las siguientes proposiciones se han usado los teoremas y postulados correctamente y en cuáles no?

(a) $\frac{3+\cancel{8}}{\cancel{8}}=3$

(b) $\frac{x^2-a^2}{x^2-a^2}=0$

(c) $\frac{\cancel{x^2}+a^2}{\cancel{x^2}+b^2}=\frac{a^2}{b^2}$

(d) $\frac{\cancel{3}(a+b)}{(x+y)\cancel{3}}=\frac{a+b}{x+y}$

(e) $\frac{\cancel{2x}+1}{1+\cancel{2x}}=1$

(f) $-\frac{x-y}{y-x}=1$

(g) $\frac{a^2}{b^2}=\frac{a}{b}$

(h) $-\frac{-2}{-3}=\frac{2}{3}$

2. ¿En cuáles de las siguientes proposiciones se han usado los teoremas y postulados correctamente y en cuáles no?

(a) $\frac{x-5}{5-x}=-1$

(b) $\frac{3x+7}{7+3x}=-1$

(c) $-\frac{x}{y}=\frac{-x}{-y}$

(d) $\frac{4}{12}=\frac{4}{3\cdot 4}=0$

(e) $\frac{3(\cancel{\sqrt{2}+1})}{5(\cancel{1+\sqrt{2}})}=\frac{3}{5}$

(f) $\frac{\frac{1}{\cancel{4}^{1}}}{\frac{1}{\cancel{8}^{2}}}=\frac{1}{2}$

(g) $\frac{1-3x}{-3x+1}=-1$

(h) $\frac{\cancel{3}x+7}{\cancel{3}x+1}=\frac{x+7}{x+1}$

En los Ejercicios del 3 al 10, especificar, si es que hay, los valores reales de las variables para los que las expresiones siguientes no estén definidas.

3. $\frac{3x+2}{x+1}$

4. $\frac{x-1}{x-3}$

5. $\frac{2x}{x^2+4}$

6. $\frac{x^2}{5x-6}$

7. $\frac{3x+1}{2x+3}$

8. $\frac{7x+1}{(x-2)(x-5)}$

9. $\frac{5}{x(x-3)}$

10. $\frac{3x}{2x^2-x-1}$

En los Ejercicios del 11 al 17, dar una fracción que sea equivalente a la fracción dada, pero que tenga como denominador la expresión dada en seguida. Dejar numeradores y denominadores en forma factorizada.

11. $\frac{5}{6}$ con denominador 36

12. $\frac{9}{10xy}$ con denominador $30x^2y$

13. $\frac{7x+2}{2x-5}$ con denominador $x(2x-5)$

14. $\frac{3x+1}{2x-3}$ con denominador $(x+1)(2x-3)$

15. $\frac{2x}{x^2-4}$ con denominador $(x-2)(x+3)(2x+5)(x+2)$

16. $\frac{5x}{x(x+4)^2}$ con denominador $x^2(x+4)^3$

17. $\frac{2x-1}{x^3-4x^2+3x}$ con denominador $9x-9x^2-x^3+x^4$

En los Ejercicios del 18 al 22, dar expresiones equivalentes a las expresiones dadas, pero que no tengan signos *menos* en el numerador o el denominador.

18. $\frac{-6}{-5}$

19. $\frac{6}{-5}$

20. $\frac{-3x-y}{x+y}$

21. $\frac{-(7x+3)}{-x}$

22. $\frac{5x}{-x-y}$

En los Ejercicios del 23 al 27, escribir expresiones equivalentes a las fracciones dadas, pero con denominadores $(x-3y)(x+3y)$.

23. $\frac{1}{3y-x}$

24. $\frac{1}{-x-3y}$

25. $\frac{1}{x+3y}$

26. $\frac{1}{(3y-x)(3y+x)}$

27 $\frac{1}{(-3y-x)(3y-x)}$

En los Ejercicios del 28 al 46, reducir a sus términos más simples.

28. $\frac{143}{195}$

29. $\frac{85}{102}$

30. $\frac{187}{391}$

31. $\frac{15xy^2}{27x^4}$

32. $\frac{182uv^2}{42uv^2}$

33. $\frac{x^2+2x}{x^2-4x}$

34. $\frac{x^2-6x+9}{x^2-9}$

35. $\frac{y-x}{x^2-y^2}$

36. $\frac{4x^2-20x}{x^2-4x-5}$

37. $\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}$

38. $\frac{x^3-y^3}{x^2-3xy+2y^2}$

39. $\frac{a^2-b^2}{b^4-a^4}$

40. $\frac{(x-1)(x-3)}{(1-x)(3+x)}$

41. $\frac{2x^2y-4xy^2}{2ay-bx-ax+2by}$

42. $\frac{x^3+y^3}{x^6-y^6}$

43. $\frac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-4}$

44. $\frac{2a+2b+xa+xb}{ax-2b+2a-bx}$

45. $\frac{x^4-16}{2x^2-x^3+8-4x}$

46. $\frac{54-2x^3}{36y+12xy+4x^2y}$

Efectuar las operaciones indicadas en los Ejercicios del 47 al 59 y simplificar.

47. $\frac{34}{65}\cdot\frac{39}{85}$

48. $\left(\frac{5}{16}\div\frac{9}{64}\right)\cdot\frac{7}{15}$

49. $\frac{8x^2y^3z}{15ab^2c}\cdot\frac{35a^3bc^2}{6xyz^3}$

50. $\frac{9ax^2}{10by}\cdot\frac{18xy^2}{15ab}$

51. $\frac{x-y}{x^2+xy}\cdot\frac{x^2}{y^2-xy}$

52. $\frac{3x-5}{7xy}\div\frac{2x+3}{14x^2}$

53. $\frac{a^3+8}{a^2-4a+4}\div\frac{a^2+4a+4}{a^3-64}$

54. $\frac{x^2-y^2-x+y}{x+2y}\div\frac{x-y}{x-2y}$

55. $\frac{x-3y}{x^3-27y^3}\cdot\frac{4y^2-x^2}{x^2-3xy-10y^2}\div\frac{x-2y}{5y^2+4xy-x^2}$

56. $\frac{4x-8y}{x+7y}\div\frac{3x^2-12y^2}{2x^2-98y^2}$

57. $\frac{4-x}{x^2-8x+15}\div(5-x)$

58. $\frac{x^4-x^3+x^2-x}{2x^3+2x^2+x+1}\cdot\frac{2x^3-8x^2+x-4}{x^3-4x^2+x-4}$

59. $(x^{2k}-y^{2k})\div\frac{x^{k+1}-xy^k}{y^{k+1}+x^ky}$ (en donde $k\in I$ y $k>0$)

4-17 MINIMO COMUN MULTIPLO DE UN CONJUNTO DE ENTEROS

La forma más fácil de sumar $\frac{5}{8}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{5}{6}$ es expresarlos con un denominador común.

Por nuestras experiencias previas, rápidamente escogemos el 24 y escribimos

$$\frac{5}{8}+\frac{1}{2}+\frac{5}{6}=\frac{5\cdot 3}{24}+\frac{1\cdot 12}{24}+\frac{5\cdot 4}{24}$$

$$=\frac{15}{24}+\frac{12}{24}+\frac{20}{24}=\frac{15+12+20}{24}=\frac{47}{24}$$

El menor entero positivo es 24, que es múltiplo de 8, 2 y 6, por lo que se llama *mínimo común múltiplo* de dichos enteros. Para sumar fracciones debemos saber

cómo encontrar el mínimo común múltiplo de sus denominadores. Supongamos que para buscar el mínimo común múltiplo de 8, 2 y 6 factorizamos completamente cada entero:

$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$

$2 = 2$

$6 = 2 \cdot 3$

y después razonamos como sigue. El mínimo común múltiplo debe tener al 2 como factor tres veces si es que ha de ser múltiplo de 8, lo cual lo hace automáticamente múltiplo de 2. Pero necesitamos también un factor 3 (además del 2 ya considerado), puesto que ha de ser múltiplo de 6. Por tanto, el mínimo común múltiplo de 8, 2 y 6 es

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ o 24

Resumamos el procedimiento:

1. Factorizar completamente todos los enteros.
2. Formar un producto que tenga a cada uno de los factores positivos de los enteros dados el más grande número de veces que el factor aparezca en cualquiera de los enteros.

Este número es el mínimo común múltiplo. Es un *múltiplo* de cada uno de los enteros, ya que todos los factores de un entero dado aparecen en él por lo menos tantas veces como en el entero mismo. Es el *mínimo* común múltiplo porque la eliminación de un solo factor haría que por lo menos uno de los números ya no lo dividiera.

Ejemplo Hallar el mínimo común múltiplo de 60, 72 y 16.

Solución:

$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

$72 = 2^3 \cdot 3^2$

$16 = 2^4$

Tabla de factores

	Factores		
	2	**3**	**5**
60	2	1	1
72	3	2	0
16	4	0	0

Notamos que el mayor número de veces que se presenta el 2 como factor en cualquiera de los enteros es cuatro veces, el mayor número de veces que se presenta el 3 es dos veces y el 5 aparece solo una vez. Por tanto, el mínimo común múltiplo es $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$, o sea 720. El estudiante debe autodemostrarse que cada uno de los enteros es un factor y que basta eliminar un solo factor del mínimo común múltiplo $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$ para que uno de los números dados ya no sea factor de él.

4-18 MINIMO COMUN MULTIPLO DE UN CONJUNTO DE POLINOMIOS

Las mismas ideas se aplican a los polinomios como se ilustra en el ejemplo siguiente:

Ejemplo (a) Encontrar el mínimo común múltiplo de $3x^2 + 6x$, $x^2 - 4$ y $x^2 - 2x^2$.

Solución: Primero factorizamos cada uno de los polinomios completamente:

Tabla de Factores

	Factores			
	3	x	$x+2$	$x-2$
$3x^2 + 6x = 3x(x+2)$	1	1	1	0
$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$	0	0	1	1
$x^3 - 2x^2 = x^2(x-2)$	0	2	0	1

El mayor número de veces que aparece el 3 como un factor en cualquiera de los polinomios es uno, el mayor número de veces que x aparece como factor es dos; $x + 2$ aparece cuando más una vez y $x - 2$ una vez también (véase la tabla de arriba). Así, pues, tenemos:

mínimo común múltiplo $= 3x^2(x + 2)(x - 2)$

Ejemplo (b) Hallar el mínimo común múltiplo de $18x - 90$, $10x - 50$, $6x^2 - 60x + 150$ y $x^2 - 25$.

Solución: La factorización nos da

$$18x - 90 = 2 \cdot 3^2(x-5)$$
$$10x - 50 = 2 \cdot 5(x-5)$$
$$6x^2 - 60x + 150 = 2 \cdot 3(x-5)^2$$
$$x^2 - 25 = (x-5)(x+5)$$

Por lo que tenemos:
mínimo común múltiplo $= 2 \cdot 3^2 \cdot 5(x-5)^2(x+5)$ o $90(x-5)^2(x+5)$.

Hay que tener la precaución de no agregar factores innecesarios en lo que debe ser el mínimo común múltiplo. Hay que estar alerta sobre casos como $16 - 4x^2 = -(4x^2 - 16)$.

Ejemplo (c) Hallar el mínimo común múltiplo de $6x - 12$, $16 - 4x^2$ y $x^2 + 4x + 4$.

Solución: La factorización nos da

$$6x - 12 = 2 \cdot 3(x-2)$$
$$16 - 4x^2 = 2^2(2-x)(2+x)$$
$$x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$$

mínimo común múltiplo $= 2^2 \cdot 3(x-2)(2-x)(2+x)(x+2)^2$. ¡*Equivocado*! Primeramente, $2 - x = -(x - 2)$, de modo que $x - 2$ es un factor que aparece más veces que las necesarias. Lo mismo pasa con $2 + x$ que es igual que $x + 2$.

Debiamos haber escrito

$$6x - 12 = 2 \cdot 3(x-2)$$
$$16 - 4x^2 = -(4x^2 - 16) = -2^2(x-2)(x+2)$$
$$x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$$

Por lo que quedaría

mínimo común múltiplo $= 2^2 \cdot 3(x-2)(x+2)^2$.

Nótese que es perfectamente correcto omitir el signo menos puesto que si a es múltiplo de b, también lo será $-a$.

Esto ilustra el hecho de que nuestro procedimiento no conduce a un *único* mínimo común múltiplo. Más bien nos brinda un polinomio que es múltiplo de cada uno de los polinomios dados y tal que basta eliminarle un solo factor (diferente de 1 o -1) para que ya no sea múltiplo de por lo menos uno de los polinomios dados. Si definimos a esto como un mínimo común múltiplo, entonces su negativo también habrá de serlo.

4-19 SUMA Y RESTA DE FRACCIONES

Al sumar o restar fracciones usamos el teorema que afirma que $\frac{x}{z} + \frac{y}{z} = \frac{x+y}{z}$.

Es decir, que podemos sumar fracciones si tienen el mismo denominador con solo sumar sus numeradores. Un teorema similar, $\frac{x}{z} - \frac{y}{z} = \frac{x-y}{z}$, se usa para la resta.

Ejemplo (a) $\frac{6x}{x-5} - \frac{8x-3}{x-5} = \frac{6x-(8x-3)}{x-5} = \frac{-2x+3}{x-5}$ o $-\frac{2x+3}{x-5}$

En general, es necesario encontrar primero un mínimo común múltiplo de los denominadores y expresar las fracciones con él como denominador mediante el teorema $\frac{xz}{yz} = \frac{x}{y}$.

Ejemplo (b) Expresar como una sola fracción:

$$\frac{5}{2a} - \frac{7}{3a^2} + \frac{1}{4}$$

Solución: Notamos que un mínimo común múltiplo del denominador es $12a^2$, de modo que debemos elevar cada fracción a términos superiores con denominador $12a^2$.

$$\frac{5}{2a} - \frac{7}{3a^2} + \frac{1}{4} = \frac{30a}{12a^2} - \frac{28}{12a^2} + \frac{3a^2}{12a^2}$$

$$= \frac{30a - 28 + 3a^2}{12a^2}$$

$$= \frac{3a^2 + 30a - 28}{12a^2}$$

Ejemplo (c) $\frac{4x-5}{2x-3} + \frac{-8x+5}{14x-21}$.

Solución: Encontramos que $14x - 21 = 7(2x - 3)$ y esto es un denominador común de modo que escribimos

$$\frac{4x-5}{2x-3}+\frac{-8x+5}{14x-21}=\frac{4x-5}{2x-3}+\frac{-8x+5}{7(2x-3)}$$
$$=\frac{7(4x-5)}{7(2x-3)}+\frac{-8x+5}{7(2x-3)}$$
$$=\frac{7(4x-5)+(-8x+5)}{7(2x-3)}$$
$$=\frac{28x-35-8x+5}{7(2x-3)}$$
$$=\frac{20x-30}{7(2x-3)}, \text{ pero esto se puede reducir:}$$
$$=\frac{10(2x-3)}{7(2x-3)}$$
$$=\frac{10}{7}$$

Ejemplo (d)

$$\frac{3x}{x^2-4}-\frac{2}{x^2-5x+6}=\frac{3x}{(x-2)(x+2)}-\frac{2}{(x-3)(x-2)}$$ factorizamos los denominadores

$$=\frac{3x(x-3)}{(x-2)(x+2)(x-3)}-\frac{2(x+2)}{(x-2)(x+2)(x-3)}$$ hallamos un mínimo denominador común y expresamos ambas fracciones con él como denominador

$$=\frac{3x(x-3)-2(x+2)}{(x-2)(x+2)(x-3)}$$ restamos los nuevos numeradores

$$\left.\begin{aligned}&=\frac{3x^2-9x-2x-4}{(x-2)(x+2)(x-3)}\\&=\frac{3x^2-11x-4}{(x-2)(x+2)(x-3)}\end{aligned}\right\}$$ simplificamos el numerador

$$=\frac{(3x+1)(x-4)}{(x-2)(x+2)(x-3)}$$ factorizamos para ver si se puede reducir la fracción

Después de factorizar el numerador, notamos que la fracción no se puede simplificar, por lo que podemos dejar el numerador en forma factorizada o como un polinomio, como está en el penúltimo paso.

4-8 Ejercicios

Encontrar un mínimo común múltiplo para cada uno de los conjuntos de expresiones dadas en los Ejercicios del 1 al 10. Dejar las respuestas en forma factorizada.

1. $5; 25; 15; 18; 50$
2. $121 : 143$
3. $9xyz; 15x^2yz^2; 6x^3; yz^2$
4. $15mn^2p^3; 24m^2np; 4m^4; 120m^2n^2p^5$
5. $45x^2(x+y)^2; 36xy^2(x-y)$
6. $6a^2(x-3y)^3; 4ab(x-3y)(x+y)$
7. $x^3-2x^2y+y^2x; x^4-x^2y^2$
8. $x-3y; x^2-9y^2; x^2-6xy+9y^2$

9. $a^3 + b^3$; $a^2 - b^2$; $a^2 + 2ab + b^2$

10. $a^3 + a^2 + 2a^2 + 2a$; $a^4 + 4a^3 + 3a^2$; $a^2 + 4a + 4$

Si un polinomio es un factor de cada elemento de un conjunto de polinomios, se llama factor común del conjunto. Si al multiplicarlo por cualquier número que no sea 1 o -1 da un producto que ya no es factor de por lo menos uno de dichos polinomios, entonces se llama *máximo factor común* (MFC) del conjunto.

Ejemplo Hallar el MFC de $15x^3 - 45x^2$, $6x^3 - 54x$, y $9x(x-3)^3$. Como $15x^3 - 45x^2 = 3 \cdot 5 \cdot x^2(x-3)$, $6x^3 - 54x = 2 \cdot 3x(x-3)(x+3)$, y $9x(x-3)^3 = 3 \cdot 3x(-3)^3$, vemos que el MFC es $3x(x-3)$.

Determinar un máximo factor común de cada uno de los conjuntos de polinomios dados en los Ejercicios del 11 al 16.

11. 135; 225; 280
12. El conjunto de expresiones del Ejercicio 4
13. El conjunto de expresiones del Ejercicio 7
14. El conjunto de expresiones del Ejercicio 9
15. $5x^2y(x-y)^3(x+2y)^2$; $15xy^2(x-y)^2(x+2y)$
16. $x^4 - 24x^2 - 81$; $x^4 - 9$; $x^3 - x^2 + 3x - 3$

Cambiar las expresiones de cada conjunto en los Ejercicios del 17 al 20 a fracciones equivalentes cuyo denominador común sea un mínimo común múltiplo de los denominadores. Dejar los numeradores y denominadores en forma factorizada.

17. $14; \frac{5}{8}; \frac{11}{12}$
18. $\frac{3x}{7y^2}; \frac{15}{9xy}$
19. $\frac{5x}{x-2}; \frac{7}{2-x}$
20. $11; \frac{6x}{x^3-y^3}; \frac{5x+y}{x^3-y^3}$

Efectuar las sumas y restas indicadas en los Ejercicios del 21 al 50 y reducir los resultados a sus términos más simples.

21. $\frac{-5}{8} + \frac{-7}{8}$
22. $\frac{4}{9} - \frac{19}{12}$
23. $\frac{3}{2x} + \frac{-11}{x}$
24. $\frac{x}{3y} + \frac{9x}{2y} - \frac{15}{y}$
25. $\frac{3x+5y}{16x^3} - \frac{7x+5y}{16x^3}$
26. $\frac{6x-10}{2x+5} + \frac{25}{2x+5}$
27. $\frac{3(5x-7)}{(x+7)^2} - \frac{2x(4x+37)}{(x+7)^2}$
28. $\frac{x^2}{x^2-4} - \frac{4x}{x^2-4} + \frac{4}{x^2-4}$
29. $\frac{5x-y}{7x+2y} - \frac{3x-y}{7x+2y} - \frac{5y}{7x+2y}$
30. $\frac{z}{xy} + \frac{y}{xz} - \frac{x}{yz}$
31. $\frac{7}{2x} - \frac{4}{3x^2} + \frac{11}{36}$
32. $\frac{2x-y}{3(x+y)} - \frac{x+2y}{7(x+y)} + \frac{7x-y}{6(x+y)}$
33. $\frac{2x+7}{6x+12} - \frac{x-3}{3x+6} - \frac{15}{9x+18}$
34. $\frac{x-5}{12} - \frac{x+2}{9} + \frac{x-5}{24}$
35. $\frac{7}{z} - \frac{35+6z}{z^2+5z} - \frac{1}{z+5}$
36. $\frac{3}{a-1} + \frac{2}{a+1} - \frac{5a+1}{a^2-1}$
37. $\frac{2x}{15x+12} - \frac{1}{5x-4} - \frac{4x+16}{75x^2-48}$
38. $\frac{2}{a^2-b^2} - \frac{a+b}{a^3-b^3}$
39. $\frac{3x+3}{2x^2+6x} - \frac{x-4}{x^2-x-12} + \frac{x+1}{3x^2-12x}$
40. $\frac{m-5}{2m^2+2m} + \frac{3m+20}{8m^2} - \frac{5}{m^3+m^2}$
41. $\frac{x+2y}{x^2-y^2} + \frac{6x}{x^2+2xy+y^2} - \frac{4}{x-y}$
42. $\frac{2a-5}{3a^2-3a} - \frac{a+5}{a^2-1} + \frac{4}{a-1}$
43. $\frac{4}{m+5} - \frac{4m-31}{2m^2+3m-35} + \frac{2m+25}{3m^2+15m}$
44. $\frac{7x-21y}{2x^2-15xy+22y^2} - \frac{15y-4x}{3x^2-5xy-2y^2} + \frac{7x}{6x^2-31xy-11y^2}$
45. $\frac{a-9}{a^2-9} + \frac{a+9}{a^2+3a} + \frac{a+3}{a^2-3a}$
46. $\frac{3y-17}{2y^2+4y-30} + \frac{y+21}{y^2+2y-15} + \frac{y+5}{2y^2-12y+18}$

47. $\dfrac{13d}{8h^2+14hd-15d^2}+\dfrac{8d}{4h^2+4hd-15d^2}-\dfrac{15d-8h}{8h^2-18hd+9d^2}$

48. $\dfrac{x+6}{x}-\dfrac{x+7}{x+1}+\dfrac{6}{x^2+3x+2}$

49. $-\dfrac{t+1}{2t^2-2t}+\dfrac{t-6}{2t^2-12t}+\dfrac{2t}{t^2-7t+6}$

50. $\dfrac{2}{t}+\dfrac{5}{t^2}-\dfrac{t+3}{t^2-t}+\dfrac{4}{t-1}$

4-20 MAS TECNICAS DE SUMA Y RESTA

Es preciso estar alerta de nuevo para aprovechar el hecho de que $x-y=-(y-x)$ y $\dfrac{-x}{y}=\dfrac{x}{-y}=-\dfrac{x}{y}$.

Ejemplo (a) $\dfrac{5}{x-3}+\dfrac{7}{3-x}$.

Solución:

$$\frac{5}{x-3}+\frac{7}{3-x}=\frac{5}{x-3}+\frac{7}{-(x-3)}$$
$$=\frac{5}{x-3}-\frac{7}{x-3}$$
$$=\frac{-2}{x-3}\quad \text{o} \quad -\frac{2}{x-3}\quad \text{o}\quad \frac{2}{3-x}$$

Recordemos que $2\frac{3}{5}$ es un número de los llamados *números mixtos*. Del mismo modo, la suma o diferencia de un polinomio y una fracción, tales como $x+3+\dfrac{5}{x-5}$ o $6-\dfrac{x-xy}{5xy}$, se llama *expresión mixta*. Combinar tales expresiones para formar una sola fracción es simplemente un problema de suma o resta.

Ejemplo (b) Expresar $2\frac{3}{5}$ como una fracción.

Solución:

$$2\frac{3}{5}=\frac{2}{1}+\frac{3}{5}$$
$$=\frac{2\cdot 5}{1\cdot 5}+\frac{3}{5}$$
$$=\frac{10}{5}+\frac{3}{5}$$
$$=\frac{13}{5}$$

Ejemplo (c) Expresar $x+3+\dfrac{6}{x-5}$ como una sola fracción.

Solución:

$$x+3+\frac{6}{x-5}=\frac{x+3}{1}+\frac{6}{x-5}$$
$$=\frac{(x+3)(x-5)}{1\cdot(x-5)}+\frac{6}{x-5}$$
$$=\frac{(x+3)(x-5)+6}{x-5}$$
$$=\frac{x^2-2x-9}{x-5}$$

Nótese, sin embargo, que en una expresión mixta el denominador común siempre es el denominador de la fracción. De ahí que el *polinomio se multiplica por el denominador de la fracción y se suma (o se resta) al numerador*. Esto proporciona una muy conveniente regla que usar para expresar una expresión mixta como una sola fracción. Recordemos que dicha regla es la que se usa en aritmética para escribir $2\frac{3}{5}$ como una sola fracción:

$$2\frac{3}{5}=\frac{2\cdot 5+3}{5}=\frac{10+3}{5}=\frac{13}{5}$$

Ejemplo (d) Escribir $6-\frac{1-xy}{5xy}$.

Solución:

$$6-\frac{1-xy}{5xy}=\frac{6\cdot 5xy-(1-xy)}{5xy}$$
$$=\frac{30xy-(1-xy)}{5xy}$$
$$=\frac{31xy-1}{5xy}$$

Si los denominadores de dos fracciones que se han de sumar o restar *no tienen factor común* (que no sea 1 o -1), por lo cual el mínimo común múltiplo es su producto, el teorema $\frac{w}{x}+\frac{y}{z}=\frac{wz+xy}{xz}$ puede usarse en forma ventajosa.

Ejemplo (e)

$$\frac{6x}{x-3}+\frac{5x}{2x+1}=\frac{6x(2x+1)+5x(x-3)}{(x-3)(2x+1)}$$
$$=\frac{12x^2+6x+5x^2-15x}{(x-3)(2x+1)}$$
$$=\frac{17x^2-9x}{(x-3)(2x+1)}$$

Conviene insistir en que este método solo se debe usar *cuando los denominadores no tienen factores en común*; de otro modo, el problema puede tomar propor-

ciones inconvenientes. Por ejemplo, si se ignora esta advertencia, al resolver el Ejemplo (d) de la Sección 4-19, se tiene

$$\frac{3x}{x^2-4}-\frac{2}{x^2-5x+6}=\frac{3x(x^2-5x+6)-2(x^2-4)}{(x^2-4)(x^2-5x+6)}$$
$$=\frac{3x^3-15x^2+18x-2x^2+8}{(x^2-4)(x^2-5x+6)}$$

en donde notamos que reducir la fracción a sus términos más simples está más allá de nuestro alcance.

4-9 Ejercicios

Efectuar las operaciones indicadas y expresar el resultado como una fracción reducida a sus términos más simples.

1. $\frac{3}{x-5}+\frac{8}{5-x}$
2. $\frac{8+x}{x-3}-\frac{2x^2-5x}{9-x^2}$
3. $y+\frac{6}{y}$
4. $8-\frac{x+3}{2x-5}$
5. $\frac{x}{18}+\frac{5x}{12}$
6. $\frac{5}{x}-\frac{x}{y}$
7. $8x+\frac{x-9}{x+7}$
8. $x+3-\frac{10}{x}$
9. $x+2-\frac{15}{x+2}$
10. $\frac{10}{x+3}-x$
11. $2a+\frac{4a}{a-5}-3$
12. $\frac{4}{x}-x+3$
13. $\frac{x-1}{x+1}-x$
14. $\frac{x+xy}{y}-x$
15. $x+\frac{y^2}{x}-y$
16. $x^2-3x+5-\frac{14}{2x+5}$
17. $\left(a+2+\frac{7}{a-5}\right)\left(a-2-\frac{5}{a+2}\right)$
18. $\left(\frac{m}{n}-\frac{n}{m}\right)\div\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)$
19. $\left(1+\frac{1}{x}\right)\div\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$
20. $\frac{3}{x+1}-\frac{5}{x}$
21. $\frac{2x}{x^3-1}-\frac{8x}{1-x^3}$
22. $\frac{4}{a-1}-\frac{3a}{a+1}$
23. $\frac{5}{1-2a}-\frac{9}{8a-4}-\frac{5}{6-12a}$
24. $\frac{1}{x-3}-\frac{2}{x+3}+\frac{2x}{9-x^2}$
25. $\frac{x+3}{x^2-x}-\frac{4}{x}+\frac{1}{2-3x+x^2}$
26. $-\frac{8}{16-25b^2}-\frac{1}{5b-4}$
27. $\frac{7-y}{2y^2+14y}-\frac{y+7}{14y-2y^2}-\frac{2y}{49-y^2}$
28. $\frac{3a^2-4b^2}{18a^2+24b^2}+\frac{8a^2b^2}{9a^4-16b^4}-\frac{3a^2+4b^2}{9a^2-12b^2}$
29. $\frac{3}{x-5}-\frac{8}{x+5}-\frac{1-2x}{5-x}-\frac{2x}{5+x}$
30. $\frac{x-3}{x+3}-\frac{x+3}{x-3}$
31. $\frac{3-x}{6x^2+19x+10}-\frac{2x+5}{6+7x-3x^2}+\frac{3x+2}{2x^2-x-15}$
32. $\frac{2}{1-y^2}-\frac{y+1}{2-2y}-\frac{y-1}{2y+2}$
33. $\frac{3x-4}{3x+4}-1$
34. $1+\frac{1}{t-3}+\frac{3}{t^2+3t}$

35. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{1-x^2}$

36. $\dfrac{1}{x^3-1}+\dfrac{x}{1-x^2}-\dfrac{1}{1-x}$

37. $\dfrac{6x}{5+9x-2x^2}+\dfrac{x+1}{1-4x^2}-\dfrac{1-x}{2x^2-11x+5}$

38. $5x+4+\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}$

39. $x-4y+\dfrac{16y^2}{x+4y}-\dfrac{x^2}{4y-x}$

40. $\dfrac{4}{ab-2b+6-3a}-\dfrac{11}{2a-2b-4+ab}$

41. $\dfrac{c}{ac-bc+bd-ad}-\dfrac{d}{ac-bc-bd+ad}$

42. $\dfrac{a^2+4}{a^3-27}+\dfrac{7}{3-a}-\dfrac{a-5}{q^2+3a+9}$

4-21 SIMPLIFICACION DE FRACCIONES COMPLEJAS

Una fracción que tiene numerador o denominador (o ambos) que son a su vez fracciones, como en

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{15}} \qquad \text{o} \qquad \frac{x^2-\frac{1}{x}}{x+1+\frac{1}{x}}$$

se llama *fracción compleja*. En general, es muy deseable simplificar una fracción compleja para obtener un numerador y un denominador que sean enteros ambos o que sean polinomios.

Una forma en que se puede simplificar una fracción compleja es multiplicando su numerador y su denominador por un mínimo común múltiplo de sus denominadores, aplicando el teorema $\frac{xz}{yz}=\frac{x}{y}\cdot$ Otra forma es por división, usando la regla $\frac{w}{x}\div\frac{y}{z}=\frac{w}{x}\cdot\frac{z}{y}\cdot$ Ambos métodos son importantes y ambos deben aprenderse.

Ejemplo (a) Simplificar $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{15}}$.

Solución: Según el primero de los dos métodos antes descritos tenemos

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{15}}=\frac{\frac{2}{3}\cdot 15}{\frac{4}{15}\cdot 15}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$

Si se usa el segundo método, se obtiene

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{15}}=\frac{2}{3}\div\frac{4}{15}=\frac{2}{3}\cdot\frac{15}{4}=\frac{5}{2}$$

Ejemplo (b) Simplificar $\dfrac{x^2 - \dfrac{1}{x}}{x + 1 + \dfrac{1}{x}}$.

Solución por el método I: Un mínimo común múltiplo de los denominadores en el numerador y en el denominador de la fracción dada, es x. Multiplicando numerador y denominador de la fracción compleja por x, tenemos

$$\frac{x^2 - \dfrac{1}{x}}{x + 1 + \dfrac{1}{x}} = \frac{\left(x^2 - \dfrac{1}{x}\right) \cdot x}{\left(x + 1 + \dfrac{1}{x}\right) \cdot x} = \frac{x^3 - 1}{x^2 + x + 1} = x - 1$$

Solución por el método II: Se simplifican el numerador y el denominador de la fracción compleja por separado, y se efectúa después la división indicada lo que resulta

$$\frac{x^2 - \dfrac{1}{x}}{x + 1 + \dfrac{1}{x}} = \frac{\dfrac{x^3 - 1}{x}}{\dfrac{x^2 + x + 1}{x}} = \frac{x^3 - 1}{x} \cdot \frac{x}{x^2 + x + 1}$$

$$= \frac{(x - 1)\cancel{(x^2 + x + 1)}}{\cancel{x}} \cdot \frac{\cancel{x}}{\cancel{x^2 + x + 1}} = x - 1$$

Ejemplo (c) Simplificar $\dfrac{\dfrac{x^2 - 5}{x^2 - 1} - \dfrac{1}{x - 1}}{1 - \dfrac{4}{x + 1}}$.

La solución por el método I le queda al estudiante para práctica.

Solución por el método II:

$$\frac{\dfrac{x^2 - 5}{x^2 - 1} - \dfrac{1}{x - 1}}{1 - \dfrac{4}{x + 1}} = \frac{\dfrac{x^2 - 5}{(x + 1)(x - 1)} - \dfrac{1}{x - 1}}{1 - \dfrac{4}{x + 1}}$$

$$= \frac{\dfrac{x^2 - 5 - (x + 1)}{(x + 1)(x - 1)}}{\dfrac{x + 1 - 4}{x + 1}}$$

$$= \frac{\dfrac{x^2 - x - 6}{(x + 1)(x - 1)}}{\dfrac{x - 3}{x + 1}}$$

$$= \frac{\cancel{(x - 3)}(x + 2)}{\cancel{(x + 1)}(x - 1)} \cdot \frac{\cancel{x + 1}}{\cancel{x - 3}}$$

$$= \frac{x + 2}{x - 1}$$

4-10 Ejercicios

En los Ejercicios del 1 al 10, simplificar cada una de las fracciones complejas dadas usando ambos métodos.

1. $\dfrac{2+\frac{5}{6}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}$

2. $\dfrac{3}{\frac{1}{4}+\frac{2}{3}}$

3. $\dfrac{1+\frac{1}{x}}{x-\frac{1}{x}}$

4. $\dfrac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{\frac{a^2}{b^2}-\frac{b^2}{a^2}}$

5. $\dfrac{\frac{5}{2ab}-\frac{1}{a^2}}{\frac{2}{a}+\frac{1}{b^2}}$

6. $\dfrac{4y}{1-\frac{1-2y^2}{1+2y^2}}$

7. $\dfrac{\frac{2}{x^2}-\frac{x}{4}}{x^2+2x+4}$

8. $\dfrac{\frac{1}{8}+\frac{1}{z^3}}{\frac{1}{z^3}-\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{4z}}$

9. $\dfrac{x+y-\frac{15y^2}{x-y}}{x+12y-\frac{12xy}{x-y}}$

10. $\dfrac{\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-2}}{\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-2}}$

Usar cualquier método conveniente para simplificar cada una de las expresiones dadas en los Ejercicios del 11 al 19.

11. $\dfrac{\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}}$

12. $2x-\dfrac{1}{x-\frac{4}{x}}$

13. $\dfrac{\frac{2}{1-x}-\frac{3}{2}}{\frac{1}{x-1}+\frac{1}{4}-\frac{3x}{2}}$

14. $\dfrac{x^2-4y^2}{1-\frac{2x+y}{x-y}}$

15. $\dfrac{\frac{x}{x-4}+\frac{1}{x-1}}{\frac{x}{x-1}+\frac{2}{x-3}}$

16. $\dfrac{\frac{1}{x-2}-\frac{2}{x-1}}{\frac{2}{x-3}-\frac{3}{x-2}}$

17. $\dfrac{\frac{a-x}{a}+\frac{b-y}{b}+\frac{c-z}{c}}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-3}$

18. $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}}}}$

19. $x-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\frac{1}{1-x}}}$

20. Si $x=\dfrac{1}{a-b}$ y $y=\dfrac{1}{a+b}$, demostrar que $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\dfrac{a^2+b^2}{2ab}$.

21. Si $x=\dfrac{1-3y}{y+1}$, hallar $\dfrac{1-3x}{x+1}$ en términos de y.

22. Si $y=\dfrac{1-2x}{x-1}$, hallar $\dfrac{y-1}{1-2y}$ en términos de x.

4-22 SOLUCION DE ECUACIONES

El estudiante de álgebra de nivel intermedio tiene dos habilidades importantes que desarrollar: efectuar operaciones en expresiones algebraicas y hallar el conjunto verdad o el conjunto solución de una expresión. Concentraremos nuestra atención sobre una fase de la última: Hallar los conjuntos solución de ecuaciones, es decir, resolver ecuaciones.

Recordemos de los Capítulos 2 y 3 que los postulados de la igualdad juegan un papel importante en la solución de ecuaciones. Mediante su uso estamos capacitados para aislar la variable en un lado de la ecuación. Pueden ser necesarios muchos pasos, cada uno de los cuales produce una ecuación diferente de las previas por el uso de un postulado o un teorema. Si dichos pasos son reversibles, entonces las ecuaciones son equivalentes y, por tanto, sus conjuntos verdad son los mismos.

Ejemplo (a) $6x - 7 = 2x + 29 \rightarrow 4x - 7 = 29$ (se sumó $-2x$ a ambos lados). Pero también: $4x - 7 = 29 \rightarrow 6x - 7 = 2x + 29$ (se suman $2x$ a ambos lados). Esto significa que $6x - 7 = 2x + 29 \leftrightarrow 4x - 7 = 29$ (¿por qué?). Luego los conjuntos verdad son iguales. Pasos semejantes nos conducen a $6x - 7 = 2x + 29 \leftrightarrow x = 9$. Por tanto, la ecuación original tiene conjunto verdad $= \{9\}$. ¿Ve usted en qué forma la existencia y unicidad del inverso aditivo hacen reversibles los pasos?

Generalmente, se debe demostrar cada paso en la solución, aunque a medida que se gana en destreza se puede omitir alguno de ellos. Cuando se comprenda haber llegado a una solución incorrecta, regresar para demostrar cada paso y eliminar las dificultades.

Ejemplo (b) Hallar el conjunto solución de $6x - 7 = 2x + 29$.

Solución:

$$6x - 7 = 2x + 29$$
$$-2x + (6x - 7) = -2x + (2x + 29)$$
$$4x - 7 = 29$$
$$(4x - 7) + 7 = 29 + 7$$
$$4x = 36$$
$$\frac{4x}{4} = \frac{36}{4}$$
$$x = 9$$

El conjunto solución es $\{9\}$.

Comprobación:

$$6 \cdot 9 - 7 \stackrel{?}{=} 2 \cdot 9 + 29$$
$$54 - 7 \stackrel{?}{=} 18 + 29$$
$$47 = 47$$

Nótese que la comprobación es una forma de ver que cada elemento del conjunto solución hace que el lado izquierdo de la ecuación sea el mismo número real que el lado derecho.

Una ecuación literal es una ecuación en la que, además de la variable por resolver, aparecen otras letras que deben interpretarse también como números reales.

Según eso, los elementos del conjunto solución serán expresiones algebraicas que contendrán otras letras.

Ejemplo (c) Resolver para x: $ax = bx + c$.

Solución:

$$ax = bx + c$$
$$ax - bx = (bx + c) - bx$$
$$(a - b)x = c$$
$$\frac{(a-b)x}{a-b} = \frac{c}{a-b}$$
$$x = \frac{c}{a-b}, \quad \text{en donde } a \neq b$$

Al resolver ecuaciones con fracciones, uno de los primeros pasos debe ser multiplicar ambos lados de la ecuación por un mínimo común múltiplo de todos los denominadores para eliminar las fracciones de la ecuación.

Ejemplo (d) Hallar el conjunto solución de $\frac{x-5}{6} + \frac{1}{2} = \frac{4x+2}{9}$.

Solución: Multipliquemos ambos lados por 18:

$$18\left(\frac{x-5}{6} + \frac{1}{2}\right) = 18 \cdot \frac{4x+2}{9}$$
$$18 \cdot \frac{x-5}{6} + 18 \cdot \frac{1}{2} = 18 \cdot \frac{4x+2}{9}$$
$$3(x-5) + 9 = 2(4x+2)$$

La ecuación se ha transformado en una ecuación equivalente, pero sin fracciones, por lo que resulta de mucho más fácil solución. Dejamos el resto de la solución al estudiante, que debe obtener $\{-2\}$.

Observemos que $x = -2$ satisface la ecuación original

$$\frac{-2-5}{6} + \frac{1}{2} \stackrel{?}{=} \frac{4(-2)+2}{9}$$
$$\frac{-7}{6} + \frac{1}{2} \stackrel{?}{=} \frac{-8+2}{9}$$
$$-\frac{4}{6} \stackrel{?}{=} \frac{-6}{9}$$
$$-\frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$$

Ejemplo (e) Resolver para d: $S = \frac{1}{2}n[2a + (n-1)d]$.

Solución:

$$S = \frac{1}{2}n[2a + (n-1)d]$$
$$2 \cdot S = 2 \cdot \frac{1}{2}n[2a + (n-1)d]$$
$$2S = n[2a + nd - d]$$

$$2S = 2an + n^2d - nd$$
$$2S - 2an = d(n^2 - n)$$
$$d = \frac{2S - 2an}{n^2 - n}$$
$$d = \frac{2(S - an)}{n(n - 1)}$$

Generalmente es más fácil revisar los pasos de la solución de una ecuación literal que comprobarla por sustitución.

Otra forma de comprobar consiste en dar valores numéricos a las literales y sustituirlos tanto en la ecuación original como en la solución. Si $n = 6$, $a = 0$ y $d = 2$, por ejemplo, obtenemos $S = \frac{1}{2} \cdot 6[2 \cdot 0 + (6 - 1) \cdot 2] = 30$. Por otra parte, haciendo $S = 30$, $a = 0$ y $n = 6$ en la solución, se tiene $d = \frac{2(30 - 0 \cdot 6)}{6(6 - 1)} = 2$, que coincide con el valor $d = 2$, tomado antes.

4-23 SOLUCION DE DESIGUALDADES

Con frecuencia es necesario encontrar el conjunto verdad de una desigualdad. Eso es lo que se entiende por resolver una desigualdad. El procedimiento es muy semejante al que se sigue para resolver una ecuación, pero haciendo uso de los postulados de orden y de teoremas basados en aquéllos, en lugar de los postulados de la igualdad.

Sumar un número a ambos lados de una desigualdad nos da una desigualdad equivalente, como lo afirman los teoremas de la Sección 3-4:

$$x < y \leftrightarrow x + z < y + z$$

y

$$x > y \leftrightarrow x + z > y + z$$

Multiplicar ambos lados de una desigualdad por un número también da una desigualdad equivalente:

Si $z > 0$,

$$x < y \leftrightarrow xz < yz$$
$$x > y \leftrightarrow xz > yz$$

pero si $z < 0$,

$$x < y \leftrightarrow xz > yz$$
$$x > y \leftrightarrow xz < yz$$

Es muy importante observar que si se multiplican ambos lados de una desigualdad por un *número negativo*, es necesario invertir el sentido de la desigualdad (cambiar un $<$ por un $>$, y viceversa).

Ejemplo Hallar el conjunto verdad de $2x + 7 < 5x - 8$.

Solución:

$$2x + 7 < 5x - 8$$
$$-5x + (2x + 7) < -5x + (5x - 8)$$
$$-3x + 7 < -8$$
$$-3x + 7 - 7 < -8 - 7$$
$$\left.\begin{aligned} -3x &< -15 \\ -\frac{1}{3}(-3x) &> -\frac{1}{3}(-15) \end{aligned}\right\} \text{(obsérvese el cambio de < a > debido a la multiplicación por un número negativo)}$$
$$x > 5$$

Por lo que el conjunto solución es $\{x \in R \mid x > 5\}$.

4-11 Ejercicios

Resolver las ecuaciones dadas en los Ejercicios del 1 al 29.

1. $2y + 3 = 7y - 10$
2. $4x - 2 = 3x + 6$
3. $3m + 11 = 4 + 5m$
4. $\sqrt{5}h - 2 = 1 + h$
5. $7x + \sqrt{3} = 2$
6. $7(2x - 3) = 5 + 4(x - 2)$
7. $9 - 2[a - 3(a - 4) - 5] = 1 - 5(a - 2)$
8. $(3x - 2)(x - 5) = 4 + 3(x - 2)(x + 7)$
9. $8x - (7x^2 + 2) = 7(5 - x)(3 + x)$
10. $3x + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}x - 7$
11. $5\left(3 - \frac{1}{5}x\right) = 14\left(x - \frac{1}{7}\right)$
12. $7 - \frac{1}{3}(6x - 3) = \frac{5}{2}(2x + 4)$
13. $7x - 9 = \frac{x}{4}$
14. $8x + \frac{11}{3} = \frac{1}{5}x - 7$
15. $\frac{3a}{2} + \frac{a - 4}{4} = 5 - \frac{a - 2}{4}$
16. $\frac{x^2 + 2x}{3} - x = \frac{x(x - 1)}{3}$
17. $\frac{9b + 1}{15} = \frac{2}{3}$
18. $|x| = 15$. (*Sugerencia*: De la definición de valor absoluto de $|x|$, si $x > 0$, tenemos que $x = 15$; si $x < 0$, entonces $-x = 15$.)
19. $|x + 1| = 5$
20. $3 + |x| = 4$
21. $|7x - 15| = 0$
22. $|14x - 97| = -8$
23. $5 - |x + 3| = 6$
24. $\left|x - \frac{2}{3}\right| = \frac{5}{6}$
25. $\left|3x - \frac{2}{5}\right| = 28$
26. $\left|4x - \frac{1}{3}\right| = 0$
27. $\frac{1}{3}(x - 2) - \frac{1}{4}(2x - 3) = \frac{1}{5}(5x - 7)$
28. $\frac{1}{2}(3x - 4) - \frac{2}{3}(x - 6) = \frac{1}{6}(x - 6)$
29. $\frac{x - 1}{2} - \frac{x - 2}{3} - \frac{x + 3}{2} = 0$

En los Ejercicios del 30 al 34 resolver para la variable especificada.

30. $I = prt$ para t
31. $A = \frac{1}{2}bh$ para h
32. $F = \frac{9}{5}C + 32$, para C
33. $3a - x = 5(x + 7a)$ para a
34. $(y - m)(y - n) = (y - h)(y - k)$ para y

En los Ejercicios del 35 al 40, resolver explícitamente para x.

35. $3x + 2y = 5$
36. $\frac{x}{4} = y + 3$
37. $ax + by = c$
38. $y = mx + b$
39. $y^2 = 4ax$
40. $3x + 2 = 5y + 7$

En los Ejercicios del 41 al 48, resolver explícitamente para y.

41. $5x + 9y = 4$
42. $x = -\frac{7}{3}y + 1$
43. $6(x + y) = \frac{2}{3}(5x - 4y)$
44. $y - a = m(x - b)$
45. $ax + by = 2y + 3$
46. $7 + 3(x - 2y) = 5 - (x + y)$
47. $x^2 - y = 2ax$
48. $3x - 4[2y - (x - 2y)] = 0$

Resolver las desigualdades dadas en los Ejercicios del 49 al 71 y graficar el conjunto solución sobre una recta numérica.

49. $4x + 5 < 17$
50. $4x + 1 > 7x - 5$
51. $5x - 7 < 9x$
52. $7x - 6 \geq 4 + 17(x - 5)$
53. $\frac{4x + 3}{3} > x + 2$
54. $2(x + 3) \geq 5(x - 4)$
55. $\frac{1}{3}x - \frac{1}{2} \geq 4 - \frac{1}{6}x$
56. $\frac{2}{5}m - \frac{1}{3} < \frac{5}{8}m$
57. $7(3a - 1) \geq 4 + 5(2a + 1)$
58. $\frac{y - 3}{5} > \frac{1 - y}{4}$
59. $\frac{3(y + 2)}{4} < \frac{-5(y - 2)}{3}$
60. $|x + 1| < 5$ (*Sugerencia*: Véase el Ejercicio 27 de los Ejercicios 3-5.)
61. $|x + 1| > 5$
62. $|3x + 1| < 5$
63. $|5x - 1| > 0$
64. $|4x - 5| < -2$
65. $|3x + 2| < 0$
66. $\left|4 - \frac{a}{7}\right| \leq 10$
67. $5x > x + 2$ y $3x + 1 > 8$
68. $5x + 7 < 2$ o $3x - 4 > 8$
69. $3 + x > 12$ o $7 < x$
70. $-5 < x + 5 < 4$
71. $-3 < 3x + 2 < -1$
72. El perímetro de un rectángulo de lados a y b está dado por $P = 2a + 2b$. Resolver para b.
73. La superficie total de un cilindro circular recto de radio r y altura h está dado por $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$. Resolver para h.
74. El promedio de dos números a y b es $A = \frac{a + b}{2}$. Resolver para b.
75. El área de un trapecio de altura h y bases paralelas b_1 y b_2 está dada por $A = \frac{h}{2}(b_1 + b_2)$.
(a) Resolver para h. (b) Resolver para b_1.

4-24 ECUACIONES FRACCIONALES

Una ecuación se llama *ecuación fraccional* cuando la variable cuyo conjunto verdad que es el que se busca, aparece en el denominador. El primer paso para su solución es eliminar las fracciones multiplicando ambos lados por un mínimo común múltiplo de los denominadores.

Ejemplo (a) Hallar el conjunto solución de $\frac{x - 1}{2x - 8} - \frac{1}{2} = \frac{2x}{x^2 - 16}$.

Solución: Después de factorizar los denominadores vemos que un mínimo común múltiplo de ellos es $2(x - 4)(x + 4)$ por lo que multiplicando ambos lados por él se tiene:

$$2(x - 4)(x + 4)\left[\frac{x - 1}{2(x - 4)} - \frac{1}{2}\right] = 2(x - 4)(x + 4) \cdot \frac{2x}{(x - 4)(x + 4)}$$

$$2(x - 4)(x + 4) \cdot \frac{x - 1}{2(x - 4)} - 2(x - 4)(x + 4) \cdot \frac{1}{2} = 2(x - 4)(x + 4) \cdot \frac{2x}{(x - 4)(x + 4)}$$

$$(x + 4)(x - 1) - (x - 4)(x + 4) = 2 \cdot 2x$$

$$x^2+3x-4-(x^2-16)=4x$$
$$x^2+3x-4-x^2+16=4x$$
$$x=12$$

El conjunto solución es $\{12\}$.

Comprobación:

$$\frac{12-1}{2\cdot 12-8}-\frac{1}{2}\overset{?}{=}\frac{2\cdot 12}{12^2-16}$$

$$\frac{11}{16}-\frac{1}{2}\overset{?}{=}\frac{24}{128}$$

$$\frac{3}{16}=\frac{3}{16}$$

Ejemplo (b) Hallar el conjunto solución de $1-\frac{2x-11}{x-2}=\frac{7}{x-2}$.

Solución: Un mínimo común múltiplo de los denominadores es $x-2$, de modo que multiplicamos ambos lados por él.

$$(x-2)\left[1-\frac{2x-11}{x-2}\right]=(x-2)\cdot\frac{7}{x-2}$$

$$(x-2)\cdot 1-(x-2)\cdot\frac{2x-11}{x-2}=(x-2)\cdot\frac{7}{x-2}$$

$$x-2-(2x-11)=7$$
$$x-2-2x+11=7$$
$$-x+9=7$$
$$-x=-2$$
$$x=2$$

Al tratar de comprobar esta posible solución, notamos inmediatamente que $x = 2$ hace 0 al denominador. Luego, $x = 2$ no es una solución. Como era el único candidato, el conjunto solución es $\{\ \}$.

Nos preguntamos ahora: ¿Por qué el conjunto solución $\{2\}$, de $x - 2 - (2x - 11) = 7$ no es el mismo que el conjunto solución $\{\ \}$ de la ecuación original? Una respuesta es que al escribir la expresión abierta $1-\frac{2x-11}{x-2}=\frac{7}{x-2}$ el conjunto satisfactor de la variable x no puede contener al 2 porque la ecuación ni siquiera es una proposición (es decir, no es falsa o verdadera) si $x = 2$. Podríamos pensar lo siguiente: conjunto satisfactor $= \{x \in R \mid x \neq 2\}$.

Otra respuesta es que el paso en el que multiplicamos ambos lados por $x - 2$ no es reversible si $x = 2$. Para deshacerlo tendríamos que dividir ambos lados entre $x - 2$, pero esto sería dividir entre 0.

En realidad, como regla general, la multiplicación de una ecuación por una expresión que contiene a la variable no es reversible si la expresión se hace 0 para algún número del conjunto solución de la nueva ecuación. A causa de esto, es doblemente importante verificar todos los elementos del conjunto solución en un caso como ése, ya que aun cuando no se haya cometido ningún error, uno o más de ellos pueden no ser válidos.

4-12 Ejercicios

Resolver cada uno de los ejercicios siguientes.

1. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}x$
2. $\frac{r}{4}-\frac{r-5}{2}=r-\frac{1}{8}$
3. $\frac{x+4}{5}-7=3-\frac{x+2}{4}$
4. $\frac{x+4}{3}<2+\frac{x}{2}$
5. $\frac{2x-1}{5}<\frac{1-2x}{3}$
6. $y-\frac{3}{4}>2\left(\frac{y}{3}-\frac{1}{2}\right)$
7. $\frac{3}{x}-\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}$
8. $\frac{6}{3y-1}-\frac{1}{y}=\frac{4}{y(3y-1)}$
9. $\frac{5}{x-1}-\frac{3}{x+2}=\frac{x+4}{(x-1)(x+2)}$
10. $\frac{x+2}{x-1}+\frac{1}{5}=\frac{3}{2x-2}$
11. $\frac{3}{m+1}-\frac{2}{m}=\frac{1}{m^2+m}$
12. $\frac{2}{r^2+2r}+\frac{1}{r+2}=\frac{1}{r}$
13. $\frac{2s+1}{s^2-4}-\frac{1}{s+2}=\frac{1}{s-2}$
14. $\frac{x+5}{x+6}=\frac{x+9}{x+7}$
15. $\frac{y}{y-1}-\frac{3}{y+2}=1$
16. $\frac{3y}{y-3}=4+\frac{9}{y-3}$
17. $\frac{5}{3x-12}=\frac{x-2}{2x-8}-5$
18. $\frac{1}{x-1}+1=\frac{x^2}{x^2+3x-4}$
19. $\frac{p}{p-1}+\frac{2}{1-p}=2$
20. $\frac{3}{m-2}+\frac{2m}{2-m}=-3$
21. $\frac{3}{2x^2+3x-2}+\frac{2x-5}{x+2}=\frac{4x+2}{2x-1}$
22. $\frac{3-x}{1-x}-1=\frac{5-x}{7-x}-\frac{x^2-3}{x^2-8x+7}$
23. $\frac{2k-3}{k+2}-\frac{k-5}{3-k}=\frac{2k-3k^2}{6+k-k^2}$
24. $\frac{1}{4-x}+\frac{x}{x^2-3x-4}-\frac{4}{x+1}=0$
25. $\frac{3}{m^2+m-6}+\frac{4}{3-5m-2m^2}=0$
26. $\frac{5}{x-2}+\frac{1}{7-3x}=\frac{3}{6x-14}$
27. $\frac{3-t}{t^2+t-2}-\frac{t-1}{t^2+5t+6}=\frac{2t-4}{3-2t-t^2}$

4-25 PROBLEMAS DE PLANTEO

Un problema de planteo describe en palabras de nuestro idioma una situación que comprende cantidades conocidas y desconocidas y ciertas relaciones entre ellas. Tales problemas representan el puente entre la teoría algebraica y la aplicación de dicha teoría a situaciones de la vida real. La labor del estudiante de matemáticas es traducir esos problemas a expresiones matemáticas que sean fáciles de resolver, tales como ecuaciones, y resolverlas.

Ejemplo (a) Un terreno rectangular tiene un perímetro de 540 m. Su longitud es 30 m mayor que el doble de su ancho. Encontrar sus dimensiones.

Solución: Encontrar las dimensiones significa encontrar el largo y el ancho. Decidamos que sea x el número real que exprese el ancho en metros.

Sea x = número de metros del ancho.

Entonces $30 + 2x$ = número de metros del largo.

Notemos que esto último es tan solo una traducción palabra por palabra de la segunda oración: «30 más que el doble del ancho» *es* la longitud. «Más que» se traduce por +; «el doble del ancho» se traduce por $2x$; «es» se traduce por =.

Ahora necesitamos conocer la fórmula del perímetro de un rectángulo: $P = 2L + 2A$. Tenemos expresiones o números para todas las cantidades en consideración, de modo que las sustituimos en la fórmula. Con ello obtenemos

$$540 = 2(30 + 2x) + 2x$$

que es la ecuación necesaria. Al resolverla nos da

$$540 = 60 + 4x + 2x$$
$$480 = 6x$$
$x = 80$, luego, ancho = 80 m
$$30 + 2x = 30 + 2 \cdot 80$$
$$= 30 + 160$$
$= 190$, luego, largo = 190 m

Esto satisface al problema, puesto que

$$2 \cdot 190 + 2 \cdot 80 = 380 + 160 = 540.$$

Observemos lo que hicimos al resolver este problema de planteo.

1. Entendimos lo que debíamos encontrar y representamos por x una de las cantidades deseadas.
2. Escribimos una expresión algebraica en x para cada una de las demás cantidades buscadas.
3. Usamos la información dada o un hecho matemático conocido para construir una ecuación (ésta es la parte más difícil).
4. Resolvimos la ecuación (la parte más fácil).
5. Comprobamos para asegurarnos que la solución satisfacía el enunciado original del problema.

Muchos problemas de planteo comprenden *razones*, tales como costo por kilo, precio por unidad o kilómetros por hora. En tales problemas se usa una fórmula sencilla del tipo monto = razón × base. Por ejemplo, la conocida fórmula distancia = velocidad × tiempo es de ese tipo.

Ejemplo (b) Un chófer conduce diariamente a una velocidad promedio de 60 kilómetros por hora en carretera y a 24 kilómetros por hora en ciudad o en caminos vecinales. Su tiempo diario de manejo sobre un recorrido de 330 kilómetros fue de 7 horas. ¿Cuánto tiempo condujo sobre carretera y cuánto sobre otros caminos?

Solución:
Sea x = número de horas sobre carretera
$7 - x$ = número de horas sobre otros caminos

Definamos x y $7 - x$ como los tiempos

Nuestro plan consiste en representar la distancia de cada tipo de manejo mediante una expresión en x y después sustituirla en la fórmula

distancia sobre carretera + distancia en otros caminos = distancia total

Al llegar a este punto necesitamos dar una expresión que represente la distancia de cada tipo de recorrido. Usamos la fórmula distancia = velocidad × tiempo. Una velocidad de 60 kilómetros por hora durante x horas da una distancia = $60x$.

$60x$ = número de kilómetros sobre carretera
$24(7 - x)$ = número de kilómetros sobre otros caminos

Expresamos la *distancia* en términos de x

Sabemos que la distancia total fue de 330 kilómetros, lo que da la ecuación:

distancia + distancia = total
$60x + 24(7 - x) = 330$

Escribimos la ecuación

Al resolver esto nos queda

Resolvemos la ecuación

$$60x + 168 - 24x = 330$$
$$36x = 162$$
$$x = 4\frac{1}{2}$$
$$7 - x = 2\frac{1}{2}$$

Manejó durante $4\frac{1}{2}$ horas sobre carretera y $2\frac{1}{2}$ horas sobre otros caminos.

Comprobación:

Comprobamos la solución

$4\frac{1}{2} \times 60 = 270$ kilómetros sobre carretera
$2\frac{1}{2} \times 24 = 60$ kilómetros sobre otros caminos
$270 + 60 = 330$ total

Ejemplo (c) Con objeto de aumentar sus ventas, el propietario de una tienda desea mezclar nueces de $12,00 kilo con 30 kilos de avellanas de a $15,00 kilo y vender la mezcla a $13,80 el kilo. ¿Cuántos kilos de nueces necesita? (Supongamos que el valor de la mezcla es la suma de los valores de sus componentes.)

Solución:

Sea x = número de kilos de nueces
$30 + x$ = número de kilos de la mezcla

Sean x y $30 + x$ las cantidades

Nuestro plan consiste en representar el valor de cada ingrediente y de la mezcla final mediante una expresión en x y después ponerlos en la fórmula:

valor de las nueces + valor de las avellanas = valor de la mezcla

Ahora deseamos expresar el valor de cada componente y de la mezcla en términos de x.

valor = precio × número de kilos

$1\,200x$ = número de centavos que valen las nueces
$1\,500 \cdot 30$ = número de centavos que valen las avellanas
$1\,380 \cdot (30 + x)$ = número de centavos que vale la mezcla

Expresamos los *valores* en términos de x

Con esto tenemos la ecuación

Escribimos la ecuación

valor + valor = valor de la mezcla
$1\,200x + 1\,500 \cdot 30 = 1\,380 \cdot (30 + x)$

Al resolver nos da $x = 20$ número de kilos de nueces.

Resolvemos la ecuación

Comprobación: Comprobamos la solución

20 kilos a $12,00 kilo es $240,00
30 kilos a $15,00 kilo es $450,00
50 kilos a $13,80 kilo es $690,00
$240 + $450,00 = $690,00

Ejemplo (d) Con una rasadora pequeña, un talador puede limpiar en 6 días un kilómetro de camino en un bosque. Con una rasadora mayor puede hacerlo en 3 días. ¿Qué tiempo tomará hacerlo usando ambas rasadoras?

Solución: Primero señalaremos el hecho de que las *razones* a que trabajan las rasadoras son de $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{3}$ de kilómetro por día, respectivamente. Por tanto, podemos usar la fórmula:

cantidad de trabajo = razón de trabajo × número de días,

para la solución de este problema, así como usábamos fórmulas similares en otro tipo de problemas.

Sea x = número de días que necesitan ambas rasadoras trabajando juntas.

Nuestro plan consiste en expresar la cantidad de trabajo realizado por cada rasadora en x días y sumarlos:

trabajo de la rasadora pequeña + trabajo de la rasadora mayor = 1 kilómetro

Usaremos la fórmula anterior para obtener:

$\frac{1}{6}x$ = número de kilómetros de trabajo hechos por la rasadora pequeña en x días

$\frac{1}{3}x$ = número de kilómetros de trabajo hechos por la rasadora mayor en x días

De aquí tenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}x = 1$$

que da

$$\frac{1}{2}x = 1$$

$x = 2$, 2 días para ambas rasadoras juntas.

Comprobación:

En 2 días la rasadora pequeña limpia $\frac{1}{3}$ de kilómetro

En 2 días la rasadora mayor limpia $\frac{2}{3}$ de kilómetro

$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$ kilómetro

4-13 Ejercicios

1. Escribir una expresión para cada una de las siguientes cantidades:
   (a) La parte más pequeña de 50 si la parte mayor es n.
   (b) La parte mayor de n si la menor es 5.
   (c) El costo en centavos de n artículos, cada uno de 5 centavos.
   (d) El costo en centavos de n artículos si 3 de ellos se pueden comprar por 10 centavos.
   (e) El costo en pesos de n artículos de 10 centavos cada uno.
2. Expresar en la forma más simple:
   (a) La suma de a y b dividida entre el producto de a y b.
   (b) Tres veces la suma de $3x$ y $2y$.
   (c) El producto de n y m dividido entre su suma.
3. En cierto problema se nos pide considerar cuatro enteros pares consecutivos. Si el primero de ellos se representa por $2n$, ¿cómo se representará cada uno de los siguientes?
   (a) El tercer entero.
   (b) La suma del primero y el tercer enteros.
   (c) La suma de los cuatro enteros.
4. El tanque A contiene a litros de solución de alcohol al 50 %. El tanque B contiene b litros de otra solución de alcohol al 20 %. Expresar en términos de a o b o como un número lo siguiente:
   (a) El número de litros de alcohol en el tanque A.
   (b) El número total de litros de alcohol en los tanques A y B.
   (c) El número de litros de alcohol en 9 litros de solución sacada del tanque B.
   (d) El número total de litros de alcohol contenidos en una mezcla de 10 litros extraídos del tanque A y 20 litros extraídos del tanque B.
5. Dos trenes salen de una ciudad al mismo tiempo; uno hacia el este y el otro hacia el oeste. El tren que va hacia el este viaja a 10 km por hora menos que el que va hacia el oeste. Sea n la velocidad del tren que va hacia el oeste. Expresar lo siguiente en términos de n.
   (a) La velocidad del tren que va hacia el este.
   (b) La distancia recorrida en 4 horas por el tren que va hacia el este.
   (c) La distancia recorrida en 4 horas por el tren que va hacia el oeste.
   (d) La distancia total recorrida por los dos trenes en 4 horas.
6. Tres aeropuertos, X, Y y Z están localizados sobre una línea este-oeste. X está a 215 km al este de Y y Z está a 435 km al oeste de Y. Un piloto voló de X a Y, en donde tuvo una espera de 3 horas y después voló hacia Z. Durante la primera parte de su viaje, el viento estaba soplando del este a 10 km por hora, pero durante la segunda parte, estaba soplando del oeste a 15 km por hora. Representar la velocidad aérea (es decir, la velocidad del avión en aire quieto) mediante r y expresar lo siguiente en términos de r.
   (a) La velocidad terrestre del avión durante la primera parte del viaje.
   (b) La velocidad terrestre del avión durante la segunda parte del viaje.
   (c) El número de horas requeridas para volar de X a Y.
   (d) El número de horas requeridas para volar de Y a Z.
   (e) El número total de horas empleadas en este vuelo de X a Z.
7. La suma de los dígitos de un número de dos dígitos es 11. Si t representa el dígito de las decenas, expresar lo siguiente en términos de t.
   (a) El dígito de las unidades. (b) El número.

Resolver los problemas de planteo siguientes. Asegúrese de definir todas las variables y construir las ecuaciones con pasos cuidadosos que se puedan seguir con facilidad por cualquier persona que lea la solución.

8. Un número es 8 unidades menor que otro. La suma de ambos números es 20. ¿Cuáles son los números?
9. Cinco veces un número es 10 unidades más que el triple del mismo número. Hallar el número.
10. Si el 5 % de cierto número se resta del número mismo, el resultado es 342. Hallar el número.
11. Una barra de 60 cm de longitud se corta en dos pedazos, uno de ellos 5 cm más corto que el otro. Hallar la longitud de cada pieza.
12. La suma de tres números es -3. El segundo es la mitad del primero y el tercero es 28 menos que el primero. ¿Cuáles son los números?
13. El numerador de cierta fracción es 5 unidades mayor que el denominador. Si el numerador se disminuye en 9 y el denominador se aumenta en 1, la fracción que resulta es igual a $\frac{1}{2}$. ¿Cuál es la fracción?
14. Encontrar dos números cuya suma es 13 y cuya diferencia es -4.
15. El perímetro de un triángulo isósceles mide 84 cm y la longitud de uno de los lados iguales es dos tercios de la longitud de la base. Hallar la longitud de la base del triángulo.
16. El perímetro de un terreno rectangular es de 490 m. Su longitud es 70 m menor que el doble de su ancho. Hallar sus dimensiones.
17. El ancho de un rectángulo es dos tercios de su longitud. Si ambas dimensiones se aumentan en

2 cm, el área aumentará en 64 cm^2. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

18. Los requisitos de cierta zona residencial especifican que cada terreno rectangular debe tener un ancho de por lo menos la mitad del largo y que el perímetro del lote no debe ser menor de 400 m. ¿Cuál es el ancho del lote más pequeño que satisface estos requisitos?

19. Un montoncito de 18 monedas de 10 y 25 centavos tiene un valor total de $2,25. Hallar el número de cada tipo de monedas.

20. Una persona compró estampillas de 6 y de 10 centavos por un valor de $4,86. En conjunto compró 55 estampillas. ¿Cuántas compró de cada valor?

21. El ingreso total en un juego de fútbol fue de $11 991,00. Los boletos de adulto costaban $15,00 cada uno y $8,50 los de niño. ¿Cuántos se vendieron de cada tipo si el total fue de 919 boletos?

22. Un millonario texano compró 20 carros nuevos, de los cuales 17 eran Cadillac y el resto Volkswagen. Cada Cadillac costó cuatro veces lo que un Volkswagen. Si pagó un total de 1 313 500 pesos, ¿cuánto pagó por cada Cadillac?

23. Un inversionista tiene $5 000,00 más de lo que necesita para comprar 200 acciones de la compañía ABC. Si compra de la Turboencabulador, S. A., que cuestan $420,00 más por acción, tendría $8 000,00 más de lo necesario para comprar 100 acciones. ¿Cuánto dinero tiene este inversionista?

24. Un equipo de béisbol ha ganado 74 de 110 partidos jugados. Con 52 partidos por jugar, ¿cuántos de ellos tiene que ganar si quiere lograr por lo menos un 75 % de partidos ganados en la temporada?

25. Una hacienda de $90 000,00 se dividió entre una madre, un hijo y una hija. Los términos del testamento especificaban que la hija debía recibir $10 000,00 más que el hijo y la madre el doble de lo del hijo. ¿Cuánto recibió cada uno?

26. El Sr. González invirtió una parte de $170 000,00 al 6 % y el resto al 8 %. Su ingreso anual por concepto de ambas inversiones es de $11 120,00. ¿Cuánto invirtió a cada tasa?

27. Un comerciante en bienes raíces compró un terreno en una colina a $200,00 hectárea. El 20 % del terreno no se podía aprovechar para ser lotificado, por lo que decidió donarlo a la comunidad. El resto lo vendió en lotes de una hectárea a $2 000,00 cada uno, lo que le produjo una utilidad de $10 500,00. ¿Cuántas hectáreas compró?

28. ¿Cuántos kilos de una fruta de 70 centavos el kilo deben mezclarse con 160 kilos de otra variedad de la misma fruta de $1,80 kilo para obtener una mezcla de $1,10 el kilo?

29. Cierto país prohíbe la exportación de su famosa bebida de uva a menos que contenga exactamente 12 % de alcohol. Un exportador encuentra que tiene 1000 litros de la bebida con solo 10 % de alcohol. ¿Cuántos litros de 16 % de alcohol tiene que agregar a sus 1000 litros para satisfacer las especificaciones gubernamentales?

30. Un fabricante de vinos tiene una gran provisión de cierto vino que vale $4,40 el litro y de otro que vale $16,90 el litro. ¿Cuántos litros de cada uno debe mezclar para obtener 500 litros que desea vender a $8,00 el litro?

31. Cierta solución contiene 16 % de alcohol. ¿Cuántos litros de agua pura hay que agregar a 30 litros de dicha solución para obtener una solución al 12,5 %?

32. Un químico mezcló 120 c. c. de una solución de nitrato de plata al 12 % con 80 c. c. de otra solución de nitrato de plata al 7 %. Usó una parte de esta mezcla y la sustituyó por agua pura. Si la nueva solución quedó al 8 %, ¿cuánta de la mezcla original se usó?

33. Un carro que viaja hacia el norte, sale de una ciudad en el mismo momento en que una avioneta parte hacia el sur. La velocidad de la avioneta es $2\frac{1}{2}$ veces la del carro y al cabo de 1 hora y 15 minutos se encuentran 210 km uno de otro. Hallar la velocidad de cada uno.

34. Un tren viaja a una velocidad promedio de 50 km por hora y sale $1\frac{1}{3}$ horas después que un tren más lento que viaja en la misma dirección y lo alcanza al cabo de 2 horas. ¿Cuál es la velocidad del tren más lento?

35. Un tren viaja a razón de 35 km por hora por terreno montañoso y a 60 km por hora sobre terreno plano. Su tiempo de itinerario para los 139 km de la ciudad A a la ciudad B es de 3 horas 24 minutos. ¿Cuántas horas viaja por terreno montañoso durante su recorrido?

36. Guillermo Pérez salió de su casa a las 7:00 A.M., caminando a razón de 3 km por hora hacia un pueblo cercano. A las 8:00 A.M., Luisa López salió tras él en su bicicleta a razón de 12 km por hora. Si el pueblo está a 5 km de la casa, ¿qué tan cerca de él estaba Guillermo cuando lo alcanzó Luisa?

37. Un muchacho monta su bicicleta colina abajo, hacia la farmacia, a una velocidad de 15 km por hora, espera 10 minutos a que le surtan su receta y regresa colina arriba a 5 km por hora. Si el tiempo total de viaje fue de 18 minutos, ¿qué tan lejos está su casa de la farmacia?

38. Un avión de caza está en persecución de un ob-

jeto volador no identificado que el radar muestra que viaja a 500 km por hora. Si el avión y el objeto están volando en la misma dirección, ¿cuánto tiempo le tomará al avión, que vuela a 800 km por hora, para reducir la distancia que hay entre ambos de 170 a 20 km?

39. Una lancha rápida, que viaja a 60 nudos, sale tras de un bote que viaja en la misma dirección a 32 nudos. La lancha rápida alcanza al bote más lento en 45 minutos. ¿Qué tan separados estaban ambos 15 minutos antes del alcance?

40. Dos rasadoras trabajando juntas, pueden construir 1 km de camino en un terreno accidentado en 5 días. La rasadora mayor sola puede efectuar el mismo trabajo en 7 días. ¿Qué tiempo le tomará a la rasadora menor sola?

41. Se usan dos mangueras para llenar una alberca. La manguera mayor sola la llena en 4 horas y la menor sola en 6. ¿Cuánto tardarán en llenar la alberca las dos juntas?

42. El Sr. Gómez puede podar el césped de su jardín en $\frac{1}{2}$ hora. Su hijo Juan lo puede hacer en 24 minutos. Cuando trabajan juntos arreglando el césped de la iglesia, cortan 297 m^2 por hora. ¿Qué tan grande es el jardín del Sr. Gómez?

43. En un número de dos cifras el dígito de las unidades es 4 mayor que el de las decenas. El número mismo es 6 veces el dígito de las unidades. Hallar el número.

44. En un número de dos cifras el dígito de las decenas es doble del de las unidades. El número mismo es 7 veces la suma de sus dígitos. Hallar el número.

45. La suma de los dígitos de un número de dos dígitos es 15. El número que se obtiene al invertir los dígitos es 27 menor que el número mismo. Hallar el número.

46. En una prueba de falso o verdadero, un estudiante respondió 18 de las primeras 20 preguntas correctamente; de allí en adelante, 3 de cada 4 estuvieron correctas. Hallar el número de preguntas de la prueba si el estudiante tuvo correctas el 80 % del total.

47. La longitud de un rectángulo es 2 m mayor que su ancho y su área es 12 m^2 mayor que el área de un cuadrado de lado igual al ancho del rectángulo. Hallar el área del rectángulo.

48. El más pequeño de dos números es dos tercios del mayor y la suma de sus inversos multiplicativos es $\frac{5}{24}$. Hallar ambos números.

49. Un avión hace el vuelo de la ciudad A a la ciudad B a una velocidad promedio de 320 km por hora. A causa de ciertas condiciones favorables, el viaje de regreso se hace a 360 km por hora. Si el vuelo de A a B toma 20 minutos más que el de regreso, ¿cuál es la distancia entre ambas ciudades?

50. Se suma el mismo número natural al numerador y al denominador de la fracción dos tercios. Hallar el conjunto de todos aquellos números que se pueden usar para formar una fracción menor o igual que $\frac{9}{11}$.

51. El Sr. Fernández tiene \$20 000,00 para invertir. Invierte \$8000,00 en bonos que pagan el 6 % anual y \$6000,00 al $4\frac{1}{2}$% anual. ¿A qué tasa debe invertir el resto para tener un ingreso anual de cuando menos \$1200,00 de dichas inversiones?

52. Un fabricante tiene tres máquinas, A, B y C, con las cuales elabora cierto producto, del cual tiene que surtir una orden de 10 000 unidades. La máquina A puede surtir la orden en 12 horas y la máquina B en 16 horas. Se pone a trabajar la máquina A en el pedido, pero después de una hora se descompone. Entonces se pone en operación la máquina B y continúa trabajando en el pedido durante 4 horas, al cabo de las cuales también se descompone. Finalmente, se asigna la máquina C al pedido que queda completo en otras 6 horas. ¿Cuánto tiempo le habría tomado a la máquina C, sola, atender el pedido?

53. Un radiador de automóvil de 8 litros, contiene 6 litros de agua y 2 de anticongelante. ¿Cuántos litros de esta mezcla hay que drenar y remplazar con anticongelante puro para lograr una mezcla que tenga por lo menos la mitad de anticongelante?

54. El dígito de las unidades de un número de dos dígitos es doble del dígito de las decenas y si dividimos el número entre el que resulta de invertir el orden de sus cifras el resultado es $\frac{4}{7}$. ¿Para qué números naturales es verdadera esta proposición?

55. La base de un triángulo isósceles y el lado de un cuadrado tienen la misma longitud. Si el perímetro del cuadrado es 48 cm y el perímetro del triángulo no es mayor que la mitad del perímetro del cuadrado, ¿cuál es la mayor longitud posible de uno de los lados iguales del triángulo?

56. Sobre una carretera de varios carriles, un automóvil de 5 m de largo rebasa a un camión de 13 m de largo que viaja a 45 km por hora. Si el automóvil viaja a 60 km por hora, ¿cuántos segundos le toma rebasar al camión?

Potencias, exponentes y raíces 5

5-1 EXPONENTES ENTEROS POSITIVOS

Recordemos la definición de la *m-ésima potencia de x* expuesta en el Capítulo 4:

Definición $x^m = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_{m \text{ factores de } x}$ es el producto de m factores iguales a x, en donde $x \in R$ y $m \in N$. Se llama la m-ésima potencia de x. Llamamos *base* de la potencia a x y *exponente* de la potencia a m.

Ahora, hagámonos algunas preguntas, basando nuestras respuestas en experiencias previas con exponentes y potencias:

¿Cuánto vale $x^4 \cdot x^7$?

¿Cuánto vale $(x^3)^5$?

¿Cuánto vale $\frac{x^{10}}{x^6}$?

¿Cuánto vale $\frac{x^5}{x^8}$?

¿Cuánto vale $(xy)^3$?

¿Cuánto vale $\left(\frac{x}{y}\right)^3$?

El razonamiento en la primera pregunta podría ser:

$x^4 \cdot x^7 = \underbrace{(x \cdot x \cdot x \cdot x)}_{4 \text{ factores}} \cdot \underbrace{(x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x)}_{7 \text{ factores}}$ — Definición de x^m

$= \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}_{4+7 \text{ factores}}$ — Postulado asociativo extendido y la suma vista como la cardinalidad de la unión de conjuntos disjuntos.

$= x^{11}$

Un razonamiento singular podría conducirnos a la respuesta de cada una de las preguntas. Por ejemplo, considerando la segunda,

$(x^3)^5 = \underbrace{x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 \cdot x^3}_{5 \text{ factores de } x^3}$ — Definición dada antes

$= x^{3+3+3+3+3}$ — Razonamiento como en la primera pregunta.

$= x^{5 \cdot 3}$ — Multiplicación de dos números naturales como una suma repetida.

$= x^{15}$

Con un razonamiento como el que antecede, pero usando como exponentes letras en vez de números, llegamos a los teoremas siguientes, llamados *leyes de los exponentes*. Notemos cómo las demostraciones se desenvuelven por un razonamiento que es casi exactamente el antes delineado.

Teorema 5-1 $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$, $x \in R$, $m, n \in N$.

Demostración:

$x^m \cdot x^n = \underbrace{(x \cdot x \cdot x \cdots x)}_{m \text{ factores } x} \cdot \underbrace{(x \cdot x \cdot x \cdots x)}_{n \text{ factores } x}$ Definición de potencia

$= \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_{m \text{ factores } x} \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_{n \text{ factores } x}$ Postulado asociativo extendido

$= \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_{m+n \text{ factores } x}$ Definición de suma de números naturales como la cardinalidad de la unión de conjuntos disjuntos.

$= x^{m+n}$ Definición de potencia

Teorema 5-2 $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$, $x \in R$, $m, n \in N$.

Demostración:

$(x^m)^n = \underbrace{x^m \cdot x^m \cdot x^m \cdots x^m}_{n \text{ factores } x^m}$ Definición de potencia

$= x^{\underbrace{[(m+m)+m]+\cdots+m}_{n \text{ sumando } m}}$ Teorema 5-1: $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$

$= x^{\underbrace{m+m+m\cdots+m}_{n \text{ sumando } m}}$ Postulado asociativo extendido

$= x^{n \cdot m}$ Definición de la multiplicación de números naturales como suma repetida.

$= x^{m \cdot n}$ Postulado conmutativo

Teorema 5-3 Sea $x \in R$, $x \neq 0$ y $m, n \in N$, entonces

(a) $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ si $m > n$;

(b) $\dfrac{x^m}{x^n} = \dfrac{1}{x^{n-m}}$ si $m < n$.

Demostración: (a) (Las justificaciones que faltan las proporcionará el estudiante en el Ejercicio 58, pág. 146.)

Puesto que $m > n$, entonces $m - n \in N$ de modo que — Definición de $<$, $>$, entero positivo

$\dfrac{x^m}{x^n} = \dfrac{x^{(m-n)+n}}{x^n}$ Definición de resta

$= \dfrac{x^{m-n} \cdot x^n}{x^n}$ 1. ________________

$= \dfrac{x^{m-n} \cdot x^n}{1 \cdot x^n}$ 2. ________________

$= \dfrac{x^{m-n}}{1}$ 3. ________________

$= x^{m-n}$ 4. ________________

(b) (La demostración queda como un ejercicio: Ejercicio 59, página 146.)

Teorema 5-4 $(xy)^m = x^m y^m$, $x, y \in R$, $m \in N$.

La demostración queda como ejercicio: Ejercicio 60, página 146.

Teorema 5-5 $\left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m}$, $x, y \in R$, $y \neq 0$, $m \in N$.

La demostración queda como ejercicio: Ejercicio 61, página 146.

Las leyes de los exponentes deben ser manejadas con destreza por el estudiante para simplificar expresiones como las de los ejemplos siguientes.

Ejemplo (a)

$(8x^4y^3)(7xy^5z) = 56(x^4 \cdot x)(y^3 \cdot y^5)z$	Postulados conmutativo y asociativo, usados varias veces
$= 56x^5y^8z$	Teorema: $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$

Ejemplo (b)

$(-3x^2)^3 = (-3)^3(x^2)^3$	Teorema: $(xy)^m = x^m y^m$
$= (-3)^3 x^{2\cdot 3}$	Teorema: $(x^m)^r = x^{mr}$
$= -27x^6$	Propiedades de la multiplicación

Obsérvese que los coeficientes numéricos no deben ser pasados por alto al usar la regla $(xy)^m = x^m y^m$.

Igualmente, hay que tener cuidado de no pasar de largo el signo menos.

Ejemplo (c) $(-x)^2$ debe interpretarse como $(-1 \cdot x)^2$, al usar la regla $(xy)^m = x^m y^m$. Por tanto,

$$(-x)^2 = (-1 \cdot x)^2$$
$$= (-1)^2 x^2$$
$$= 1 \cdot x^2$$
$$= x^2$$

Sin embargo, si no existe el paréntesis, el signo menos no resulta afectado por el exponente.

Ejemplo (d) $-x^2$ no significa $(-x)^2$. Más bien, es lo mismo que escribir $-(x)^2$, pero, por supuesto, $-x^2$ es una forma más simple.

Ejemplo (e)

$-3^2 = -(3)^2 = -9$

pero

$(-3)^2 = 9$

Ejemplo (f)

$\left(\frac{3x^4}{5y^2z^3}\right)^2 = \frac{(3x^4)^2}{(5y^2z^3)^2}$	(¿Por qué?)
$= \frac{3^2(x^4)^2}{5^2(y^2)^2(z^3)^2}$	(¿Por qué?)
$= \frac{3^2x^{4\cdot 2}}{5^2y^{2\cdot 2}z^{3\cdot 2}}$	(¿Por qué?)
$= \frac{9x^8}{25y^4z^6}$	(¿Por qué?)

Ejemplo (g)

$$\frac{12x^3y^8}{4x^5y^3} = \frac{3y^{8-3}}{x^{5-3}}$$

$$= \frac{3y^5}{x^2}$$

Ejemplo (h) $2^5 \cdot 2^2 = 2^{5+2} = 2^7$.

En el Ejemplo (h) multiplicábamos las potencias de 2 simplemente sumando los exponentes. Notemos que no obtuvimos 4^7; es decir, *se mantuvo la misma base*, tal como mantuvimos la misma base en el caso de $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$.

Debemos notar al usar $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$, que las bases de ambos factores son la misma. No podemos multiplicar dos potencias de bases diferentes usando esta regla.

Ejemplo (i) $2^4 \cdot 3^5$ no se puede escribir en forma factorizada más simple que ésta, porque las bases no son iguales.

Ejemplo (j) $2^5 \cdot 3^5$ no se puede simplificar mediante $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$, porque las bases no son iguales. Sin embargo, puesto que los exponentes sí son iguales, se puede simplificar mediante $(xy)^m = x^m y^m$:

$$2^5 \cdot 3^5 = (2 \cdot 3)^5 = 6^5$$

5-1 Ejercicios

En los Ejercicios del 1 al 32, efectuar las operaciones indicadas, usando para ello las leyes de los exponentes.

1. $x^2 \cdot x^4$
2. $a^4 \cdot a^2 \cdot a^3$
3. $(a+b)^3(a+b)^4$
4. $m(m+2)^2 \cdot m^3(m+2)^4$
5. $(3a^3)^3$
6. $(-4a^2y)^2$
7. $(-4ax)(3ax^2)$
8. $(2x^3)^3(3xy^2)^2(x^2y)^2$
9. $(-x^5)^4$
10. $-(x^5)^4$
11. $x^{2y} \cdot x^{3y}, y \in N$
12. $(-4x^2y^3)^3$
13. $\left(\frac{3}{5}xy^3\right)^3$
14. $3xy(x^2y^3)$
15. $4x^3y^2(5xy^2 + 4x^2y)$
16. $\frac{x^7}{x^2y}$
17. $\frac{x^3y^5}{4y^3}$
18. $\frac{x^{4m}}{x^{2m}}, m \in N$
19. $\frac{x^m}{x^2}, m \in N, m > 2$
20. $\frac{(3x^2)^3}{(2x^4)^2}$
21. $\frac{x^2}{x^m}, m \in N, m > 2$
22. $\frac{10m^6n}{15m^3n}$
23. $\frac{(m+n)^{15}}{(m+n)^3}$
24. $(2ab)^k \cdot (a^2b^2), k \in N$
25. $(mn^a)(3mn)^a, a \in N$
26. $[(2x)^a]^b, a, b \in N$
27. $\frac{3mn^2}{7m^2n} \cdot \frac{21m^5}{6n^4}$
28. $\frac{4m^5}{5n^4} \div \frac{8m^5}{15n^3}$
29. $\frac{(2x^2y)^4}{(-3xy)^4}$
30. $\left(\frac{5x^2y}{-3a^3}\right)^2$
31. $\frac{24(x+y)^3(x-y)^2}{30(x+y)^2(x-y)^3}$
32. $\frac{(a+b)^3}{(ab)^3}$

En los Ejercicios del 33 al 47, escribir cada una de las expresiones en una de las formas siguientes: 3^k, -3^k, $\frac{1}{3^k}$, $-\frac{1}{3^k}$, donde $k \in N$.

33. $(-3^4)(-3^2)(-3)^3$
34. $-3^4 \cdot 3^2$
35. $3^m \cdot 3^n, m, n \in N$

36. $\frac{3^m}{3^n}, m, n \in N, m > n$

37. $\frac{3^2(-3)^5}{3}$

38. $\frac{(-3)^3(3^2)}{(3)^5(-3)^2}$

39. $81 \cdot 27$

40. $\frac{3^7}{3^4}$

41. $\frac{(-3)^{15}}{(-3)^{20}}$

42. $3 \cdot 3^m, m \in N$

43. $9^3 \cdot 27^2$

44. $\frac{9^2}{27^3}$

45. $\frac{27^3}{81}$

46. $3^x \cdot 9^x \cdot 81^{2x}, x \in N$

47. $\frac{3^{2x}}{9^{2x}}, x \in N$

En los Ejercicios del 48 al 57, encontrar los valores de la expresión dada.

48. $-(-2)^4$

49. $-\left(-\frac{2}{3}\right)^3$

50. $\frac{3^{10}}{(-3)^{11}}$

51. $\frac{5^{27}}{5^{24}}$

52. $2^4 + 2^3 - 2^2$

53. $\frac{5^3 + 5^2}{5^2}$

54. $\left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{-3}{2}\right)^3$

55. $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$

56. $\frac{2^3 \cdot 2^3}{4^5}$

57. $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$

58. Dar las justificaciones de la demostración del Teorema 5-3 (a), página 143.

59. Demostrar el Teorema 5-3 (b), página 143.

60. Demostrar el Teorema 5-4, página 144.

61. Demostrar el Teorema 5-5, página 144.

5-2 EXPONENTES CERO Y ENTEROS NEGATIVOS

En la definición de x^m dada en la Sección 5-1, m había de ser un número natural, puesto que estábamos contando el número de factores; es decir, m es la cardinalidad del conjunto de factores cuyo producto es x^m.

Pero hay ventajas que ganar al introducir la idea de exponentes cero y negativos. Si hemos de hacer esto, tiene que ser mediante nuevas definiciones y aún hemos de demostrar leyes para estos nuevos exponentes. Lo natural, sin embargo, es definir los nuevos exponentes de manera que se puedan usar las antiguas leyes. Por ejemplo, si hacemos eso, x^0 debe ser tal que $x^m \cdot x^0 = x^{m+0} = x^m$. Pero el 1 es el único elemento del conjunto de los reales que al multiplicar a x^m da x^m, a menos que $x = 0$. De modo que definamos x^0 como otra notación para el 1.

Definición $x^0 = 1,\ x \in R,\ x \neq 0.$

Ejemplo (a) $2^0 = 1, \quad (86 + 5x^2)^0 = 1.$

0^0 permanece indefinido.

Ahora bien, con esta definición para x^0, ¿siguen siendo válidas las otras leyes de los exponentes? Sí, y las demostraciones son sencillas, de modo que no las daremos aquí.

Del mismo modo, definamos una potencia con un exponente negativo de modo que se adapte a $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$. Sea $-p$ un entero negativo; luego, $p \in N$. Resulta natural exigir que $x^p \cdot x^{-p} = x^{p+(-p)} = x^0 = 1$. Pero sabemos que $\frac{1}{x^p}$, el inverso multiplicativo de x^p, es el único número tal que $x^p \cdot \frac{1}{x^p} = 1$. De manera que definamos x^{-p} como otra notación para $\frac{1}{x^p}$.

Definición $x^{-p} = \frac{1}{x^p}$, $x \in R$, $x \neq 0$, $p \in N$.

Observemos que con esta definición podemos simplificar la ley de los exponentes acerca de $\frac{x^m}{x^n}$ (Teorema 5-3). Porque

$$\frac{1}{x^{n-m}} = x^{-(n-m)} = x^{m-n}$$

De modo que podemos escribir $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$, $m, n \in N$, independientemente de que $m > n$ o que $m < n$. Notemos también que $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ aun cuando $m = n$. (¿Por qué?)

Aún queda por hacer ver que las otras leyes de los exponentes siguen siendo válidas si cualquiera de los exponentes es negativo. Por ejemplo,

Demostrar: $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$, $x \in R$, $m, n \in I$, $x \neq 0$ si m o n son negativos o cero.

Demostración: (Demostraremos el caso en que m es negativo y n es positivo o 0. El estudiante dará las justificaciones. Véase el Ejercicio 88, página 150.)

Sea $m = -p$, en donde $p \in N$ y $n \in W$. Entonces

$x^m \cdot x^n = x^{-p} \cdot x^n$ 1. ________________

$= \frac{1}{x^p} \cdot x^n$ 2. ________________

$= \frac{x^n}{x^p}$ 3. ________________

$= x^{n-p}$ 4. ________________

$= x^{-p+n}$ 5. ________________

$= x^{m+n}$ 6. ________________

Se pueden usar pasos muy semejantes si n es negativo en lugar de m o si ambos son negativos.

Es fácil hacer ver que las otras leyes de los exponentes también son válidas para exponentes negativos. Dejaremos esto para los ejercicios y simplemente las resumiremos aquí.

Teorema 5-6 Sean $m, n \in I$, $x, y \in R$. Supongamos, además, que ninguna base es cero si aparece en el denominador o si tiene un exponente negativo o 0. Entonces,

(a) $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$

(b) $(x^m)^n = x^{mn}$

(c) $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$

(d) $(xy)^m = x^m y^m$

(e) $\left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m}$

El estudiante debe desarrollar cierta destreza al trabajar con exponentes negativos y cero y usar las leyes de los exponentes. A menudo es deseable escribir una expresión complicada sin exponentes negativos o cero, aunque en otras situaciones lo deseable puede ser usarlos.

Ejemplo (b) Simplificar y escribir sin exponentes cero o negativos: $3x^{-2}y^0$.

$$3x^{-2}y^0 = 3 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 1 = \frac{3}{x^2}$$

Ejemplo (c) Simplificar y escribir sin exponentes cero o negativos $\frac{5x^2y^{-3}}{3x^{-2}}$.

$$\frac{5x^2y^{-3}}{3x^{-2}} = \frac{5x^{2-(-2)}y^{-3}}{3} = \frac{5x^4y^{-3}}{3y^0} = \frac{5x^4}{3y^{0-(-3)}} = \frac{5x^4}{3y^3}$$

Una forma alternativa sería

$$\frac{5x^2y^{-3}}{3x^{-2}} = \frac{5x^2 \cdot \frac{1}{y^3}}{3 \cdot \frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{5x^2}{y^3}}{\frac{3}{x^2}} = \frac{5x^2}{y^3} \cdot \frac{x^2}{3} = \frac{5x^4}{3y^3}$$

Nótese que en ambos casos, el resultado final fue que los factores que eran potencias con exponentes negativos se mudaban del numerador al denominador y viceversa y los signos de los exponentes quedaban cambiados.

Ejemplo (d) Simplificar y escribir sin exponentes negativos: $\left(\frac{2x^{-4}}{y^{-2}}\right)^{-3}$.

$$\left(\frac{2x^{-4}}{y^{-2}}\right)^{-3} = \frac{(2x^{-4})^{-3}}{(y^{-2})^{-3}} = \frac{2^{-3}x^{(-4)(-3)}}{y^{(-2)(-3)}} = \frac{2^{-3}x^{12}}{y^6}$$

$$= \frac{x^{12}}{2^3y^6} = \frac{x^{12}}{8y^6}$$

Ejemplo (e) Escribir cada uno de los términos de la expresión que sigue, sin usar fracciones:

$$\frac{4x^3}{x-1} - \frac{3}{x^3}.$$

$$\frac{4x^3}{x-1} - \frac{3}{x^3} = 4x^3(x-1)^{-1} - 3x^{-3}$$

Nuevamente, hay que ser precavido para no considerar que el signo o el coeficiente están afectados por los exponentes del factor literal, a menos que se use paréntesis.

Ejemplo (f) $3x^{-1} = 3 \cdot \frac{1}{x} = \frac{3}{x}$.

Ejemplo (g) $3x^{-1} \neq \frac{1}{3x}$, pero $(3x)^{-1} = \frac{1}{3x}$.

Ejemplo (h) $-3^{-2} = -\frac{1}{3^2} = -\frac{1}{9}$.

Ejemplo (i) $(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$.

Obsérvese de nuevo que la definición de $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ hace posible trasladar un factor del numerador al denominador o viceversa, mediante el simple cambio del signo del exponente. Sin embargo, hay que tener cuidado de que sea un *factor* y no un *término*.

Ejemplo (j) $\frac{5x^2y^{-3}}{3x^{-2}} = \frac{5x^2x^2}{3y^3} = \frac{5x^4}{3y^3}$.

Ejemplo (k) Simplificar y escribir sin exponentes negativos: $\frac{(x^2-y^2)^{-1}}{3}$

$$\frac{(x^2-y^2)^{-1}}{3}=\frac{1}{3(x^2-y^2)}$$

Ejemplo (l) Simplificar y escribir sin exponentes negativos: $\frac{(x^{-2}-y^{-2})}{x-y}$

$$\frac{x^{-2}-y^{-2}}{x-y}=\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}{x-y}=\frac{\frac{y^2-x^2}{x^2y^2}}{x-y}=\frac{y^2-x^2}{(x-y)x^2y^2}$$

$$=-\frac{x^2-y^2}{(x-y)x^2y^2}=-\frac{\overset{1}{\cancel{(x-y)}}(x+y)}{\underset{1}{\cancel{(x-y)}}\,x^2y^2}=-\frac{x+y}{x^2y^2}$$

Como una regla general, al simplificar expresiones con exponentes, usualmente es mejor aplicar primero las leyes de los exponentes apropiadas y después usar las definiciones de los exponentes. Por ejemplo, $(x^{-5}y^2)^{-3}$ conviene que se escriba primero como $(x^{-5})^{-3}(y^2)^{-3}=x^{15}y^{-6}$, mejor que como $\frac{1}{\left(\frac{1}{x^5}\cdot y^2\right)^3}$.

5-2 Ejercicios

En los Ejercicios del 1 al 23, efectuar las operaciones indicadas mediante las leyes de los exponentes y evaluar.

1. 3^{-2}
2. $(-3)^{-2}$
3. $3^2\cdot 5^{-2}\cdot 5$
4. $\frac{4^{-3}\cdot 4^6}{4^3}$
5. $\frac{5^{-2}}{5^{-1}}$
6. $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$
7. $(-10)^3(10)^{-3}$
8. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$
9. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$
10. $3^3\div(-3)^{-2}$
11. $5^0+3^0-2^{-1}$
12. $3(-3)^{-2}$
13. $5^0\cdot 5^{-2}$
14. $(2^{-1}-2^{-2})^{-1}$
15. $(3^{-2}+2^{-2})^{-2}$
16. $(2^{-1}\cdot 2^{-2})^{-1}$
17. $(3^{-2}\cdot 2^{-2})^{-2}$
18. $(2^3+5^3)^0$
19. $2(5^3)^0$
20. $\left(\frac{3^7}{2^{-8}}\right)^0$
21. $\left(\frac{2^4}{2^{-3}}\right)^{-1}$
22. $(7^{-2})^{-1}$
23. $\left(\frac{7}{5}\right)^{-2}$

En los Ejercicios del 24 al 29, escribir una expresión equivalente sin usar fracciones.

24. $\frac{5}{x^3}$
25. $\frac{1}{5x^3}$
26. $\frac{5x}{3y^2}$
27. $\frac{3(x-y)}{x+y}$
28. $\frac{3(x-y)}{(x+y)^{-1}}$
29. $\frac{13x^{-2}y}{4x^2y^{-3}}$

En los Ejercicios del 30 al 35, escribir una fracción que sea equivalente a cada una de las expresiones dadas y cuyo numerador sea 1.

30. $\frac{x}{y^2}$

31. $\dfrac{3x^0y^2}{2yz^{-1}}$
32. $\dfrac{3}{5}$
33. $\dfrac{15x}{7(x+y)}$
34. $\dfrac{(3n)^5}{(4m)^5}$
35. a^2+b^2

En los Ejercicios del 36 al 73, efectuar las operaciones indicadas, usando las leyes de los exponentes. Dejar las respuestas sin exponentes negativos o cero.

36. $7x^0$
37. $7x^{-1}$
38. $(7x)^0$
39. $(7x)^{-1}$
40. $(7+x)^0$
41. $(7+x)^{-1}$
42. $7+x^0$
43. $7+x^{-1}$
44. $7+5x^{-2}$
45. $(a^2+b^2)^0$
46. $(3x^{-2})(4x^5)(x^{-2})$
47. $(2x^{-3}y)(4xy^{-2})^3$
48. $(3xy^2)^{-1}\cdot(2x^3y^{-4})^{-2}$
49. $x^{-1}+y^{-1}$
50. $(x+y)^{-1}$
51. $4x^3y^{-2}$
52. $4x^3+y^{-2}$
53. $(x^{-3}y^2z^{-4})^{-1}$
54. $3x^{-2}+2xy^0$
55. $\dfrac{xy^{-2}+x^{-2}y}{x^{-1}+y^{-1}}$
56. $\dfrac{x^{-2}-y^{-2}}{x^{-2}\cdot y^{-2}}$
57. $\left(\dfrac{3x}{2y^2}\right)^{-3}$
58. $\left(\dfrac{-2x^3}{y^{-4}}\right)^{-3}$
59. $\dfrac{x^{-2}-y^{-2}}{x^{-1}+y^{-1}}$
60. $(a^2+b^2+c^2)^0$
61. $x^{-3}(-2x)-5x^{-2}$
62. $\left(\dfrac{3x^2y^{-4}}{2m}\right)^0$
63. $\left(\dfrac{m+n}{m-n}\right)^{-1}$
64. $(252x^{-7})^0$
65. $252(x^{-7})^0$
66. $(a+b^{-2})^{-1}$
67. $\dfrac{ab^{-1}+a^{-1}b}{a^{-1}+b^{-1}}$
68. $\dfrac{3x^{-2}y}{4x^2y^{-5}}$
69. $(x^{-2}+y^{-1})^{-2}$
70. $\dfrac{2x+y}{(2x+y)^{-1}}$
71. $\dfrac{3x^{-4}}{(5y)^{-2}}$
72. $\left(\dfrac{2x^{-2}y}{a^{-1}}\right)^{-1}$
73. x^0y^{-4}

En los Ejercicios del 74 al 87, escribir cada una de las expresiones en una de las formas siguientes: 2^k, -2^k, $\dfrac{1}{2^k}$, o $-\dfrac{1}{2^k}$, en donde $k \in W$.

74. $2^{-3}\div 2^{-7}$
75. 4^{-2}
76. $(-16)^{-1}$
77. 32^0
78. $(-4)^3$
79. $\dfrac{1}{8}$
80. $\dfrac{2^{-4}\cdot 2^3}{2^5}$
81. $\dfrac{2^{-2}\cdot 2^{-3}}{2^{-4}}$
82. 1
83. 8^{-3}
84. $4^2\cdot 8^3\cdot 16^{-3}$
85. $2^{-4}\cdot 4^3$
86. $3\cdot 2^5+2^5$
87. $14\cdot 2^3-6\cdot 2^3$
88. Dar las justificaciones en la demostración de la proposición de la página 147.
89. Demostrar el teorema $(x^m)^n = x^{mn}$, $x \in R$, $x \neq 0$, $m, n \in W$. (*Sugerencia*: Hay que considerar cuatro casos.)
90. Demostrar el Teorema 5-6 (a), página 147, para el caso en que $m = 0$, $n < 0$.
91. Demostrar el Teorema 5-6 (c), página 147, para el caso en que $m < 0$, $n < 0$.

5-3 RAICES Y RADICALES

Si nos preguntamos qué número elevado al cuadrado da 9, estamos preguntándonos acerca de la raíz cuadrada de 9. Pero resulta que hay dos de tales números:

3 y -3. Similarmente, puesto que $5^4 = 625$ y $(-5)^4 = 625$, resulta que 5 y -5 se llaman raices cuartas de 625.

Ejemplo (a) ¿Qué número real al elevarse a la sexta potencia da 64? ¿$(\ )^6 = 64$? Sabemos que $64 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, por lo que sabemos que $2^6 = 64$. De modo que 2 es una raíz sexta de 64. Pero también $(-2)(-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = 64$ por lo que -2 es otra raíz sexta de 64.

Ejemplo (b) ¿Qué número real al elevarse al cuadrado da -4? Rápidamente vemos que *no hay tal número real*, porque al elevar al cuadrado un número negativo, el resultado es positivo y al elevar al cuadrado un positivo el resultado es también positivo. Además, $0^2 = 0$.

Ejemplo (c) ¿Qué número real al elevarse al cubo da -8? $(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$, de modo que una raíz cúbica de -8 es -2. Y esta parece ser la única raíz cúbica de -8.

Los ejemplos anteriores nos indican que podemos obtener cero, una o dos raíces *n*-ésimas de un número real x, dependiendo de que n sea impar o par y de que x sea positiva o negativa.

Nos gustaría usar un símbolo para que una raíz representase a un número que supiésemos que *existe y es único*. Así, pues, si decidimos usar $\sqrt[n]{x}$ para representar al número que al elevarse a la *n*-ésima potencia da x, tenemos que asegurarnos que si n es par,

1. x no sea negativa;
2. escojamos exactamente una de las raíces posibles.

Escogeremos la positiva, puesto que esto parece más natural.

De este modo tenemos la definición de la raíz *n*-ésima principal de x:

Definición y se llama *raíz n-ésima principal de* x, y se denota por $y = \sqrt[n]{x}$, si, y solo si, $y^n = x$, en donde $x, y \in R$, $n \in N$, bajo la condición de que si n es par, entonces $x \geq 0$, $y \geq 0$.

El símbolo $\sqrt{\ }$ se llama *radical*, x se llama *radicando* o *subradical* y n es el *índice*. Cuando el índice es 2, usualmente no se escribe.

Ejemplo (d) Hallar las dos raíces cuadradas de 9.

La raíz cuadrada principal de 9 es $\sqrt{9} = 3$. La otra raíz cuadrada de 9 es $-\sqrt{9} = -3$. Obsérvese que las dos raíces cuadradas de 9 son $\sqrt{9}$ y $-\sqrt{9}$.

Ejemplo (e) $\sqrt[4]{16} = 2$.

Ejemplo (f) $\sqrt[3]{-8} = -2$.

Ejemplo (g) $\sqrt{-4}$ no existe como número real.

Una consecuencia inmediata de la definición de $\sqrt[n]{x}$ es que $(\sqrt[n]{x})^n = x$.

Ejemplo (h) $(\sqrt[3]{365})^3 = 365$.

Ejemplo (i) $(\sqrt{2})^6 = ((\sqrt{2})^2)^3 = 2^3 = 8$.

Hay que tener siempre presente que una raíz principal par es un número positivo.

Ejemplo (j) $\sqrt{(-3)^2} \neq -3$, pero $\sqrt{(-3)^2}$ = al número positivo que al elevarse al cuadrado da $(-3)^2$, o sea 9. Así, pues, $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$.

Ejemplo (k) Sea $S = \{x \in R | x < 0\}$ el conjunto satisfactor de x. Hallar $\sqrt{x^2}$.

Notamos que $x < 0$, de modo que $\sqrt{x^2} = -x$, puesto que $-x$ es el número positivo cuyo cuadrado es x^2, para toda $x \in S$.

Ejemplo (l) Sea $x \in R$. Hallar $\sqrt{x^2}$.

Cuando $x \geq 0$, $\sqrt{x^2} = x$. Cuando $x < 0$, $\sqrt{x^2} = -x$, como en el Ejemplo (k). Así, pues, $\sqrt{x^2} = |x|$.

Ejemplo (m) Sea $a \in R$. Hallar $\sqrt{81a^2}$.

$\sqrt{81a^2} = |9a|$.

Ejemplo (n) Sea $a \in R$. Hallar $\sqrt{81a^4}$.

$\sqrt{81a^4} = 9a^2$. No se hacen necesarios los símbolos de valor absoluto, ya que $9a^2$ es positiva para toda $a \in R$.

Ejemplo (o) Sea $x \in R$. Hallar $\sqrt[3]{x^3}$.

$\sqrt[3]{x^3} = x$.

5-4 ISOMORFISMO DE DOS CONJUNTOS

Consideremos por un momento el conjunto S de todas las potencias x^m de la misma base x, en donde $m \in I$, x es un indeterminante.

$S = \{\ldots, x^{-3}, x^{-2}, x^{-1}, x^0, x^1, x^2, x^3, \ldots\}$

Observemos qué similar se ve esto con el conjunto de los enteros

$I = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

De hecho, observamos que podemos equiparar los dos conjuntos mediante una correspondencia uno a uno, como sigue

$$\begin{array}{l} S = \{\ldots, x^{-3}, x^{-2}, x^{-1}, x^0, x^1, x^2, x^3, \ldots\} \\ \qquad\quad \updownarrow \quad\ \updownarrow \quad\ \updownarrow \quad \updownarrow \ \ \updownarrow \ \ \updownarrow \ \ \updownarrow \\ I = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} \end{array}$$

Sabemos que en I hay dos operaciones binarias, $+$ y $\cdot$, que obedecen los postulados de campo excepto uno (¿cuál?).

Hágase el estudiante algunas preguntas acerca de S.

- ¿Puede usted pensar en una operación en S que pueda realizar fácilmente (sin conocer que es x)?
- ¿Es ésa una operación binaria, según la definición dada en el Capítulo 2?

La respuesta podría ser:

- La multiplicación en S se puede efectuar mediante simplemente la suma de exponentes:

  $x^{-2} \cdot x^5 = x^3$

- Sí, ésta es una operación binaria, puesto que con cada par ordenado de elementos de S asocia un elemento único de S. Por ejemplo, con (x^{-2}, x^5) está asociada x^3.

Nótese que usando la anterior correspondencia uno a uno entre S e I, la operación binaria de multiplicación en S corresponde exactamente a la operación binaria de suma en I:

$$\begin{array}{ccccc} x^{-2} & \cdot & x^5 & = & x^3 \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ -2 & + & 5 & = & 3 \end{array}$$

Decimos, entonces, que la suma en I se *transforma* o se *mapea* en la multiplicación en S.

¿Hay una operación binaria en S que corresponda a la multiplicación en I?

Observamos que al elevar una potencia a una potencia, como en $(x^{-3})^4$, resulta una multiplicación de dos enteros: $(x^{-3})^4 = x^{-3 \cdot 4} = x^{-12}$. Pero aquí, los elementos del par ordenado $(x^{-3}, 4)$ no son elementos, ambos, de S, puesto que $4 \notin S$. Sin embargo, 4 corresponde a x^4, de modo que podemos interpretar $(x^{-3})^4$ como una operación binaria sobre x^{-3} y x^4 : $(x^{-3}, x^4) \to x^{-12}$, y usar el símbolo $\circledast$ para representar la operación binaria. Según eso, $x^{-3} \circledast x^4 = x^{-12}$. Sigamos llamando a esta operación *elevar x^{-3} a la cuarta potencia*.

Observamos que esta operación de $\circledast$ en S corresponde exactamente, según la correspondencia uno a uno entre S e I establecida antes, a la operación binaria de multiplicación en I:

$$\begin{array}{ccccc} x^{-3} & \circledast & x^4 & = & x^{-12} \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ -3 & \cdot & 4 & = & -12 \end{array}$$

Podríamos decir entonces que la *multiplicación* en I se *transforma en la elevación a potencia* en S.

Se dice que los dos conjuntos S e I son *isomorfos* ante la operación discutida, puesto que hay una correspondencia uno a uno, en la cual, no solo los elementos se corresponden, sino que también los resultados de las operaciones correspondientes.

Isomorfismo:

$$\begin{array}{l} \{\ldots, x^{-3}, x^{-2}, x^{-1}, x^0, x^1, x^2, x^3, \ldots\}, +, \cdot \\ \quad\ \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \qquad\quad \updownarrow \ \updownarrow \\ \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}, \quad \cdot, \circledast \end{array}$$

Ahora bien, puesto que las operaciones de $+$ y $\cdot$ en I siguen las reglas dadas por los postulados de campo, excepto uno (¿cuál?), lo mismo debe suceder con las operaciones de $\cdot$ y $\circledast$ en S a las cuales se corresponden.

Ejemplo (a)

$$\begin{array}{lccccccc} & x^m & \cdot & x^n & = & x^n & \cdot & x^m \\ & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ \text{ya que} & m & + & n & = & n & + & m \end{array}$$

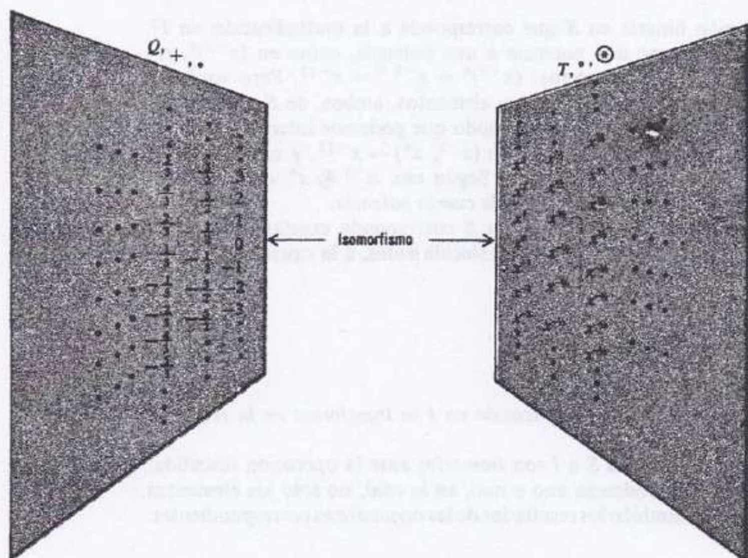
Esto ilustra cómo se mantiene en S el postulado conmutativo de $\cdot$.

Ejemplo (b) Escribir el postulado distributivo en S:

$$\begin{array}{lcccccccc} \text{En } I, \text{ tenemos} & m & \cdot & (n+p) & = & m \cdot n & + & m \cdot p \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \text{Luego, en } S, \text{ se tiene} & x^m & \circledast & (x^n \cdot x^p) & = & x^m \circledast x^n & \cdot & x^m \circledast x^p \end{array}$$

Para acabar de convencernos, recordemos el hecho de que $x^m \circledast x^n$ significa $(x^m)^n$ y usemos las leyes de los exponentes. Entonces, el lado izquierdo es $(x^m)^{n+p}$, que es x^{mn+mp}, y el lado derecho es $(x^m)^n \cdot (x^m)^p$, o sea $x^{mn} \cdot x^{mp}$, que también es x^{mn+mp}.

Recordemos cómo fue agrandado el conjunto de los enteros para obtener el de los números racionales, de modo que cada número tuviese siempre un inverso multiplicativo, lo cual hacía que la división fuese posible siempre. Parece natural hacer lo mismo con S. Lo aumentaremos para incluir exponentes racionales $\frac{p}{q}$,



en donde p y q son enteros, $q \neq 0$. Llamaremos T a este nuevo conjunto. Por ejemplo, $x^{1/2}$, $x^{-4/3}$, x^2, x^{-5} y x^0 son elementos de T.
Vemos que

$$\frac{1}{2} \leftrightarrow x^{1/2}$$

$$-\frac{4}{3} \leftrightarrow x^{-4/3}$$

$$2 \leftrightarrow x^2 \qquad \text{etc.}$$

Este nuevo conjunto es isomorfo a Q, el conjunto de los números racionales, ante las operaciones que hemos discutido.

Por ejemplo, en Q tenemos $-\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{1}{12}$, y correspondiendo a esto en T, tenemos $x^{-2/3} \cdot x^{3/4} = x^{1/12}$:

$$\begin{array}{ccccccc} x^{-2/3} & \cdot & x^{3/4} & = & x^{-(2/3)+(3/4)} & = & x^{1/12} \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ -\frac{2}{3} & + & \frac{3}{4} & = & \left(-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right) & = & \frac{1}{12} \end{array}$$

Supongamos que $n \in I$, $n \neq 0$. Consideremos a $x^{1/n}$ en T. Esta corresponde a $\frac{1}{n}$ en el conjunto de los números racionales Q, y así como $\frac{1}{n} \cdot n = 1$, la identidad multiplicativa en Q, así también $x^{1/n} \circledast x^n = x^{(1/n)n} = x^1$, la identidad de «elevación» en T. Así, pues, $x^{1/n}$ es el *inverso de «elevación»* de x^n. Empleando la notación usual,

$$(x^{1/n})^n = x$$

Luego, $x^{1/n}$ es el elemento de T que al elevarse a la n-ésima potencia da x. ¿Qué nos sugiere esto?

Si $x \in R$ y $x \neq 0$, sabemos cómo se definen las potencias de x con exponentes enteros y cómo se comportan ante las operaciones $\cdot$ y $\circledast$. Sin embargo, hasta el momento, $x^{1/n}$ no tiene significado como número real, aunque sepamos cómo se comporta $x^{1/n}$ (en donde x es indeterminado) como elemento del cuerpo T.

¿Existe un número real que al elevarse a la n-ésima potencia dé x? Sí, $(\sqrt[n]{x})^n = x$. De modo que definamos $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$, siempre y cuando $\sqrt[n]{x}$ exista.

Definición $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$, $x \in R$, $n \in N$ ($x \geq 0$ cuando n es par).

Ahora ya sabemos cómo efectuar las operaciones $\cdot$ y $\circledast$ con $x^{1/n}$ en T, y que $\sqrt[n]{x}$ se comporta exactamente como $x^{1/n}$ en T, mientras nos mantengamos dentro de los casos en que está definida.

Ejemplo (c) $9^{1/2} = \sqrt{9} = 3$.

Ejemplo (d) $8^{1/3} = \sqrt[3]{8} = 2$.

Ejemplo (e) $(-4)^{1/2}$ no está definida puesto que $\sqrt{-4}$ no existe.

Ejemplo (f) $(-125)^{1/3} = \sqrt[3]{-125} = -5$.

¿Qué podemos decir ahora, respecto de $x^{m/n}$, $m, n \in N$? Como número racional, $\frac{m}{n} = \frac{1}{n} \cdot m = m \cdot \frac{1}{n}$, y así, pues, en T,

$$x^{m/n} = x^{(1/n) \cdot m} = (x^{1/n})^m$$

o

$$x^{m/n} = x^{m(1/n)} = (x^m)^{1/n}$$

Esto sugiere que si $x \in R$, construyamos la siguiente definición:

Definición $x^{m/n} = (\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$, $x \in R$, $m \in I$, $n \in N$, con la condición de que si n es par, x debe ser positivo.

Ejemplo (g) $8^{2/3} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$.

Ejemplo (h) $(-16)^{3/4}$ no existe puesto que $(\sqrt[4]{-16})^3$ no existe.

Ejemplo (i) $(-27)^{4/3} = (\sqrt[3]{-27})^4 = (-3)^4 = 81$.

Ahora ya sabemos cómo efectuar operaciones con $\cdot$ y $\circledast$ cuando $x^{m/n}$ está en T, y $\sqrt[n]{x^m}$ o $(\sqrt[n]{x})^m$ se comporta exactamente como $x^{m/n}$ en T, mientras nos mantengamos dentro de los casos en que está definida.

En particular, esto significa que si la base es negativa, no podemos usar $\frac{xz}{yz} = \frac{x}{y}$ para reducir exponentes fraccionarios o elevarlos a términos superiores. Esto se debe a que cambiar el numerador y el denominador puede dar por resultado tomar una raíz par de un número negativo o un cambio del signo del radicando.

Ejemplo (j) $(-8)^{1/3} \neq (-8)^{2/6}$

$(-8)^{1/3} = \sqrt[3]{-8} = -2$

pero

$(-8)^{2/6} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$

o

$(-8)^{2/6} = (\sqrt[6]{-8})^2$, que no existe

Ejemplo (k) $(-25)^{1/2} \neq (-25)^{2/4}$

$(-25)^{1/2} = \sqrt{-25}$, que no existe

$(-25)^{2/4} = \sqrt[4]{(-25)^2} = \sqrt[4]{625} = 5$

o

$(-25)^{2/4} = (\sqrt[4]{-25})^2$, que tampoco existe

Sin embargo, no existen tales objeciones si la base x es positiva, porque entonces $x^{m/n}$ siempre existe como un número real y, por tanto, obedece todas las reglas de operación en el cuerpo T. Entre esas reglas están las primeras tres leyes de los exponentes:

Teorema 5-7 Si $x \in R$ y $u, v \in Q$, entonces (con la debida precaución si $x \leq 0$)

$$x^u \cdot x^v = x^{u+v}$$
$$(x^u)^v = x^{uv}$$
$$\frac{x^u}{x^v} = x^{u-v}$$

La demostración es un resultado inmediato del isomorfismo entre Q y T.

Podemos usar esas leyes de los exponentes para demostrar las otras dos. Puesto que se refieren a potencias de bases diferentes, tendrán que ser demostradas por separado, para exponentes racionales.

Teorema 5-8 $(xy)^{m/n} = x^{m/n}y^{m/n}$, $x, y \in R$, $m \in I$, $n \in N$ (con la debida precaución cuando x, $y \leq 0$).

***Demostración*:**

$[x^{m/n} \cdot y^{m/n}]^n = (x^{m/n})^n(y^{m/n})^n$	$(xy)^m = x^m y^m$, $m \in N$
$= x^{(m/n)n}y^{(m/n)n}$	$(x^u)^v = x^{uv}$, $x \in R$, $u, v \in Q$
$= x^m \cdot y^m$	Definición de división

Por tanto,

$x^{m/n}y^{m/n} = \sqrt[n]{x^m y^m}$	Definición de raíz n-ésima principal
$= \sqrt[n]{(xy)^m}$	$(xy)^m = x^m y^m$, $m \in I$
$= (xy)^{m/n}$	Definición de $x^{m/n}$

Teorema 5-9 $\left(\frac{x}{y}\right)^{m/n} = \frac{x^{m/n}}{y^{m/n}}$

La demostración le queda al estudiante: Ejercicio 98, página 158.

5-3 Ejercicios

En los Ejercicios del 1 al 20, escribir las raíces principales de las expresiones dadas.

1. $\sqrt{36}$
2. $\sqrt{\dfrac{25}{49}}$
3. $\sqrt{(-3)^2}$
4. $\sqrt{(-17)^2}$
5. $\sqrt[3]{\dfrac{1}{27}}$
6. $\sqrt[3]{-343}$
7. $\sqrt[5]{-32}$
8. $\sqrt[5]{\dfrac{1}{243}}$
9. $\sqrt{4m^2}$
10. $\sqrt{\dfrac{9}{m^2}}$
11. $\sqrt[3]{-8x^3}$
12. $\sqrt[3]{-\dfrac{m^3}{n^3}}$
13. $\sqrt{16x^4}$
14. $\sqrt{144y^8}$
15. $\sqrt[3]{27x^3y^6}$
16. $\sqrt[5]{32x^{10}y^{20}}$
17. $\sqrt[3]{x^{3k}y^{6k}}, k \in N$
18. $\sqrt[5]{x^{-5k}y^{-10k}}, k \in N$
19. $\sqrt{x^2 - 2x + 1}, x > 1$
20. $\sqrt{x^2 - 2x + 1}, x < 1$

En los Ejercicios del 21 al 32, dar una expresión equivalente en forma de radical.

21. $5^{1/3}$
22. $7^{2/5}$
23. $x^{3/4}$
24. $4x^{2/3}$
25. $15^{-1/2}$
26. $x^{1/2} \cdot y^{1/2}$
27. $3^{2/3} \cdot c^{1/3}$
28. $3c^{2/5}$
29. $(3c)^{2/5}$
30. $(27)^{13/17}$
31. $56^{.3}$
32. $7^{.25}$

En los Ejercicios del 33 al 40, dar expresiones equivalentes sin los signos de radical y con exponentes racionales.

33. $\sqrt[3]{11^2}$
34. $\sqrt{x^{11}}$
35. $\sqrt[4]{81x^3}$
36. $\sqrt[3]{5x^4y^2}$
37. $\sqrt[5]{x^2}\sqrt{y^3}$
38. $\sqrt[3]{a+b}$
39. $\sqrt{a^2+b^2}$
40. $\sqrt[10]{(x+y)^5z^2}$

Hallar un valor numérico simple para cada una de las expresiones en los Ejercicios del 41 al 58.

41. $\left(\dfrac{8}{27}\right)^{-1/3}$
42. $5^2 \cdot 5^{-1}$
43. $16^{-3/4}$
44. $(1000)^0$
45. $(100)^{-5/2}$
46. $(0{,}01)^{3/2}$
47. $(5^2 + 12^2)^{-1/2}$
48. $(0{,}0009)^{1/2}$
49. $\left(\dfrac{5}{4}\right)^0$
50. $(-27)^{-2/3}$
51. $(1000)^{5/3}$
52. $32^{-2/5}$
53. $4^{5/2}$
54. $(5^{10})^{-2/5}$
55. $(4^{-3})^{-2/3}$
56. $(5^2 - 4^2)^{1/2}$
57. $(5^2 \cdot 4^2)^{1/2}$
58. $\dfrac{25^{-1/2}}{5^{-3}}$

Efectuar las operaciones indicadas en los Ejercicios del 59 al 97, usando las leyes de los exponentes. Suponer que todas las bases son números reales positivos. Simplificar, dejando las respuestas sin exponentes cero, negativos o fraccionarios.

59. $(a^{-1/3})^3$
60. $(a^{-4})^{1/2}$
61. $\dfrac{2^0m}{m^{1/2}}$
62. $x^{-2} \cdot x^{2/3}$
63. $\left(\dfrac{a^{1/2}}{a^{1/3}}\right)^2$
64. $\left(\dfrac{16}{a^4b^2}\right)^{1/2}$
65. $(4x^2)^{1/2}$
66. $(x^{-1/2} \cdot x^{1/4})^{-1}$
67. $\left(\dfrac{-27}{a^6b^6}\right)^{-1/3}$
68. $\left(\dfrac{4a^3x}{ax^{-1}}\right)^{1/2}$
69. $(17x^3)^0\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-2}$
70. $(8a^3x^{-6})^{-1/3}$

71. $x^{1/2} \cdot x^{1/4} \cdot x^{1/6}$

72. $\dfrac{x^{2/3}}{x^{1/3}}$

73. $\dfrac{x^{2/3}}{x^{-1/3}}$

74. $(r^{1/2}s^{1/2})(r^{1/4}s^{1/4})$

75. $\dfrac{2a^2}{a} + \dfrac{3}{a^{-1}}$

76. $4a^{-1} - \dfrac{5}{a}$

77. $(6^2 - 3^2)^{1/3}$

78. $\dfrac{xy^{-1} + yx^{-1}}{x^{-1} + y^{-1}}$

79. $(2^{-3}a^6)^{1/3}$

80. $(5x^2y^{-6})^{1/3}$

81. $5(x^2y^{-6})^2$

82. $(16a^2b^4)^{1/2}(2a^{-2})$

83. $(2a^{-1/3}b^{2/3}c)^3$

84. $(b^{-3/4})^{4/3}$

85. $(x + y^{-1})^2$

86. $(a^{1/2} - b^{1/2})^2$

87. $(x^{2/3})^{1/2}$

88. $x^{2n-1}y^n \cdot x^{3-n}y^{n-3}$, $n \in N$, $n > 2$

89. $(2a^{1/3}b^{2/3})^6$

90. $\dfrac{4a^{1/2}}{a^{3/2}b^{-1/2}}$

91. $3^{1/2} \cdot 3^{1/3}$

92. $(x^{-1/2}x^{-1/4})^{-2}$

93. $\left(\dfrac{16}{x^3y^{-2}}\right)^{-1/2}$

94. $(a^{1/2} + b^{1/2})^0$

95. $(1 + 2x^{-1})(1 - x^{-2})$

96. $(x^{1/2} - y^{1/2})(x^{1/2} + y^{1/2})$

97. $(x^{1/3} + y^{1/3})(x^{2/3} - x^{1/3}y^{1/3} + y^{2/3})$

98. Demostrar el Teorema 5-9, página 156.

5-5 SIMPLIFICACION DE EXPRESIONES RADICALES

Con frecuencia es necesario alterar la forma de una expresión radical para obtener una expresión más simple o más útil. Esto se puede hacer utilizando las definiciones y leyes de los exponentes.

Ejemplo (a) Simplificar $(\sqrt{5})(\sqrt{7})$.

$\sqrt{5} \cdot \sqrt{7} = 5^{1/2} \cdot 7^{1/2}$ (¿Por qué?)

$= (5 \cdot 7)^{1/2}$ (¿Por qué?)

$= 35^{1/2}$ (¿Por qué?)

$= \sqrt{35}$ (¿Por qué?)

Las ideas ilustradas en este ejemplo son lo suficientemente importantes como para enunciarlas en forma más general en un teorema.

Teorema 5-10 Sean $x, y \in R$, $n \in N$, y ningún radicando es negativo si n es par. Entonces

(a) $\sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$.

(b) $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$.

(c) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$.

Las demostraciones siguen muy de cerca los pasos delineados en el Ejemplo (a) y se dejan al estudiante (Ejercicios 82, 83 y 84, página 161).

Este teorema se puede usar en los tres tipos comunes de simplificación de radicales ilustrados en los Ejemplos (b), (c) y (d):

- Simplificación del radicando
- Eliminación de fracciones bajo el radical o «racionalización de denominadores»
- Simplificación del índice

Ejemplo (b) Simplificar el radicando de $\sqrt{45}$.

$$\sqrt{45}=\sqrt{9\cdot 5}$$
$$=\sqrt{9}\cdot\sqrt{5}$$
$$=3\sqrt{5}$$

Ejemplo (c) Cambiar $\sqrt{\frac{2}{3}}$ a una forma que no contenga fracción bajo el radical.

$$\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{2\cdot 3}{3\cdot 3}}=\sqrt{\frac{6}{3^2}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3^2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}\qquad \text{o}\qquad \frac{1}{3}\sqrt{6}$$

Otra forma es escribir primero $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ y después «racionalizar el denominador»:

$$\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

Ejemplo (d) Simplificar el índice de $\sqrt[6]{81x^4}$.

$$\sqrt[6]{81x^4}=\sqrt[3\cdot 2]{81x^4}=\sqrt[3]{\sqrt{81x^4}}=\sqrt[3]{9x^2}$$

Un segundo método consiste en escribir.

$$\sqrt[6]{81x^4}=\sqrt[6]{(9x^2)^2}=\sqrt[3]{9x^2}$$

en donde el último paso se efectúa al dividir el índice y el exponente del radicando entre 2, como se haría al reducir el exponente fraccionario de $(9x^2)^{2/6}$ para obtener $(9x^2)^{1/3}$.

Los ejemplos que siguen señalan otras técnicas para operar con radicales.

Ejemplo (e) Efectuar las operaciones indicadas: $\sqrt{50}+2\sqrt{18}-5\sqrt{20}$

$$\sqrt{50}+2\sqrt{18}-5\sqrt{20}=5\sqrt{2}+2\cdot 3\sqrt{2}-5\cdot 2\sqrt{5}$$
$$=5\sqrt{2}+6\sqrt{2}-10\sqrt{5}$$
$$=11\sqrt{2}-10\sqrt{5}$$

Nótese que $5\sqrt{2}$ y $6\sqrt{2}$ son términos semejantes por lo que se pueden sumar, sumando los coeficientes de $\sqrt{2}$, como resultado del uso de la ley distributiva por la derecha: $5\sqrt{2}+6\sqrt{2}=(5+6)\sqrt{2}=11\sqrt{2}$.

Ejemplo (f) Racionalizar el denominador de $\frac{1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$.

Se multiplican numerador y denominador por $3+\sqrt{5}$, ya que esto da la diferencia de dos cuadrados y elimina el radical del denominador.

$$\frac{1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}=\frac{(1+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}$$
$$=\frac{(1+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{3^2-(\sqrt{5})^2}$$

El producto $(1+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})$ se encuentra como el producto de cualesquiera dos binomios.

$$=\frac{3+4\sqrt{5}+5}{9-5}$$
$$=\frac{8+4\sqrt{5}}{4}$$
$$=2+\sqrt{5}$$

5-4 Ejercicios

En los Ejercicios del 1 al 36, usar las técnicas de la Sección 5-5 para escribir cada expresión radical en su forma más simple.

1. $\sqrt{72}$
2. $\sqrt{96}$
3. $\sqrt[3]{16}$
4. $\sqrt[5]{96}$
5. $\sqrt[3]{-81}$
6. $\sqrt[5]{-64}$
7. $\sqrt{\frac{5}{21}}$
8. $\sqrt{\frac{3}{20}}$
9. $\sqrt{\frac{12xy^2}{100}}$
10. $\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{75}}$
11. $\sqrt[3]{\frac{1}{16}}$
12. $\sqrt[5]{\frac{3}{4}}$
13. $\sqrt{\frac{8ab^2}{25}}$
14. $\sqrt[4]{81}$
15. $\sqrt[4]{9}$
16. $\sqrt[6]{2^3}$
17. $\sqrt[3]{2^6}$
18. $\sqrt[4]{x^2y^4},\ x>0$
19. $\sqrt{\frac{75}{27}}$
20. $\sqrt[5]{\frac{-32a^{10}}{b^4}}$
21. $\sqrt[10]{32a^5}$
22. $\sqrt{a^{2n}b^{2n}},\ n\in N,\ a,\ b>0$
23. $\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$
24. $\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}},\ y>x>0$
25. $\sqrt[4]{a^2-2ax+x^2},\ a>x$
26. $\sqrt[3]{x^6y^{15}}$
27. $\sqrt[3]{\frac{1}{4}+\frac{1}{9}}$
28. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}$
29. $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}},\ a>b>0$
30. $\sqrt[5]{576}$
31. $\sqrt[3]{-20\,000}$
32. $\sqrt{288x^5y}$
33. $\sqrt[3]{\frac{5y^4}{686x^2}}$
34. $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$
35. $\sqrt[3]{\frac{2}{9x}}$
36. $\sqrt[3]{\sqrt[3]{5}}$

En los Ejercicios del 37 al 67, ejecutar las operaciones indicadas. Simplificar cada respuesta utilizando las técnicas desarrolladas en esta sección.

37. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}$
38. $\sqrt{10}\cdot 5\sqrt{2}$
39. $\frac{\sqrt{63}}{\sqrt{14}}$
40. $3\sqrt{8}+2\sqrt{18}$
41. $\sqrt{50}+\sqrt{32}$
42. $\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{24}$
43. $\sqrt{12}-3\sqrt{6}+\sqrt{8}-\sqrt{24}$
44. $5\sqrt{125}-4\sqrt{25}+2\sqrt{5}$
45. $\sqrt{\frac{8}{3}}+5\sqrt{\frac{2}{3}}-\sqrt{\frac{1}{6}}$
46. $\sqrt{2}(\sqrt{18}-\sqrt{6})$
47. $\sqrt{3}(\sqrt{18}-\sqrt{6})$
48. $(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{3})$
49. $(\sqrt{6}+2\sqrt{3})^2$
50. $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$
51. $(3\sqrt{x}-\sqrt{y})(4\sqrt{x}+5\sqrt{y})$
52. $\frac{3\sqrt{15}-4\sqrt{6}-\sqrt{18}}{2\sqrt{3}}$
53. $\sqrt[3]{18}\cdot\sqrt[3]{9}$
54. $4\sqrt{6}\cdot 7\sqrt[3]{12}$
55. $\frac{2\sqrt[3]{54}}{3\sqrt[3]{4}}$
56. $\sqrt{\frac{x}{48}}$
57. $\frac{19}{\sqrt[3]{27}}$
58. $4\sqrt[3]{250}+3\sqrt[3]{432}$

59. $2\sqrt[3]{56}+\sqrt[3]{-7}$

60. $\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}+5\sqrt[3]{12}-\sqrt[6]{9}$

61. $\dfrac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

62. $\dfrac{4+\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$

63. $\dfrac{1}{5-\sqrt{5}}$

64. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$

65. $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

66. $\dfrac{1}{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$

67. $\dfrac{2\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

En cada uno de los Ejercicios del 68 al 81, efectuar las operaciones indicadas, suponiendo que todas las variables y radicandos son positivos. Simplificar cada respuesta utilizando las técnicas desarrolladas en esta sección.

68. $\dfrac{\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}}$

69. $\dfrac{\sqrt{x-y}}{4-\sqrt{x-y}}$

70. $\dfrac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{y\sqrt{x}-x\sqrt{y}}$

71. $\dfrac{\sqrt{\frac{2}{5}}-\sqrt{\frac{5}{2}}}{\sqrt{\frac{2}{5}}+\sqrt{\frac{5}{2}}}$

72. $\left(\dfrac{3-\sqrt{7}}{\sqrt{5}}\right)^2$

73. $\dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$

74. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}$

75. $\sqrt{a^5b^3}-b\sqrt[3]{a}$

76. $(3\sqrt{10x}-4\sqrt{5x})^2$

77. $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}-\sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}}$

78. $\sqrt[3]{x^{-2}}+\sqrt[3]{x^4}$

79. $\dfrac{2}{\sqrt{a}+\sqrt{3b}}$

80. $\dfrac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}$

81. $\sqrt[5]{x^3\sqrt[3]{x^2\sqrt[3]{x^2}}}$

82. Demostrar el Teorema 5-10 (a).

83. Demostrar el Teorema 5-10 (b).

84. Demostrar el Teorema 5-10 (c).

Funciones, relaciones y sus gráficas 6

6-1 FUNCIONES

Uno de los conceptos más importantes y más universales en matemáticas es el de *función*. En la conversación diaria podemos oír a la gente decir: «El turboencendedor de mi Bel-Auto Super no funcionó ayer» o bien «Una función de la Dirección de Correos es entregar la correspondencia». Un matemático usa la palabra «función» de manera algo diferente a como se usa en el lenguaje ordinario; la usan para denotar un tipo específico de correspondencia o relación entre los elementos de dos conjuntos.

Tales relaciones no son difíciles de encontrar. Por ejemplo, el área de un cuadrado se relaciona con la longitud de su lado; el costo de fabricar una hogaza de pan está asociado con el precio de la harina; la distancia que recorre un carro después de haberle aplicado los frenos está relacionado ciertamente con su velocidad. En cada uno de estos ejemplos existe una conexión entre los elementos de un conjunto y los de otro: un conjunto de números que representan las áreas a un conjunto de números que representan las longitudes; un conjunto de costos a un conjunto de precios; un conjunto de distancias a un conjunto de velocidades.

Aunque cada uno de los ejemplos anteriores se refiere a números, existen muchos casos de correspondencias entre conjuntos no numéricos. Una mapa de una región puede contener un número de puntos cada uno de los cuales representa una ciudad. En este caso tenemos una correspondencia entre un conjunto de puntos y un conjunto de ciudades.

Antes de enunciar una definición formal de función, conviene considerar otro ejemplo más simple. Supóngase que comenzamos con el conjunto de números $\left\{-1, \frac{1}{2}, 1\right\}$. Con cada elemento de este conjunto asociemos el número real que sea el doble del elemento. Con -1 asociamos -2, con $\frac{1}{2}$ asociamos 1 y con 1 asociamos 2. Según eso, con cada elemento del conjunto dado $\left\{-1, \frac{1}{2}, 1\right\}$ asociamos uno, y solo uno, elemento de un segundo conjunto $\{-2, 1, 2\}$. Esta correspondencia o asociación se puede representar más brevemente mediante el conjunto de pares ordenados $\left\{(-1, -2), \left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, 2)\right\}$. Notemos que el primer elemento de cada uno de estos pares es un elemento del conjunto dado; el segundo miembro es el único elemento del segundo conjunto que está asociado con el primer miembro

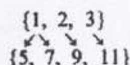
del par. Con estos ejemplos en mente, tendremos poca dificultad para entender las definiciones siguientes.

Definición Una *función* es una correspondencia entre los elementos de dos conjuntos que asocia con cada elemento del primer conjunto un único elemento del segundo conjunto. El primer conjunto se llama *dominio* de la función. Si x es un elemento del dominio de una función, entonces el elemento correspondiente del segundo conjunto se llama *imagen* de x. El conjunto de todas las imágenes se llama *rango* de la función.

Puesto que, como sucede en el ejemplo discutido antes, se puede usar un conjunto de pares ordenados para representar una correspondencia que sea función, la definición que sigue a menudo sustituye a la del párrafo anterior.

Definición Una *función* es un conjunto de pares ordenados en el que no hay dos pares distintos con el mismo primer miembro. El conjunto de todos los primeros miembros de los pares se llama *dominio* de la función y el conjunto de todos los segundos miembros o *imágenes* se llama *rango* o recorrido de la función.

Es importante que se entienda por qué esta segunda definición exige que no haya dos pares distintos con el mismo primer elemento. Consideremos una situación en la que no sea ése el caso. Por ejemplo, el conjunto $\{(1, 5), (1, 7), (2, 9), (3, 11)\}$ representa una correspondencia entre los elementos del conjunto $\{1, 2, 3\}$ y los de $\{5, 7, 9, 11\}$. Esta correspondencia se puede representar en un diagrama de la manera siguiente:



Notamos que el número 1 que pertenece al primer conjunto se asocia con dos elementos del segundo; es decir, el 1 *no* está asociado con un elemento único del segundo conjunto. Por tanto, el conjunto de pares dado no es una función.

Ejemplo (a) El conjunto de pares ordenados $\{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6)\}$ es una función. El dominio de esta función es el conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ y el rango es el conjunto $\{3, 4, 5, 6\}$.

Ejemplo (b) El conjunto $\{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$ es una función cuyo dominio es $\{1, 2, 3, 4\}$ y cuya imagen es $\{1\}$. Obsérvese que la imagen de cada elemento del dominio es el número 1.

Ejemplo (c) El conjunto $\{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$ contiene pares distintos que tienen el mismo primer elemento. Por tanto, este conjunto de pares *no* es una función; la correspondencia definida por dichos pares no asocia un número único con el número 2.

Con frecuencia resulta imposible enumerar todos los pares ordenados que constituyen una función en particular. Sin embargo, usualmente podemos establecer la correspondencia entre los elementos del dominio y los del rango por medio de una ecuación y después usar la notación de conjuntos para designar la función misma. Para ver cómo se hace esto, consideremos la ecuación

$$3x - y = 1, \qquad x \in R$$

Esta ecuación es una proposición abierta en *dos* variables, x y y. Si sustituimos x por 2 y y por 5 en dicha proposición, obtenemos la proposición verdadera

$$3(2) - 5 = 1$$

De ahí que digamos que el par ordenado (2, 5) es una solución de la ecuación dada. Por otra parte, (5, 2) *no* es una solución, puesto que la proposición que se obtiene al hacer $x = 5$ y $y = 2$, es falsa; es decir,

$$3(5) - 2 \neq 1$$

En general, un par de números es una solución de un enunciado abierto en las variables x y y, si, y solo si, la sustitución de x por el primer miembro del par y de y por el segundo miembro, da una proposición verdadera. El conjunto de todas las soluciones se llama solución o conjunto de verdad de la proposición. En la notación por construcción, el conjunto solución de la ecuación $3x - y = 1$ se escribe

$$\{(x, y) \mid 3x - y = 1, \ x \in R\}$$

y se lee «El conjunto de todos los pares ordenados (x, y) tales que $3x - y = 1, x \in R$».

Si resolvemos $3x - y = 1$ para y en términos de x, obtenemos la ecuación equivalente $y = 3x - 1$. De ahí que el conjunto de verdad de $3x - y = 1$ se puede escribir

$$T = \{(x, y) \mid y = 3x - 1, \ x \in R\}$$

Para encontrar los elementos de este conjunto solución solo necesitamos sustituir los valores de x y después determinar los valores de y correspondientes. Según eso, (1, 2), (0, −1) y (−1, −4) son todos elementos de T.

Nótese que la ecuación $y = 3x - 1$ asocia con cada número real x un número real único y, tal que (x, y) es una solución de la ecuación. Consecuentemente,

$$T = \{(x, y) \mid y = 3x - 1, \ x \in R\} = \{(x, y) \mid 3x - y = 1, \ x \in R\}$$

es una función. Esta función se dice que está definida por la ecuación $y = 3x - 1$ o $3x - y = 1$.

Ejemplo (d) El conjunto $\{(x, y) \mid y = |x|, \ x \in R\}$ es una función definida por la ecuación $y = |x|$. La función contiene un número infinito de pares, entre ellos a (1, 1), (−1, 1) y (−5, 5). Cada uno de esos pares es una solución de la ecuación $y = |x|$. El dominio de la función es el conjunto de números reales R y su imagen es el conjunto de los reales no negativos.

Ejemplo (e) Usar la notación por construcción para describir la función $F = \{(-3, 9), (-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$.

Solución: Para cada par $(x, y) \in F$, $y = x^2$. Por tanto, la función se puede describir en la forma

$$F = \{(x, y) \mid y = x^2, x \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}\}$$

Por supuesto, no toda ecuación en dos variables define una función.

Ejemplo (f) El conjunto $\{(x, y) \mid x = y^2, x \in R\}$ *no* es una función. Nótese que (4, 2) y (4, −2) pertenecen al conjunto verdad de $x = y^2$.

Puesto que las ecuaciones usadas para definir las funciones de los Ejemplos (d) y (e) son reglas que hacen corresponder los elementos de un dominio con los de un rango, con frecuencia nos referiremos a tales ecuaciones como *reglas de correspondencia*.

6-2 NOTACION DE FUNCIONES

Es práctica común designar una función por una letra tal como f, g o h. Si x es un elemento del dominio de una función f, entonces el elemento de su rango que

se asocia con x se representa mediante el símbolo $f(x)$. Así, pues, $f(x)$ es la imagen de x y se lee «el valor de f en x» o simplemente «f de x».

Si la regla de correspondencia de una función f está dada por la ecuación $y = x^2$, entonces la imagen de cada elemento x de su dominio es el número x^2. Luego, podemos escribir $f(x) = x^2$, en lugar de $y = x^2$.

Ejemplo (a) El conjunto $f = \{(2, 4), (3, 9), (4, 16)\}$ es una función.

Dominio de $f = \{2, 3, 4\}$
Rango de $f = \{4, 9, 16\}$

En la función f, el elemento del rango que corresponde a 2 es 4; luego, $f(2) = 4$. Similarmente $f(3) = 9$ y $f(4) = 16$.

Ejemplo (b) El conjunto $g = \{(x, y) | y = x^2 + 1, x \in R\}$ es una función en la que $g(x) = x^2 + 1$.

Dominio de $g = R$

Nótese que $y = 1$ cuando $x = 0$. Además, cada vez que se sustituye x por un valor distinto de 0, $x^2 > 0$. Luego,

Rango de $g = \{y \in R \mid y \geq 1\}$

Ejemplo (c) Sea $h = \{(x, y) | y = \sqrt{4 - x^2}, -2 \leq x \leq 2\}$. h también se puede representar por

$h = \{(x, h(x)) | h(x) = \sqrt{4 - x^2}, -2 \leq x \leq 2\}$

En la función h del Ejemplo (c), x se llama *variable independiente* y y se llama *variable dependiente*. En general, cuando se usa una ecuación en dos variables para definir una función, la variable independiente es aquella cuyo conjunto satisfactor es el dominio de la función; la variable dependiente es aquella variable cuyo conjunto satisfactor es el rango de la función.

Supóngase que la regla de correspondencia de una función h (cuyo dominio sea R) está dada por la ecuación $h(x) = 3x^3 - x$. ¿Qué número del rango de h corresponde con el número 1 de su dominio? Al sustituir x por 1 en la expresión $3x^3 - x$, obtenemos un 2. Así, pues, la imagen de 1 es 2 o $h(1) = 2$. Para hallar el número del rango de h que corresponde a un número específico, de su dominio, simplemente remplazamos x en la ecuación $h(x) = 3x^3 - x$ por el número dado. Por ejemplo,

$$h(2) = 3(2)^3 - 2 = 22$$
$$h(a) = 3(a)^3 - a = 3a^3 - a, \quad a \in R$$
$$h(a+1) = 3(a+1)^3 - (a+1) = 3a^3 + 9a^2 + 9a + 3 - a - 1$$
$$= 3a^3 + 9a^2 + 8a + 2, \quad a \in R$$

Ejemplo (d) Sea $f = \{(x, y) | 3x + 2y = 4, x \in R\}$. Dar una expresión para $f(x)$ y encontrar $f(1)$ y $f(2)$.

Solución: Al resolver la ecuación $3x + 2y = 4$ para y, obtenemos $y = \frac{4 - 3x}{2}$. Según eso, con cada $x \in R$ está asociado un número real único $\frac{4 - 3x}{2}$. De ahí que podemos escribir

$$f(x) = \frac{4 - 3x}{2}, \qquad f(1) = \frac{4 - 3}{2} = \frac{1}{2}, \qquad f(2) = \frac{4 - 6}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Ejemplo (e) Sea una función f definida por la ecuación $f(x) = x^3 + 2$. Hallar el número del dominio de f que corresponde al número 10 en el rango.

Solución: Puesto que 10 es un elemento del rango de f, tenemos $f(x) = 10$, o sea $x^3 + 2 = 10$. Por tanto, $x^3 = 8$ o $x = 2$; es decir, $f(2) = 10$.

El dominio, el rango y la regla de correspondencia son partes esenciales de una función. Propiamente, todas esas partes deben quedar especificadas para describir una función completamente. Cuando una función está definida por el enumerado de todos los pares ordenados que pertenecen a ella, no hay ningún problema: El dominio, el rango y la correspondencia están todos expuestos. Sin embargo, cuando una función está definida mediante una ecuación, el dominio y/o el rango con frecuencia no están dados explícitamente. Por ejemplo, en el Ejemplo (b) no había necesidad de dar el rango; no era difícil determinar que el conjunto de todas las imágenes era el de los reales mayores o iguales que 1. Si el dominio de una función no aparece dado, es práctica común suponer que está formado por todos los números reales que, según la regla de correspondencia, tengan una imagen que sea un número real.

Ejemplo (f) Sea una función g definida por la ecuación $g(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)(x+3)}$. Suponiendo que el dominio de g es la totalidad de números reales para los que $g(x)$ es real, usar la notación de conjuntos para describir dicho dominio.

Solución: Puesto que $g(x)$ es real para toda x que no sea 1, 2 ni -3, escribimos

Dominio de $g = \{x \in R \mid x \neq 1,\ x \neq 2,\ x \neq -3\}$

Ejemplo (g) La regla de correspondencia para una función f está dada por $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$. Hallar el dominio de f.

Solución: Si $4 - x^2$ es un número no negativo, entonces $\sqrt{4 - x^2}$ debe ser un no negativo también. Sin embargo, si $4 - x^2 < 0$, $\sqrt{4 - x^2}$ no representa un número real. Así, pues, debemos tener

$$4 - x^2 \geq 0$$
$$x^2 \leq 4$$
$$|x| \leq 2$$

Por tanto,

Dominio de $f = \{x \in R \mid |x| \leq 2\}$

6-3 RELACIONES

Para que un conjunto de pares ordenados se clasifique como función, no deben existir dos pares del conjunto con el mismo primer elemento. Así, pues, de acuerdo con nuestra definición, $\{(x, y) \mid y^2 = x,\ x \in \{0, 1, 4\}\} = \{(0, 0), (1, 1), (1, -1), (4, 2), (4, -2)\}$ no es una función. Tales conjuntos se llaman *relaciones*. De hecho, *cada* conjunto de pares ordenados es una relación. Como en el caso de una función, el dominio de una relación es el conjunto de todos los primeros elementos de los pares y el rango es el conjunto de todos los segundos elementos.

La definición de relación difiere de la de función solo en un aspecto: No es necesario que cada elemento del dominio esté asociado con un solo elemento de la imagen. Según eso, tenemos las dos definiciones equivalentes:

Definición Una *relación* es cualquier conjunto de pares ordenados.

Definición Una *relación* es una correspondencia entre dos conjuntos que asocia con cada elemento del primer conjunto *algún* elemento del segundo conjunto.

Nótese que cada función es una relación, pero que solo algunas relaciones son funciones.

Ejemplo (a) El conjunto de pares ordenados $\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)\}$ es una relación. El dominio de esta relación es el conjunto $\{1\}$; su rango es el conjunto $\{2, 3, 4, 5\}$.

Ejemplo (b) La relación $\{(x, y) | y = x + 2, x \in \{1, 2\}\}$ se puede escribir $\{(1, 3), (2, 4)\}$. Para esta relación el dominio es $\{1, 2\}$ y el rango $\{3, 4\}$. Nótese que ya que cada elemento del dominio está asociado con un solo elemento del rango, esta relación es una función.

Ejemplo (c) $r = \{(x, y) | y > 2 - 2x\}$ es una relación. Puesto que $(1, 1) \in r$ y $(1, 2) \in r$, r no es una función.

6-1 Ejercicios

En los Ejercicios del 1 al 12, decir si la relación dada es una función o no.

1. $\{(1, 3), (4, 6), (7, 9), (10, 12)\}$
2. $\{(\sqrt{7}, 1), (\sqrt{5}, 1), (\sqrt{3}, 1)\}$
3. $\{(1, 4), (3, 4), (4, 3)\}$
4. $\{(4, 4), (3, 4), (4, 3)\}$
5. $\{(-1, 2), (-1, 6), (-1, 10)\}$
6. $\{(x, y) | y = \sqrt{x}, x \in R, x \geq 0\}$
7. $\{(x, y) | y = |x - 2|, x \in R\}$
8. $\{(x, y) | x^2 + y + 1 = 0, x \in R\}$
9. $\{(x, y) | x^2 + y^2 = 1, x \in R, -1 \leq x \leq 1\}$
10. $\{(x, y) | y^2 = x + 1, x \in R, x \geq -1\}$
11. $\{(x, y) | y < x, x \in R\}$
12. $\{(x, y) | y = 2^x, x \in I\}$

13. Sea $f = \{(-4, 2), (-2, 4), (0, 6), (2, 8)\}$.
    (a) Especificar el dominio de f.
    (b) Especificar la imagen de f.
    (c) Dar la regla de correspondencia como una ecuación que contenga las expresiones $f(x)$ y x.

14. Sea $g = \{(-2, 4), (-1, 3), (0, 2), (1, 1), (2, 0), (3, -1)\}$.
    (a) Especificar el dominio de g.
    (b) Especificar la imagen de g.
    (c) Dar la regla de correspondencia como una ecuación que contenga las expresiones $g(x)$ y x.

15. Una función f cuyo dominio es el conjunto $D = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$, está definida mediante la regla de correspondencia $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$.
    (a) Escribir f como un conjunto de pares ordenados.
    (b) Anotar los elementos que pertenecen al rango de f.

16. La función g, cuyo dominio es el conjunto $D = \{-\sqrt{3}, -\sqrt{2}, 0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$, está definida mediante la ecuación $g(x) = x^4 - 2$.
    (a) Anotar los elementos de g.
    (b) Anotar los elementos del rango de g.

17. Si f es la función cuyo dominio es el conjunto $D = \{x \in I | -1 \leq x \leq 4\}$ y $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x + 2}$, escribir f como un conjunto de pares ordenados.

18. Sea $g = \{(x, g(x)) | g(x) = 2x^2 - 3x + 1, x \in R\}$. Hallar
    (a) $g(0)$
    (b) $g\left(\frac{1}{2}\right)$
    (c) $g\left(-\frac{1}{2}\right)$
    (d) $g(\sqrt{2})$
    (e) $g(t), t \in R$
    (f) $g(t + 1), t \in R$
    (g) $g(t + 1) - g(t), t \in R$
    (h) $\dfrac{g(t + s) - g(t)}{s}$, $t, s \in R$

19. Una función G está definida mediante la ecuación $G(x) = 4$. El dominio de G es R.
    (a) Encontrar $G\left(\frac{12}{5}\right)$, $G\left(-\frac{7}{3}\right)$, $G(\pi)$, y $G(182)$.
    (b) ¿Cuál es el rango de G?
    (c) Comparar $G(8)$ con $G(4)$.

20. Sea $H = \{(x, y) | y = 5x, x \in R\}$
    (a) ¿Para qué valor de x es $H(x) = -20$?
    (b) Comparar $H(2) + H(3)$ con $H(5)$.
    (c) Hallar $H(12) - [H(7) + H(5)]$.
    (d) Demostrar que $H(a + b) = H(a) + H(b)$ para cada par de números reales a, b.

21. Sea $f = \{(x, f(x)) | f(x) = x^2, x \in R\}$.
    (a) ¿Para qué valores de x es $f(x) = 25$?
    (b) Usar la notación de conjuntos para describir el rango de f.
    (c) Comparar $f(12)$ con $f(4) \cdot f(3)$.
    (d) Encontrar $\dfrac{f(6) \cdot f(4)}{f(24)}$.
    (e) Demostrar que $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$ para cada par de números racionales a, b.

22. Una función f cuyo dominio es el conjunto de números racionales Q, está definida por la regla de correspondencia
    $f(x) = 9^x$

(a) Hallar: $f(-2), f(1), f\left(-\frac{1}{2}\right), f\left(\frac{1}{2}\right)$, y $f(0)$.

(b) ¿Para qué valor de x es $f(x) = 27$?

(c) Comparar $f(-1)$ con $f(2) \cdot f(-3)$.

(d) Demostrar que $f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$ para cada par de números reales a, b.

En los Ejercicios del 23 al 29 está dada la regla de correspondencia para una función. En cada caso, usar la notación de conjuntos para describir el dominio de la función si se sobreentiende que ha de ser la totalidad de números reales para los cuales la regla da imágenes reales.

23. $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$

24. $g(x) = \dfrac{x^2-4}{x+2}$

25. $F(x) = 2 - x^2$

26. $G(x) = \sqrt{2 - x^2}$

27. $H(x) = \dfrac{x+2}{x-4}$

28. $h(x) = x^{3/2}$

29. $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x - 7}{x^2 + 6x - 7}$

30. Usar la notación de conjuntos para describir el rango de la función G definida en el Ejercicio 26.

31. Usar la notación de conjuntos para describir el rango de la función h definida en el Ejercicio 28.

32. Las funciones f y g están definidas mediante las ecuaciones

$$f(x) = x \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{x^2}{x}$$

(a) ¿Cuál es el dominio de f?

(b) Usar la notación de conjuntos para describir el dominio de g.

(c) ¿En qué difieren las funciones f y g?

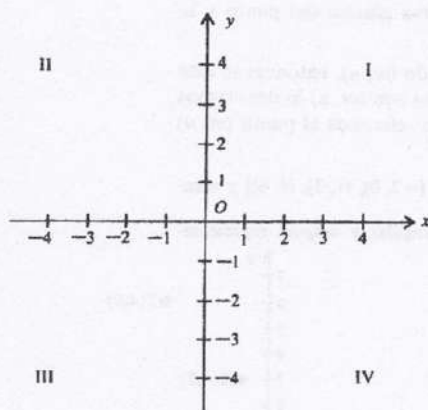
6-4 EL SISTEMA COORDENADO RECTANGULAR

En el Capítulo 3 introdujimos la noción de recta numérica para lograr una comprensión más completa de ciertas relaciones que existen en los números reales.* Asumíamos que había una correspondencia uno a uno entre los puntos de la recta numérica y el conjunto de los números reales. Definíamos después la gráfica de un conjunto de números reales como el conjunto de puntos de la recta numérica. Finalmente, dado que los conjuntos solución de ecuaciones y desigualdades en una variable consisten de números reales, nos era posible graficar dichos conjuntos. En esa forma estábamos capacitados para construir modelos físicos de las relaciones definidas por diversas proposiciones abiertas.

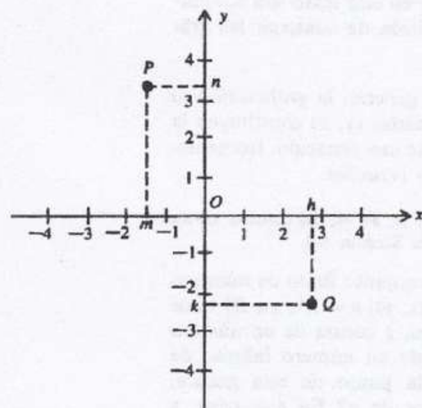
Una gráfica es, quizá, la forma más clara de ilustrar algunas funciones (en general, algunas relaciones). ¿Cómo se construyen tales gráficas? Puesto que una función es un conjunto de *pares* ordenados, nuestro problema es distinto del antes descrito. Cada punto sobre una recta numérica es la gráfica de un solo número real; para graficar una función debemos disponer de un procedimiento para graficar *pares* de números. El dispositivo más comúnmente usado para este propósito fue inventado por el filósofo y matemático francés René Descartes y se llama *sistema coordenado rectangular* o *sistema coordenado cartesiano*. Este sistema es sumamente simple: consiste en dos rectas numéricas dibujadas perpendicularmente una a la otra, en sus orígenes. Las dos rectas numéricas perpendiculares se llaman *ejes coordenados*. El eje horizontal frecuentemente se llama *eje x* o *eje de las x* y el eje vertical, *eje y* o *eje de las y*. El punto de intersección de ambos ejes se llama *origen* del sistema y se denota usualmente por O. Las coordenadas de puntos del eje x a la derecha del origen se consideran positivas; las de puntos a la izquierda del origen, negativas. Similarmente, los puntos del eje y arriba del origen tienen coordenadas positivas y los que están abajo del origen tienen coordenadas negativas.

Los ejes x y y separan el plano en cuatro regiones llamadas *cuadrantes*. Empezando por el que se encuentra arriba a la derecha y desplazándose en sentido contrario a las manecillas del reloj, los cuadrantes se numeran I, II, III, IV.

* Véanse las Secciones 3-8, 3-9 y 3-10.



Una vez que hemos construido un sistema coordenado rectangular, fácilmente podemos establecer una correspondencia uno a uno entre el conjunto de puntos del plano y el conjunto de los pares ordenados de números reales. Es costumbre hacer esto de la manera siguiente. Sea P cualquier punto del plano. Su *proyección perpendicular* * sobre el eje x es un punto cuya coordenada es el número real único m. La proyección perpendicular de P sobre el eje y es un punto que tiene como coordenada al número real único n. Si tomamos a m como el primer elemento de un par y a n como el segundo, entonces con cada punto P del plano hemos asociado un par de números reales (m, n), único. Recíprocamente, para cada par ordenado de números reales (h, k) corresponde exactamente un punto Q, cuyas proyecciones perpendiculares sobre los ejes x y y tienen coordenadas h y k, respectivamente.



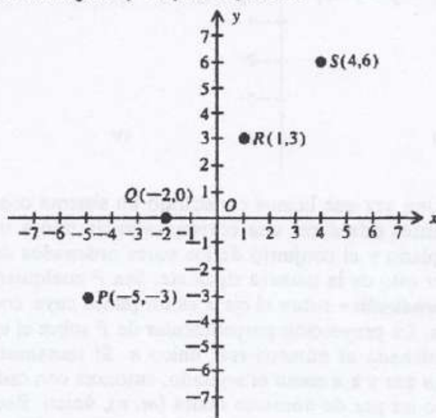
Definición Si (m, n) es el par ordenado asociado con el punto P, como se ha descrito anteriormente, entonces los números m y n se llaman *coordenadas* de P; m se llama *primera* coordenada o *coordenada* x de P; n es la *segunda* coordenada o *coor-*

* La proyección perpendicular de un punto sobre una línea es el pie de la perpendicular bajada del punto a la línea.

denada y de *P*. La primera coordenada también se llama *abscisa* del punto y la segunda, *ordenada* del punto.

Definición Si P es el punto asociado con el par ordenado (m, n), entonces se dice que P es la *gráfica* de (m, n). El punto cuyas coordenadas son (m, n) lo denotamos por $P(m, n)$*. Si no se presta a ambigüedad, a veces nos referimos al punto (m, n) más bien que al punto $P(m, n)$.

Ejemplo Graficar el conjunto de pares ordenados $\{(-5, -3), (-2, 0), (1, 3), (4, 6)\}$ y nombrar el cuadrante en que queda cada uno.
Solución: Construimos primero un sistema coordenado rectangular y después representamos con un punto y marcamos, cada uno de los puntos $P(-5, -3)$, $Q(-2, 0)$, $R(1, 3)$ y $S(4, 6)$. P queda en el III cuadrante. Q queda sobre un eje y, por tanto, no está en ningún cuadrante. R y S están en el I cuadrante.



6-5 GRAFICAS DE FUNCIONES Y RELACIONES

Las funciones y relaciones con que más hemos de tratar en este texto son conjuntos de pares de números reales. Estamos ahora en posición de construir las gráficas de tales conjuntos.

Definición La *gráfica de una función* o en forma más general, la *gráfica de una relación* es el conjunto de puntos $P(x, y)$ cuyas coordenadas (x, y) constituyen la función o relación. Si una relación está definida mediante una ecuación, frecuentemente nos referimos a su gráfica como la *gráfica de la ecuación*.

Ejemplo (a) La gráfica de la función $f = \{(-5, -3), (-2, 0), (1, 3), (4, 6)\}$ consiste en los cuatro puntos que se muestran en la figura del ejemplo de la Sección 6-4.

Generalmente, el dominio de una función no es un conjunto finito de números como el del Ejemplo (a). Por ejemplo, la función $g = \{(x, y) | y = x^2, x \in R\}$ tiene como dominio al conjunto de números reales. Asi, pues, g consta de un número infinito de pares ordenados y la gráfica de g consta de un número infinito de puntos. Resulta obvio que es imposible graficar cada punto de esta gráfica. ¿Qué método seguir, entonces, para obtener la gráfica de g? En este caso, y en la mayoría de casos semejantes, graficaremos lo que parezca ser una muestra representativa de puntos y trazaremos los otros conectando los puntos graficados mediante una curva «suave». Ilustramos este procedimiento en el ejemplo que sigue.

* $P(m, n)$ se lee P de m, n.

Ejemplo (b) Trazar la gráfica de la función

$f = \{(x, y) \mid y = x^2 - x - 6, x \in R\}$

Solución: Se puede construir una muestra representativa de los pares ordenados que pertenecen a f, seleccionando valores arbitrarios de x y determinando los valores correspondientes de y. En este caso, comenzaremos por escoger para x los valores -2, -1, 0, 1 y 2 y calcularemos los valores correspondientes de y como sigue:

$$
\begin{aligned}
x &= -2, & y &= (-2)^2 - (-2) - 6 = 0 \\
x &= -1, & y &= (-1)^2 - (-1) - 6 = -4 \\
x &= 0, & y &= (0)^2 - (0) - 6 = -6 \\
x &= 1, & y &= (1)^2 - (1) - 6 = -6 \\
x &= 2, & y &= (2)^2 - (2) - 6 = -4
\end{aligned}
$$

Además, se encontrará conveniente construir una tabla similar a la que muestra la Figura 6-1. Cuando se selecciona un valor de x se anota en la tabla y el valor de y se anota a continuación de él. Al graficar los pares así determinados, obtenemos la gráfica que aparece en la Figura 6-1.

x	y
-2	0
-1	-4
0	-6
1	-6
2	-4

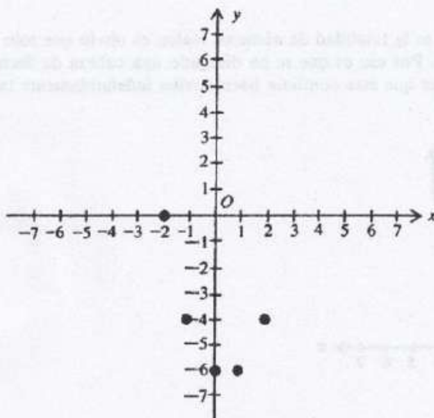


Figura 6-1

Ahora se presentan dos cuestiones relacionadas: ¿Hemos graficado una muestra suficientemente grande de puntos de la gráfica? Al trazar los restantes puntos, ¿tendremos una aproximación razonable de la gráfica real? Las respuestas a estas cuestiones dependen probablemente de la experiencia. Mientras más se conozca acerca de una función, menor será la cantidad de puntos que se tengan que graficar para tener una buena aproximación de la gráfica exacta.

En el caso presente, supondremos que será una buena ayuda tener por lo menos un punto más, a la izquierda de $(-2, 0)$, uno entre $(0, 6)$ y $(1, -6)$ y otros dos a la derecha de $(2, -4)$. Así, pues, debemos hacer las anotaciones adicionales en la tabla de la Figura 6-2 y después graficar los puntos correspondientes como se muestra en la gráfica. Observemos cómo los puntos graficados forman un patrón definido. Por ello, podemos ahora trazar algunos de los puntos faltantes de nuestra gráfica. Si comenzamos por el punto que se encuentra más a la izquierda y nos movemos luego hacia la derecha, uniendo cada punto siguiente mediante una curva suave, podemos suponer que esta curva es una aproximación razonable a la gráfica de la función dada (Figura 6-3).

x	y
-2	0
-1	-4
0	-6
1	-6
2	-4
-3	6
$\frac{1}{2}$	$-6\frac{1}{4}$
3	0
4	6

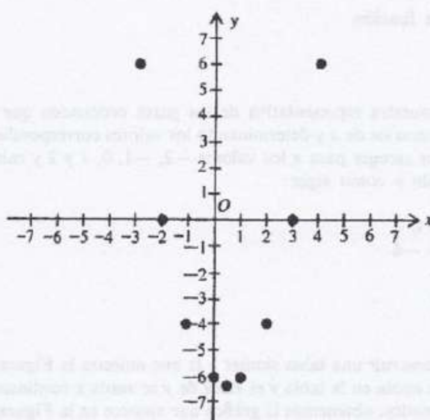


Figura 6-2

Ya que el dominio de la función f es la totalidad de números reales, es obvio que solo podremos trazar una parte de la gráfica. Por eso es que se ha dibujado una cabeza de flecha a cada extremo de la curva, para indicar que ésta continúa hacia arriba indefinidamente tanto a la derecha como a la izquierda.

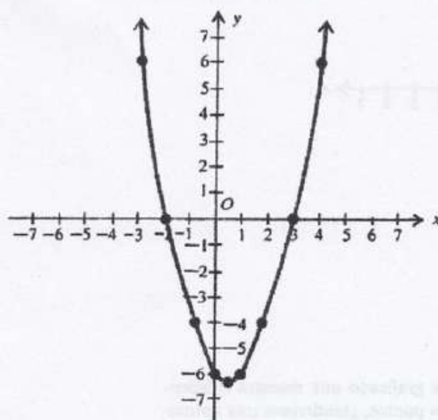


Figura 6-3

La curva trazada en el Ejemplo (b), nos brinda una buena cantidad de información acerca de la función $f = \{(x, y) | y = x^2 - x - 6, x \in R\}$:

(1) el valor mínimo de $f(x)$ resulta ser $-6\frac{1}{4}$ que se presenta cuando $x = \frac{1}{2}$;

(2) el rango de f es $\left\{y \in R | y \geq -6\frac{1}{4}\right\}$;

(3) el valor de $f(x)$ crece rápidamente a medida que x decrece a partir de -2 o cuando x crece a partir de 3;

(4) $f(x) = 0$ cuando $x = -2$ y cuando $x = 3$.

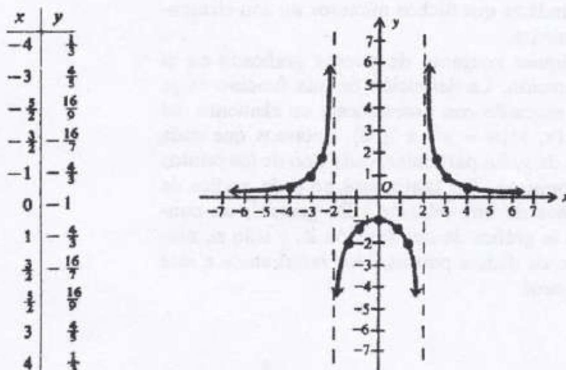
Una regla de correspondencia utilizada para definir una función no siempre está escrita de modo que y quede expresada explícitamente en términos de x. Así, pues, una función f puede estar definida por la ecuación $yx^2 = 1 - x^2$; es decir, $f = \{(x, y) | yx^2 = 1 - x^2\}$. Antes de trazar la gráfica de una función tal, con frecuencia se encontrará conveniente escribir una ecuación equivalente en la que y quede expresada en términos de x.

Ejemplo (c) La regla de correspondencia de una función f está dada por $yx^2 = 4 + 4y$. Hacer la gráfica de f.

Solución: Al resolver para y la ecuación dada, obtenemos

$$y = \frac{4}{x^2 - 4}$$

Puesto que $x^2 - 4 = 0$ cuando $x = 2$ y cuando $x = -2$, debemos excluir 2 y -2 del dominio de f. Esto significa que nuestra gráfica no contendrá puntos con abscisas 2 ni -2. Luego, usando el procedimiento desarrollado en el Ejemplo (b), obtenemos la gráfica que sigue.



x	y
-4	$\frac{1}{3}$
-3	$\frac{4}{5}$
$-\frac{5}{2}$	$\frac{16}{9}$
$-\frac{3}{2}$	$-\frac{16}{7}$
-1	$-\frac{4}{3}$
0	-1
1	$-\frac{4}{3}$
$\frac{3}{2}$	$-\frac{16}{7}$
$\frac{5}{2}$	$\frac{16}{9}$
3	$\frac{4}{5}$
4	$\frac{1}{3}$

¿Cruza la gráfica de f al eje x? Si lo hace, debe existir algún punto de la gráfica cuya ordenada sea 0. Resolvamos para x en términos de y, para ver si esto es posible. Obtenemos

$$x = \pm \sqrt{\frac{4 + 4y}{y}} \quad *$$

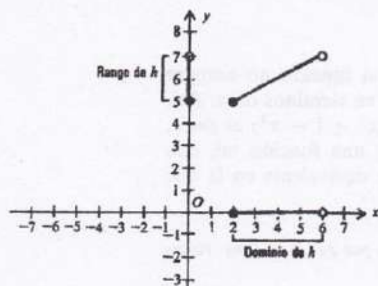
Dado que la expresión $\frac{4 + 4y}{y}$ no está definida para $y = 0$, se comprende que 0 no puede pertenecer al rango de f.

Notemos que no hay puntos de la gráfica de f cuya ordenada tenga valores desde -1 hasta 0. ¿Se nota que el rango de f se puede escribir del modo siguiente?

$\{y \in R | y \leq -1\} \cup \{y \in R | 0 < y\}$

Como se ilustró en los Ejemplos (b) y (c), con frecuencia podemos ver en la gráfica de una función las limitaciones de su dominio o de su rango. Como otra ilustración, consideremos la gráfica de la función h que aquí se muestra. De ella obtenemos la información siguiente:

* El símbolo $\pm$ se lee más menos.

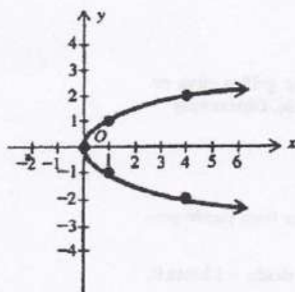


Gráfica de una función h

Dominio de $h = \{x | 2 \leq x < 6\}$
Rango de $h = \{y | 5 \leq y < 7\}$

Nótese que en la figura hemos usado un punto «abierto» en el punto $P(6, 7)$ para indicar que el par $(6, 7)$ no pertenece a la función h. Similarmente, hemos usado puntos abiertos en $x = 6$ y $y = 7$ para indicar que dichos números no son elementos del dominio y del rango, respectivamente.

Debe resultar evidente que no cualquier conjunto de puntos graficado en el plano cartesiano es la gráfica de una función. La definición de una función exige que cada elemento de su dominio esté asociado con *exactamente* un elemento del rango. Si consideramos la gráfica de $\{(x, y) | x = y^2, x \geq 0\}$, notamos que cada valor de x está asociado con dos valores de y. En particular, cada uno de los puntos $(1, 1)$ y $(1, -1)$ está en la gráfica del conjunto. Por tanto, ésta no es la gráfica de una función. (Es, sin embargo, la gráfica de una relación.) En general, un conjunto de puntos del plano cartesiano es la gráfica de una función si, y solo si, ninguna línea vertical contiene más de uno de dichos puntos. Nos referiremos a este principio como la *prueba de la línea vertical.*



Gráfica de $\{(x,y) | x = y^2, x \geq 0\}$

Ejemplo (d) ¿Cuáles de los conjuntos de puntos de la página siguiente son gráficas de funciones?

Solo la gráfica que aparece en la Figura 6-4 es gráfica de una función. Cada una de las tres, es gráfica de una relación.

Ejemplo (e) Graficar la relación $r = \{(x, y) | x = 4, y \in R\}$.

Solución: Cualquier par ordenado con primer elemento igual a 4, es un elemento de r. Por

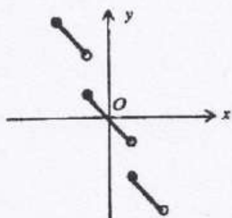


Figura 6-4

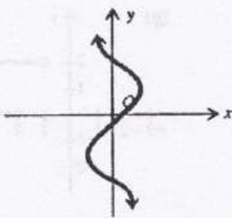


Figura 6-5

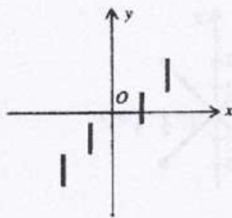
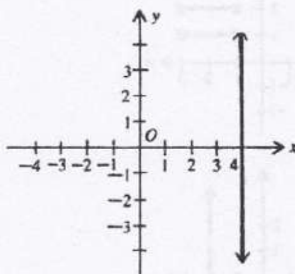


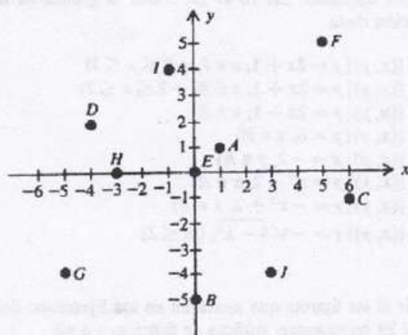
Figura 6-6

ejemplo, cada uno de los pares ordenados $(4, -3)$, $(4, 0)$ y $\left(4, 2\frac{1}{2}\right)$ pertenecen a r. La gráfica de r es una recta paralela al eje y y a cuatro unidades a su derecha.



6-2 Ejercicios

1. Dar las coordenadas de los puntos marcados en la figura.



2. ¿En qué cuadrante (o cuadrantes) debe quedar un punto si su abscisa es negativa?
3. ¿En qué cuadrante (o cuadrantes) es negativa la abscisa de un punto y positiva su ordenada?
4. La ordenada de un punto es 0 y su abscisa es negativa. ¿Dónde queda dicho punto?
5. La abscisa de un punto es 0 y su ordenada es positiva. ¿Dónde queda dicho punto?
6. Dar las coordenadas de cada uno de los puntos descritos a continuación.

(a) Su ordenada es 3 y su abscisa es -5.

(b) Su ordenada es cuatro veces su abscisa y su abscisa es $-\frac{1}{2}$.

(c) Su abscisa es 2 unidades más que su ordenada y su abscisa es -1.

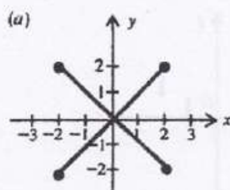
(d) Su ordenada es 4 y queda en el eje y positivo.

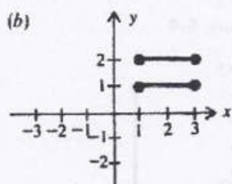
(e) Su abscisa es -3 y queda en el eje x.

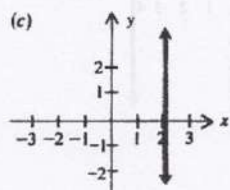
(f) Su abscisa es 4 y su ordenada es 5 unidades menor que su abscisa.

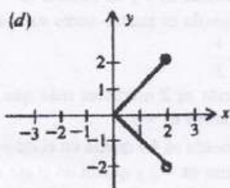
En los Ejercicios del 7 al 15 comparar el número de la relación dada con la letra de una de las gráficas que aparecen abajo.

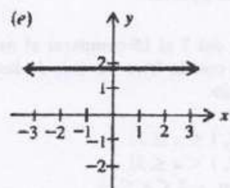
7. $\{(x, y) \mid y = 2, 1 \leq x \leq 3\}$
8. $\{(x, y) \mid y = 2, 1 < x \leq 3\}$
9. $\{(x, y) \mid y = |x|, -2 \leq x \leq 2\}$ $\cup \{(x, y) \mid y = 2, -2 < x < 2\}$
10. $\{(x, y) \mid y = 2, x \in R\}$
11. $\{(x, y) \mid y = 1, 1 \leq x \leq 3\}$ $\cup \{(x, y) \mid y = 2, 1 \leq x \leq 3\}$
12. $\{(x, y) \mid x = |y|, -2 < y \leq 2\}$
13. $\{(x, y) \mid y = x, -2 \leq x \leq 2\}$ $\cup \{(x, y) \mid y = -x, -2 \leq x \leq 2\}$
14. $\{(x, y) \mid x = 2, y \in R\}$
15. $\{(x, y) \mid y = 2 - |x|, -2 \leq x \leq 2\}$

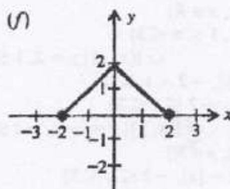


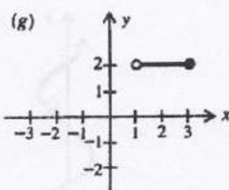


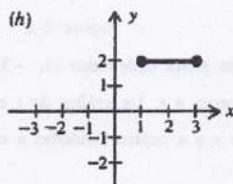


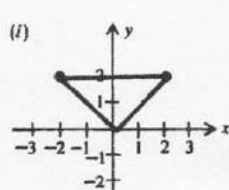










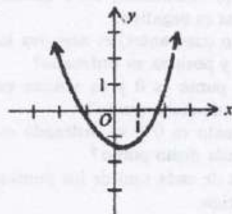


En los Ejercicios del 16 al 23, trazar la gráfica de la relación dada.

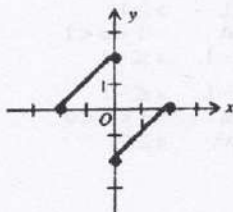
16. $\{(x, y) \mid y = 2x + 1,\ x \in I,\ -2 \leq x \leq 3\}$
17. $\{(x, y) \mid y = 2x + 1,\ x \in R,\ -2 \leq x \leq 3\}$
18 $\{(x, y) \mid y = 2x + 1,\ x \in R\}$
19. $\{(x, y) \mid y = 6,\ x \in R\}$
20. $\{(x, y) \mid x = -2,\ y \in R\}$
21. $\{(x, y) \mid y = x^2 - 2,\ x \in R\}$
22. $\{(x, y) \mid y = -x^2 + 2,\ x \in R\}$
23. $\{(x, y) \mid y = -\sqrt{4 - x^2},\ |x| \leq 2\}$

Decir si las figuras que aparecen en los Ejercicios del 24 al 29 representan gráficas de funciones o no.

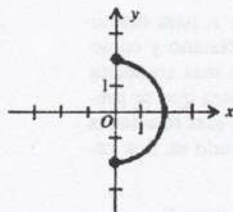
24.



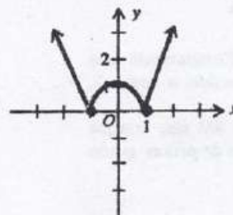
25.



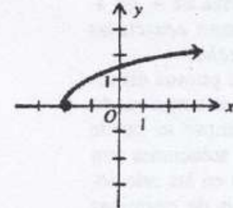
26.



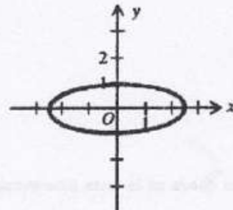
27.



28.



29.



30. Supóngase que la figura que aparece en el Ejercicio 24 representa la gráfica de una función f. Sea h una función tal que $h(x) = -f(x)$ para cada x en el dominio de f. Trazar la gráfica de h.

31. Sea la figura del Ejercicio 27 la gráfica de una función f. Una función g está definida por la ecuación $g(x) = f(x) - 1$ para toda x en el dominio de f. Trazar la gráfica de g.

32. Sea f la función cuya gráfica aparece en el Ejercicio 27. Sea H una función con el mismo dominio que f. Si $H(x) = f(-x)$, trazar la gráfica de H.

33. Sea $g = \{(x, y) | y = x + 1, -2 \leq x \leq 1\}$. Trazar la gráfica de cada una de las funciones definidas a continuación.

(a) $h(x) = g(x)$ (c) $f(x) = 1 + g(x)$
(b) $H(x) = -2g(x)$

En los Ejercicios del 34 al 37, está dada la regla de correspondencia de una función. Trazar la gráfica de la función e indicar su dominio y rango marcándolos con trazos gruesos sobre los ejes x y y, respectivamente. (Véase la figura de la página 174.)

34. $f(x) = x + 3$ y $1 \leq x \leq 3$

35. $g(x) = -x^2 + 2$ y $-2 < x < 2$

36. $h(x) = 1 + \sqrt{x}$ y $0 \leq x < 4$

37 $y = 2^x$ y $0 < x < 2,\ x \in Q$

Graficar las funciones definidas por las ecuaciones dadas en los Ejercicios del 38 al 42. En cada caso, uno o más números reales deben quedar excluidos del dominio de la función. Trazar líneas punteadas verticales por dichos números excluidos. (Véase el Ejemplo (c), Sección 6-5.)

38. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

39. $H(x) = \dfrac{2}{x+2}$

40. $y = \dfrac{x-1}{x+1}$

41. $y = \dfrac{2}{x^2-1}$

42. $xy + x^2 = 1$

43. Trazar la gráfica de

$$\{(x, y) | (y - x + 3)(y + 2x - 1) = 0\}$$

44. A veces, una función está definida mediante dos o más ecuaciones. Según eso, podemos definir una función G como sigue:

$$G(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Este par de ecuaciones es en realidad una sola regla de correspondencia que define a G para toda $x \in R$. Si x es negativa, entonces la imagen de x es $-x$. Sin embargo, si x es no negativa, la imagen de x es x^2. Trazar la gráfica de G.

45. Trazar la gráfica de cada una de las funciones definidas a continuación.

(a) $H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 1 \\ 0, & -1 < x < 1 \\ -1, & x \leq -1 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} -1, & x \leq -1 \\ x, & -1 < x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

6-6 ECUACIONES LINEALES Y RELACIONES LINEALES

Hemos visto cómo se puede usar una ecuación en dos variables, x y y, para definir una relación, cómo una relación se puede graficar en el plano cartesiano y cómo esta gráfica, a su vez, se puede usar para lograr una comprensión más completa de la relación. En esta sección examinaremos un grupo de relaciones que se presentan con frecuencia en la matemática y en la ciencia. Cada una de esas relaciones está definida por una ecuación o por una desigualdad de primer grado en dos variables.

Definición Sean a, b y c constantes reales tales que a y b no sean ambas cero. Entonces, cualquier ecuación equivalente a una de la forma $ax + by + c = 0$ se dice que es una *ecuación de primer grado* en las variables x y y.

Ejemplo (a) $2x - y + 4 = 0$ es una ecuación de primer grado en x y y. Comparando esta ecuación con la ecuación $ax + by + c = 0$ se puede notar que hemos tomado a como 2, b como -1 y c como 4.

Ejemplo (b) $2x + 4 = 0$ se puede escribir como $2x + 0 \cdot y + 4 = 0$. De ahí que aunque la variable y no aparece, $2x + 4 = 0$ se puede considerar como una ecuación de primer grado en x y y.

Supóngase que x y y son variables reales; es decir, que el conjunto de números reales es el conjunto satisfactor tanto para x como para y. Entonces, se puede demostrar que la gráfica de cualquier ecuación de primer grado de la forma $ax + by + c = 0$ es una línea recta. Por esto es que tales ecuaciones se llaman *ecuaciones lineales* y que las relaciones que definen se llaman *relaciones lineales*.

Hay un conocido postulado de la geometría que afirma que dos puntos distintos determinan una recta y solo una. De este postulado (y del teorema mencionado anteriormente) se sigue que la gráfica de una ecuación lineal siempre se puede trazar uniendo simplemente las gráficas de cualesquiera dos de sus soluciones con una línea recta.* Sin embargo, para lograr una mayor penetración en las relaciones lineales, y para desarrollar algunas herramientas útiles, hemos de examinar las gráficas de varios tipos de ecuaciones lineales en los ejemplos que siguen:

Ejemplo (c) Graficar la ecuación lineal

$2x - y + 4 = 0$

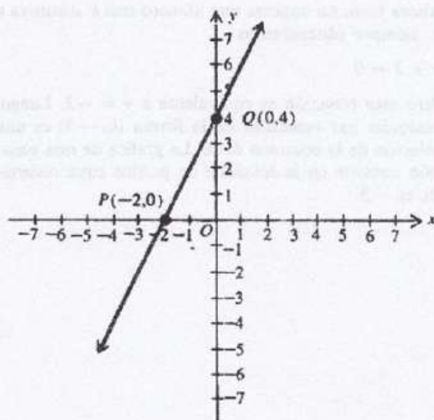
Solución: La ecuación dada sigue el patrón descrito

* En la práctica, usualmente se grafica una tercera solución. Si este tercer punto queda en la línea determinada por los otros dos, sirve de comprobación.

antes, con 2, -1 y 4 en los papeles de a, b y c, respectivamente. Si hacemos $y = 0$, obtenemos

$$2x + 4 = 0$$
$$x = -2$$

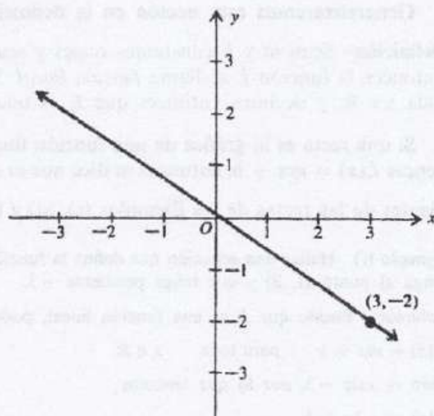
Así, pues, $(-2, 0)$ es una solución de la ecuación dada. Similarmente, si hacemos $x = 0$, obtenemos $y = 4$. Luego, $(0, 4)$ es una segunda solución. Para obtener la gráfica requerida, solo necesitamos unir los puntos $P(-2, 0)$ y $Q(0, 4)$ con una línea recta.



Obsérvese que en el Ejemplo (c), la gráfica cruza cada uno de los ejes. La abscisa del punto en que la línea cruza al eje x se llama *intersección x* de la gráfica. Similarmente, la *intersección y* es la ordenada del punto en que la línea intersecta al eje y. En general, si $a, b \neq 0$, la intersección x se encuentra sustituyendo y por 0 y resolviendo para x. De manera semejante, determinamos la intersección y haciendo $x = 0$ y resolviendo para y.

Ejemplo (d) Graficar la ecuación $2x + 3y = 0$.

Solución: En este caso, $c = 0$ y $(0, 0)$ es una solución de la ecuación. Las intersecciones, tanto de x como de y, son 0 por lo que necesitamos un segundo punto para determinar la recta. $(3, -2)$ es un punto tal.



Ejemplo (e) Graficar la ecuación $y + 3 = 0$ en el plano cartesiano.

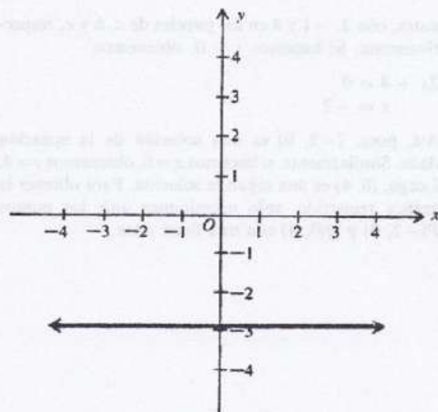
Solución: Si consideramos la ecuación como lineal en x y y, podemos poner

$$0 \cdot x + y + 3 = 0$$

Ahora bien, no importa qué número real k sustituya a x, siempre obtendremos

$y + 3 = 0$

Pero esta ecuación es equivalente a $y = -3$. Luego, cualquier par ordenado de la forma $(k, -3)$ es una solución de la ecuación dada. La gráfica de esta ecuación consiste en la *totalidad* de puntos cuya ordenada es -3.



Mediante la prueba de la línea vertical, es fácil ver que cada una de las gráficas construidas en los Ejemplos (c), (d) y (e) representa una función. Nótese también que cada una de las ecuaciones utilizadas para definir dichas funciones es de la forma $ax + by + c = 0$, en donde $b \neq 0$. En todos esos casos podemos resolver para y y escribir la ecuación en la forma $y = mx + b$. Según eso,

en el Ejemplo (c): $y = 2x + 4$;

en el Ejemplo (d): $y = -\frac{2}{3}x$ o $y = -\frac{2}{3}x + 0$;

en el Ejemplo (e): $y = -3$ o $y = 0 \cdot x + (-3)$.

Generalizaremos esta noción en la definición que sigue.

Definición Sean m y b constantes reales y sea $L(x) = mx + b$ para toda $x \in R$. Entonces la función L se llama *función lineal*. Si $m = 0$, entonces $L(x) = b$, para toda $x \in R$, y decimos entonces que L es una *función constante*.

Si una recta es la gráfica de una función lineal dada por la regla de correspondencia $L(x) = mx + b$, entonces se dice que m es la *pendiente* de la recta. Las pendientes de las rectas de los Ejemplos (c), (d) y (e) son 2, $-\frac{2}{3}$ y 0, respectivamente.

Ejemplo (f) Hallar una ecuación que defina la función lineal L, tal que la gráfica de L contenga al punto $(1, 2)$ y que tenga pendiente -3.

Solución: Puesto que L es una función lineal, podemos poner

$L(x) = mx + b$ para toda $x \in R$

Pero m vale -3, por lo que tenemos

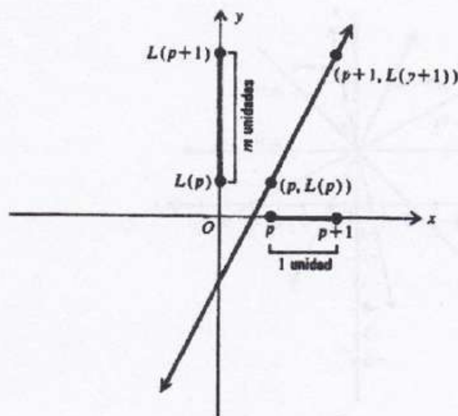
$L(x) = -3x + b$

Puesto que $(1, 2)$ es un punto de la gráfica de L, sabemos que $L(1) = 2$. De ahí que

$L(1) = -3 \cdot 1 + b = 2$

Resolviendo para b obtenemos $b = 5$. Por tanto, la ecuación buscada se puede poner

$L(x) = -3x + 5$ o $y = -3x + 5$



Se puede dar una interpretación geométrica simple de la pendiente de una recta. Sea L una función definida por

$$L(x) = mx + b$$

y sea p la abscisa de un punto fijo en el eje x. Se sigue entonces que $p + 1$ es la abscisa de un punto en el eje x a una unidad a la derecha del punto dado.
La imagen de p es

$$L(p) = mp + b$$

y la imagen de $p + 1$ es

$$\begin{aligned} L(p + 1) &= m(p + 1) + b \\ &= mp + m + b \\ &= (mp + b) + m \end{aligned}$$

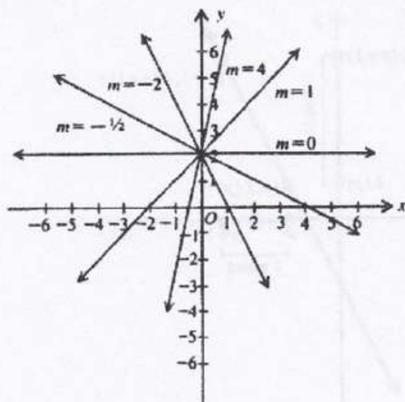
Además, la diferencia entre ambas imágenes es

$$L(p + 1) - L(p) = (mp + b) + m - (mp + b) = m$$

Ahora bien, ¿qué significan estos resultados en términos de la gráfica de L? Bien, si partimos de cualquier punto de dicha recta que tenga una abscisa p y nos movemos hasta el punto cuya abscisa sea $p + 1$, producimos un cambio de m unidades en la ordenada correspondiente. Por tanto, la pendiente de una recta se puede interpretar como una medida del cambio en y por unidad de cambio en x, cuando nos movemos de *izquierda a derecha* sobre la recta.

Si $m > 0$, el cambio en y es positivo y la línea se desliza hacia arriba a la derecha. Si $m < 0$, la pendiente es negativa y la recta se desliza hacia abajo a la derecha. Si $m = 0$, la recta es paralela al eje x. Notemos también que a mayor valor absoluto de m, mayor cambio en y por unidad de cambio en x y, por tanto, recta más próxima a la vertical.

Ejemplo (g) Graficar $y = mx + 2$ para $m = -2$,
$m = -\frac{1}{2}$, $m = 0$, $m = 1$ y $m = 4$.



Es evidente que cuando una función lineal está definida por la ecuación $y = mx + b$, la intersección y de su gráfica es el número b. Según eso, la intersección y de cada línea graficada en el Ejemplo (g) es 2. En general, si dos funciones lineales diferentes están definidas por las ecuaciones $y = mx + b$ y $y = nx + b$, entonces las gráficas de ambas funciones tienen intersección y igual a b.

Existe otra relación importante entre las ecuaciones que definen funciones lineales y sus gráficas. Supóngase que dos funciones lineales diferentes están definidas por

$$J(x) = ax + b \qquad \text{y} \qquad L(x) = ax + c$$

donde a, b y c son números reales dados. Obsérvese que las gráficas de J y L tienen la misma pendiente. Ahora bien, para cada número real k, tenemos

$$J(k) = a \cdot k + b \qquad \text{y} \qquad L(k) = a \cdot k + c$$

Puesto que las funciones son diferentes, $b \neq c$ y $J(k) \neq L(k)$. Por tanto, no hay par ordenado que pertenezca tanto a J como a L. Esto significa que las gráficas de dichas funciones no tienen puntos en común y que, por tanto, han de ser rectas paralelas.

En resumen: Si dos líneas que tienen la misma pendiente son gráficas de diferentes funciones lineales, entonces las líneas son paralelas.

Ejemplo (h) La gráfica de $2x + y - 4 = 0$ es paralela a la de $2ax - 3y = 2$. Hallar el número a.

Solución: Primero escribamos cada una de las ecuaciones dadas, en la forma $y = mx + b$:

$2x + y - 4 = 0$ es equivalente a $y = -2x + 4$

y

$2ax - 3y = 2$ es equivalente a $y = \dfrac{2a}{3}x - \dfrac{2}{3}$

Las gráficas de las funciones definidas por esas dos ecuaciones serán paralelas si tienen la misma pendiente y ése será el caso si

$$\frac{2a}{3} = -2 \qquad \text{o} \qquad a = -3$$

Completaremos esta sección analizando tipos de relaciones lineales que *no* son funciones.

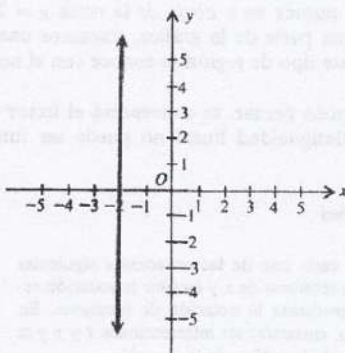
Ejemplo (i) Graficar la relación lineal definida por $2x + 4 = 0$.

Solución: Como señalábamos en el Ejemplo (b), esta ecuación se puede escribir en la forma

$2x + 0 \cdot y + 4 = 0$

Cada par ordenado de la forma $(-2, k)$ es una solución de la ecuación. Consecuentemente, la gráfica requerida está formada por todos los puntos con abscisa -2. Dichos puntos forman una recta paralela al eje y y a dos unidades a su izquierda.

El dominio de esta relación consiste solo en el número -2; su rango contiene un número infinito de elementos. No es una función. Más aún, la pendiente de esta recta no está definida.



En el Ejemplo (c) graficábamos la ecuación lineal $2x - y + 4 = 0$. Si el signo de igualdad de dicha ecuación se sustituye por uno de orden ($<$, $\leq$, $>$ o $\geq$), la proposición resultante se llama *desigualdad de primer grado* o *desigualdad lineal* en x y y.

Ejemplo (j) Trazar la gráfica de la relación definida por $2x - y + 4 < 0$.

Solución: Al resolver para y en términos de x, obtenemos la ecuación equivalente

$-y < -2x - 4$

o

$y > 2x + 4$ (¿Por qué?)

Sabemos que la gráfica de la ecuación $y = 2x + 4$ es una línea recta y que el punto (x, y) queda sobre dicha recta si, y solo si, y es *igual a* $2x + 4$. Por otra parte, el punto (x, y) pertenecerá a la gráfica de la desigualdad $y > 2x + 4$ si, y solo si, *y es mayor que* $2x + 4$. Geométricamente, esto significa que el punto (x, y) pertenece a la gráfica de la desigualdad dada si, y solo si, queda directamente arriba de un punto de la recta. Luego, la gráfica solicitada está formada por todos los

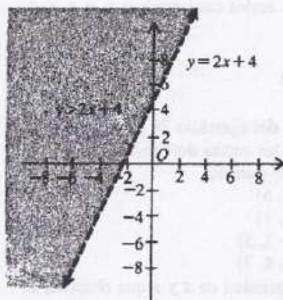


Figura 6-7

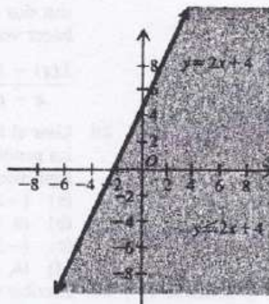


Figura 6-8

puntos arriba de la recta; es la región sombreada que muestra la Figura 6-7. Tales regiones se llaman *semiplanos*.

Por un razonamiento similar, la gráfica de la desigualdad $y \leq 2x + 4$ es la totalidad de puntos *en* o *abajo de* la recta $y = 2x + 4$. Para indicar que la recta también forma parte de la gráfica, trazamos una línea sólida en vez de una línea punteada. Este tipo de región se conoce con el nombre de *semiplano cerrado* (Figura 6-8).

Tras de poco pensar, se convencerá el lector de que una relación definida mediante una desigualdad lineal no puede ser función.

6-3 Ejercicios

1. Resolver cada una de las ecuaciones siguientes para y en términos de x y escribir la ecuación resultante mediante la notación de funciones. En cada caso, encontrar las intersecciones x y y y la pendiente de la gráfica de la ecuación.

   (a) $3x - 2y + 6 = 0$
   (b) $x + 4y - 2 = 0$
   (c) $-3x + 2y = 4$
   (d) $gx + hy + k = 0, g, h, k \neq 0$

Hallar una ecuación para cada una de las relaciones cuyas gráficas aparecen descritas en los Ejercicios del 2 al 7.

2. Una línea paralela al eje x y que pasa por el punto $(2, -2)$.
3. Una línea perpendicular al eje x y que pasa por el punto $(2, -2)$.
4. El eje x.
5. El eje y.
6. Una línea paralela al eje y y dos unidades a su izquierda.
7. Una línea paralela al eje x y dos unidades abajo.

En los Ejercicios del 8 al 16, graficar las relaciones dadas.

8. $\{(x, y) \mid 2x - y = 5, x \in R\}$
9. $\{(x, f(x)) \mid f(x) = 1\}$
10. $\{(x, y) \mid x = -3\}$
11. $\{(x, f(x)) \mid f(x) = 2x - 3\}$
12. $\{(x, y) \mid x = 3 \text{ y } y = x\}$
13. $\{(x, y) \mid y = -x \text{ o } y = 2\}$
14. $\{(x, y) \mid x = 3\} \cup \{(x, y) \mid y = -2\}$
15. $\{(x, y) \mid (x - 2y + 4)(y + 1) = 0\}$
16. $\{(x, y) \mid (2x - y - 4)(x - 3) = 0\}$
17. Dar un ejemplo de dos ecuaciones lineales que tengan la misma gráfica.
18. La gráfica de una función lineal f contiene al punto $(-1, -2)$. Si dicha gráfica cruza al eje y en $y = 2$, hallar la regla de correspondencia de f. ¿En qué punto corta al eje x la gráfica de f? ¿Cuál es la intersección x de la gráfica de f?

En los Ejercicios del 19 al 23 se dan los nombres de funciones lineales ($g, h, \ldots$) y dos de sus pares ordenados. En cada caso, hallar la pendiente de la gráfica de la ecuación y dar su ecuación. (*Sugerencia*: Comenzar usando la interpretación geométrica de la pendiente.)

19. g; $\left(3, \frac{1}{2}\right)$ y $(2, -1)$
20. h; $(0, -2)$ y $(2, 4)$
21. L; $(-2, 3)$ y $(3, 3)$
22. K; $(0, b)$ y $(1, a+b)$, $a, b \in R$
23. G; $(0, 0)$ y $(2, a)$, $a \in R$
24. Hallar la regla de correspondencia de una función lineal

$$f \text{ si } f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \text{ y } f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

25. Una función lineal L es tal que $L(-1) = 4$ y $L(1) = -2$. Hallar la regla de correspondencia.
26. Encontrar a tal que el punto $(-2, -4)$ quede en la gráfica de $ax - 3y = 4$.
27. Hallar una función lineal f cuya gráfica sea paralela a la de $g(x) = -2x + 1$ y tal que $f(0) = 0$.
28. Sea $L = \{(x, L(x)) \mid L(x) = mx + b\}$. Si p y q son dos números reales cualesquiera y si $p \neq q$, hacer ver que

$$\frac{L(q) - L(p)}{q - p} = m$$

29. Usar el resultado del Ejercicio 28 para encontrar las pendientes de las rectas determinadas por los siguientes pares de puntos.

   (a) $(-2, 1)$ y $(3, 6)$
   (b) $(0, 0)$ y $(-2, 1)$
   (c) $(-3, 3)$ y $(-2, 3)$
   (d) $(4, -7)$ y $(-4, 7)$
30. Escribir una desigualdad en x y y que describa al semiplano que está arriba de la línea cuya ecuación es $2x - y = 6$.

31. Escribir una desigualdad en x y y que describa al semiplano que queda abajo de la línea cuya ecuación es $y = 7$.

32. Escribir una desigualdad en x y y cuya gráfica sea el conjunto de puntos de la gráfica de la recta $6x - 2y = 4$ o los puntos abajo de ella.

33. Escribir una desigualdad en x y y que defina una relación cuya gráfica sea el semiplano cerrado que queda arriba de la recta $y = x + 3$.

34. Escribir una desigualdad en x y y que tenga un conjunto solución cuya gráfica sea el semiplano cerrado a la derecha de $x = -3$.

En los Ejercicios del 35 al 41, trazar las gráficas de las relaciones definidas por las desigualdades dadas.

35. $3x + y > 2$

36. $2x - y \leq 4$

37. $x \leq -4$

38. $y \geq -1$

39. $2x + y < 2y - x + 3$

40. $x + 3 \geq \frac{y}{2} - 1$

41. $\frac{x}{2} + 1 < \frac{y}{3} + 2$.

6-7 FUNCIONES POLINOMIALES

En la Sección 4-12 definíamos un polinomio en x como una expresión de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde n era un entero no negativa y $a_n \neq 0$. Recordemos que el número n se llama grado del polinomio. Además, si cada coeficiente a_i ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$) es un número real, decimos que la expresión es un polinomio sobre los reales.

Consideremos ahora la ecuación

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde la expresión de la derecha es un polinomio sobre los reales y el conjunto satisfactor para x es el conjunto R de los números reales. Dado que las operaciones utilizadas para definir el polinomio son simplemente la suma y la multiplicación, resulta evidente que para cada $x \in R$, y es un número real único. Por tanto, esta ecuación define una función cuyo dominio es R y cuyo rango es algún subconjunto de R. Se dice, entonces, que la función es una *función polinomial de grado n*.

Ejemplo (a) Si f está definida por la regla de correspondencia $f(x) = x^3 - 3x + 2$, entonces f es una función polinomial de grado 3.

Ejemplo (b) La ecuación $y = \frac{2}{3}x^7 - \sqrt{3}$ define una función polinomial de grado 7.

Si el grado de una función polinomial es 0, su ecuación es $y = a_0$, en donde $a_0 \neq 0$. Así, pues, una función polinomial de grado 0 es una función constante.* Similarmente, si el grado de una función polinomial es 1, entonces la función está definida por $y = a_1 x + a_0$, que identificamos como función lineal. Como ya hemos discutido las funciones constantes y lineales en la Sección 6-6, nuevamente prestaremos atención a las funciones polinomiales de grado mayor que 1.

Definición Supóngase que a, b y c son constantes reales y que $a \neq 0$. Entonces la función polinomial definida por

$$y = ax^2 + bx + c \qquad \text{o} \qquad f(x) = ax^2 + bx + c$$

se llama *función cuadrática*.

* En la definición de una función polinomial requeríamos que $a_n \neq 0$. De ahí que si deseamos que la ecuación $y = 0$ defina una función de ese tipo, debemos extender nuestra definición para incluir este caso especial. Esto se hace, frecuentemente, diciendo que $y = 0$ define la *función polinomial cero*, a la cual no le asignamos grado.

Las funciones cuadráticas se presentan con frecuencia en el estudio de ciertos fenómenos físicos. Por ejemplo, el vuelo de un proyectil a menudo se puede describir mediante una de tales funciones.

En la geometría analítica se demuestra que la gráfica de cada función cuadrática es una curva «abierta» llamada *parábola*. En las Figuras 6-9 a 6-11 se muestran parábolas típicas, junto con las ecuaciones cuyas gráficas son las parábolas respectivas.

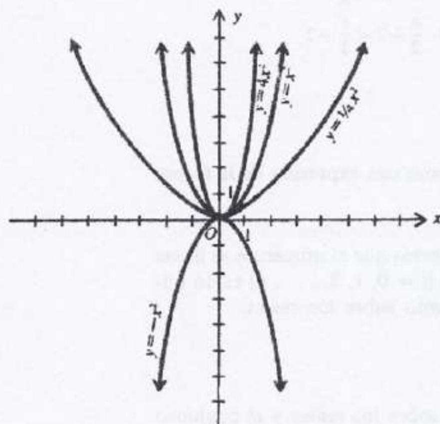


Figura 6-9

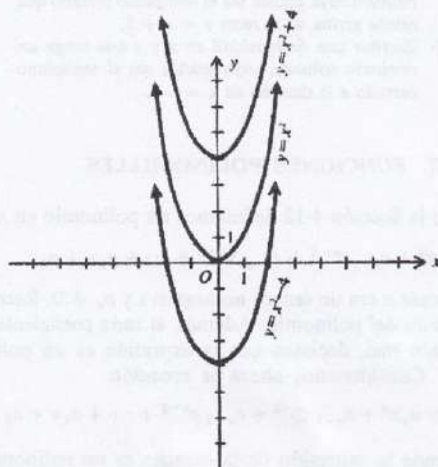


Figura 6-10

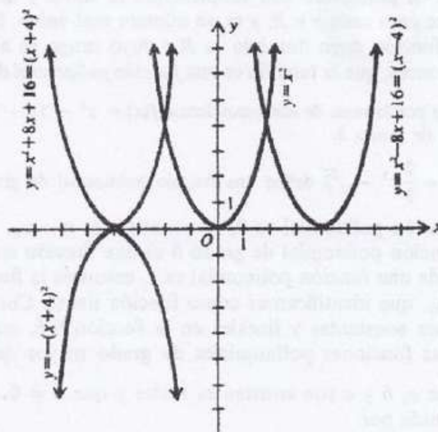


Figura 6-11

Hay dos características importantes que tienen en común todas las parábolas.

- *Simetría*. Cada parábola es simétrica con respecto a una línea llamada *eje de simetría*. Esto significa que si se trazan una parábola y su eje de simetría sobre

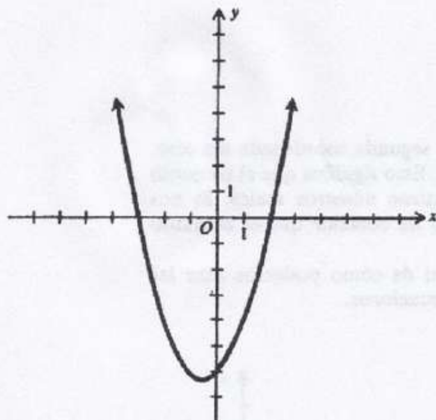
un pedazo de papel y después se dobla éste a lo largo del eje, la parte de la parábola a un lado del doblez coincidirá con la parte del otro lado. Cada una de las parábolas de las Figuras 6-9 y 6-10 es simétrica con respecto al eje y. Las parábolas a la izquierda de la Figura 6-11 son simétricas con respecto a la línea cuya ecuación es $x = -4$. ¿Cuál es la ecuación del eje de simetría de la parábola que aparece a la derecha en la Figura 6-11?

- *Vértice.* El punto en que la parábola intersecta a su eje de simetría se llama vértice de la parábola. Si una parábola «se abre hacia arriba», su vértice es el punto más bajo de la curva; si «se abre hacia abajo», su vértice es el punto más alto. Para cada una de las parábolas que aparecen en la Figura 6-9, el vértice está en el origen. El vértice de la parábola que aparece a la derecha en la Figura 6-11 es el punto (4, 0).

La mayor parte de nuestro trabajo sobre funciones polinomiales se relacionará con un importante problema: Dada una función polinomial f, localizar los puntos en donde la gráfica de f cruza (o es tangente) al eje x.

Consideremos la gráfica de la función

$$f = \{(x, f(x)) \mid f(x) = x^2 + x - 6\}$$



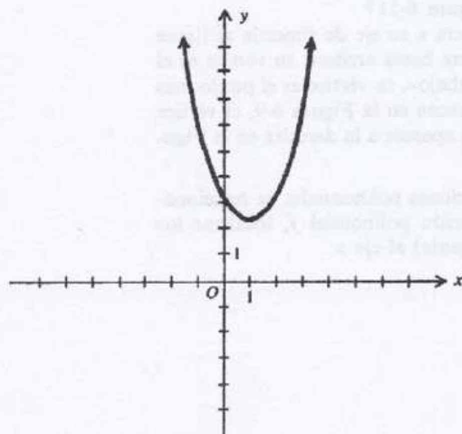
Observemos que esta gráfica cruza al eje x en $x = -3$ y en $x = 2$. Según eso, -3 y 2 son las intersecciones x de la curva. Además, ya que la segunda coordenada de cada punto del eje x es 0, podemos decir que -3 y 2 son valores de x, para los cuales $f(x) = 0$; es decir, $f(-3) = 0$ y $f(2) = 0$. En virtud de ello, -3 y 2 se llaman *ceros de la función f.* Finalmente, ya que $f(x) = x^2 + x - 6$ y que -3 y 2 son valores de x, para los cuales $f(x) = 0$, se sigue que -3 y 2 son soluciones de la *ecuación cuadrática* $x^2 + x - 6 = 0$.

Observemos cuidadosamente que hemos expresado el mismo hecho básico acerca de esta función en tres formas distintas:

- -3 y 2 son las intersecciones x de la gráfica de la función $f = \{(x, f(x)) \mid f(x) = x^2 + x - 6\}$;
- -3 y 2 son ceros de la función f; es decir, $f(-3) = 0$ y $f(2) = 0$;
- $x = -3$ y $x = 2$ son soluciones de la ecuación cuadrática $x^2 + x - 6 = 0$.

Las mismas ideas se aplican a las funciones polinomiales de cualquier grado.

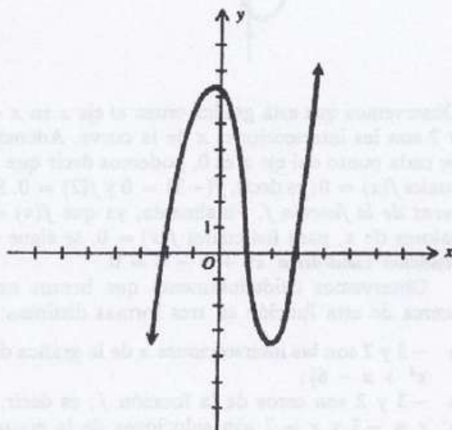
Hay muchas funciones polinomiales cuyas gráficas no intersectan al eje x. Por ejemplo, la gráfica de la función definida por $g(x) = x^2 - 2x + 3$ queda completamente arriba del eje x.



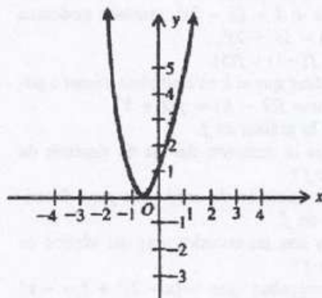
Puesto que no hay un punto de esta gráfica cuya segunda coordenada sea cero, no puede haber número real x para el cual $g(x) = 0$. Esto significa que el conjunto solución de la ecuación $x^2 - 2x + 3 = 0$ no contiene números reales. Si nos restringimos al conjunto de números reales, hemos de concluir que el conjunto solución de esta ecuación es el conjunto vacío.

Los ejemplos siguientes darán mayor ilustración de cómo podemos usar las gráficas para aproximar soluciones *reales* de las ecuaciones.

Ejemplo (c) La gráfica de la ecuación $y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ aparece en la figura. Los ceros reales de la función polinomial definidos por esta ecuación son -2, 1 y 3. La ecuación $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ tiene tres soluciones reales: $x = -2, 1, 3$.

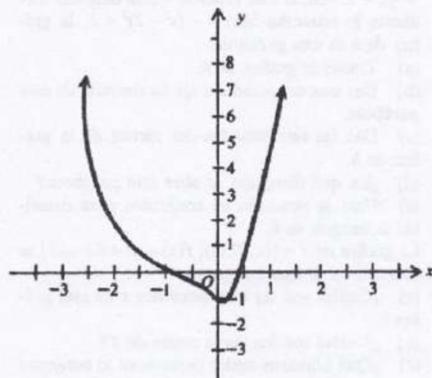


Ejemplo (d) La gráfica de la función cuadrática f definida por $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$ es tangente al eje x en $x = -\frac{1}{2}$. La ecuación $4x^2 + 4x + 1 = 0$ tiene solo una solución real distinta: $x = -\frac{1}{2}$.



Ejemplo (e) Hallar las soluciones reales de la ecuación polinomial $2x^4 + 5x^3 + 3x^2 - x - 1 = 0$.

Solución: Si hacemos y igual al polinomio del lado izquierdo de la ecuación, podemos graficar la función definida por $y = 2x^4 + 5x^3 + 3x^2 - x - 1$. (Nótese que se han usado diferentes escalas en los ejes x y y.) La gráfica cruza al eje x en $x = -1$ y $x = \frac{1}{2}$. Por tanto, las soluciones reales de la ecuación dada son $x = -1$ y $x = \frac{1}{2}$.



6-4 Ejercicios

1. Determinar los valores de a, b y c de cada una de las funciones cuadráticas que aparecen a continuación, según la definición dada en la página 185.

   (a) $\{(x, y) \mid y = 2x^2 - x + 3\}$
   (b) $\{(x, f(x)) \mid f(x) = 7 - 2x + x^2\}$
   (c) $\{(x, g(x)) \mid g(x) = 4x^2 + x\}$
   (d) $\{(x, y) \mid 2x^2 + x + y - 3 = 0\}$
   (e) $\{(x, y) \mid y = x^2\}$
   (f) $\{(x, f(x)) \mid f(x) = -2(x - 1)^2\}$

2. Trazar las gráficas de las ecuaciones $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = x^2$, $y = -x^2$ y $y = -\frac{1}{2}x^2$ sobre el mismo sistema coordenado.

   (a) Sea $a \in R$. Para un valor dado de a, ¿cuál es el eje de simetría de la parábola que es la gráfica de $y = ax^2$? ¿Qué punto es el vértice de la parábola?

   (b) ¿Para qué valores de a se abren hacia abajo las gráficas de $y = ax^2$? ¿Para qué valores de a se abren hacia arriba?

3. Trazar las gráficas de las ecuaciones $y = x^2 - 2$, $y = x^2$ y $y = x^2 + 2$ sobre el mismo conjunto de ejes.

   (a) Escribir la ecuación del eje de simetría de cada una de dichas parábolas.

   (b) Dar las coordenadas del vértice de cada curva.

   (c) Sea $c \in R$. Para un valor dado de c, ¿cuál es el eje de simetría de la parábola que es la gráfica de $y = x^2 + c$?

   (d) Si c es un número real dado, ¿cuáles son las coordenadas del vértice de la gráfica de $y = x^2 + c$?

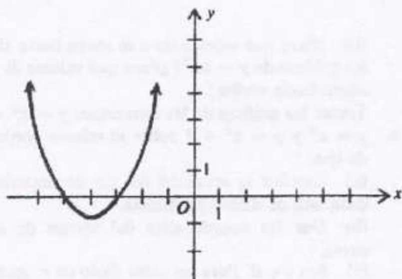
4. Si la gráfica de $y = fx^2 + gx + k$ es simétrica con respecto al eje y, ¿cuál debe ser el valor de g?

5. Hallar los valores de a y de c tales que la gráfica de $y = ax^2 + c$ tenga su vértice en $(0, -3)$ y que contenga también al punto $(-1, 0)$.

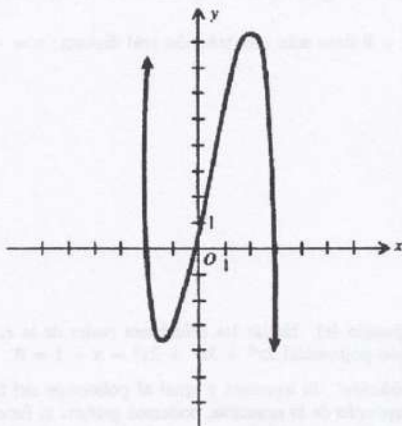
6. Sea f una función cuadrática definida por la regla de correspondencia $f(x) = x^2 - 4x + 4$. Puesto que $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$, también podemos escribir $f(x) = (x - 2)^2$.
(a) Hallar $f(-1)$ y $f(5)$.
(b) Demostrar que si k es cualquier número positivo, entonces $f(2 - k) = f(2 + k)$.
(c) Trazar la gráfica de f.
(d) ¿Cuál es la ecuación del eje de simetría de la gráfica de f?
(e) Usar la notación de conjuntos para describir el rango de f.
(f) ¿Cuáles son las coordenadas del vértice de la gráfica de f?

7. Es fácil comprobar que $-(x-2)^2+3=-x^2+4x-1$. Así, si una función h está definida mediante la ecuación $h(x)=-(x-2)^2+3$, la gráfica de h es una parábola.
(a) Trazar la gráfica de h.
(b) Dar una ecuación del eje de simetría de esta parábola.
(c) Dar las coordenadas del vértice de la gráfica de h.
(d) ¿En qué dirección se abre esta parábola?
(e) Usar la notación de conjuntos para describir la imagen de h.

8. La gráfica de $f=\{(x, f(x)) | f(x)=x^2+8x+15\}$ se muestra en la figura adjunta.
(a) ¿Cuáles son las intersecciones x de esta gráfica?
(b) ¿Cuáles son los ceros reales de f?
(c) ¿Qué números reales pertenecen al conjunto solución de la ecuación cuadrática $x^2 + 8x + 15 = 0$?



9. La gráfica de $g = \{(x, y) | y = -x^3 + x^2 + 6x\}$ aparece en la figura adjunta.



(a) ¿Cuáles son los ceros reales de g?
(b) ¿Qué números reales pertenecen al conjunto solución de la ecuación polinomial $-x^3 + x^2 + 6x = 0$?
(c) Sea h una función definida por la ecuación $h(x) = -g(x)$ para toda $x \in R$. Trazar la gráfica de h.
(d) ¿Cuáles son los ceros reales de h?
(e) Anotar los números reales que pertenecen al conjunto solución de la ecuación $x^3 - x^2 - 6x = 0$.

En los Ejercicios del 10 al 17, estimar las soluciones reales de las ecuaciones dadas, graficando las funciones correspondientes.

10. $4 - 3x - x^2 = 0$
11. $x^2 - 5x - 6 = 0$
12. $9 - 4x^2 = 0$
13. $x^2 + 3x = 0$
14. $\dfrac{2}{x-2} + \dfrac{3}{x+1} = 2$
15. $2x^2 - 3x + 4 = 0$
16. $x^3 + 2x^2 = 0$
17. $x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0$

6-8 VARIACION

En esta sección hemos de considerar dos grupos de funciones que tienen amplia aplicación en las ciencias.

Sea k un número real no nulo y sea n un número racional positivo. La ecuación

$y = kx^n$

define una función cuyo dominio puede considerarse como la totalidad de números reales que tienen una n-ésima potencia.*

Ejemplo (a) La ecuación $y = 3x^2$ es de la forma $y = kx^n$. En este caso hemos hecho $k = 3$ y $n = 2$. Esta ecuación define una función cuadrática con dominio $D = \{x | x \in R\}$ y rango $R = \{y | y \geq 0\}$.

Ejemplo (b) Si k está dada como 2 y n como $\frac{1}{2}$, entonces $y = kx^n$ se vuelve $y = 2x^{1/2}$ o $y = 2\sqrt{x}$. La función definida mediante esta ecuación tiene dominio $D = \{x | x \geq 0\}$ y rango $R = \{y | y \geq 0\}$.

Con frecuencia se utiliza una terminología especial para las funciones del tipo antes descrito. Si $y = kx^n$ ($k \neq 0$ y $n > 0$), decimos que la variable y *varía directamente* o que es *directamente proporcional* con la n-ésima potencia de la variable x. Se dice que la ecuación define una *variación o proporción directa* y la constante k se llama *constante de variación* o de *proporcionalidad*. Según eso, las ecuaciones de los Ejemplos (a) y (b) definen variaciones directas. En el Ejemplo (a), y varía con el cuadrado de x y la constante de variación vale 3.

Si sabemos que una variable es directamente proporcional con la n-ésima potencia de una segunda variable y se nos da un par de valores asociados de dichas variables, fácilmente podremos encontrar la constante de variación y expresar la ecuación que las relaciona.

Ejemplo (c) Supóngase que v varía directamente con w^2 y que $v = 3$ cuando $w = 5$. Expresar la ecuación que define la variación y encontrar v cuando $w = 12$.

Solución: Por definición, tenemos

$v = kw^2$, k una constante no nula

El hecho de que $v = 3$ cuando $w = 5$ nos dice que (5, 3) es una solución de esta ecuación. Por tanto,

$$3 = k(25)$$

y

$$k = \frac{3}{25}$$

La ecuación buscada es

$$v = \frac{3}{25} w^2$$

Para encontrar v cuando $w = 12$, solo necesitamos sustituir w por 12 en esta ecuación y resolver para v. Así, pues,

$$v = \frac{3}{25} (12)^2 = \frac{432}{25}$$

Hay una segunda forma de llegar a la solución en problemas de variación directa, tales como el ilustrado en el Ejemplo (c). Supóngase que y varía directamente con la n-ésima potencia de x y que, además, se tiene la información de que $y = y_1$ cuando $x = x_1$, $x_1 \neq 0$. Supóngase que ahora se pide encontrar el valor de y cuan-

* Por supuesto, que, como sucede a menudo, se puede tener un dominio más restringido.

do $x = x_2$, $x_2 \neq 0$. Si decimos que y_2 es el valor de y asociado con x_2, entonces (x_1, y_1) y (x_2, y_2) deben ser dos soluciones de la ecuación $y = kx^n$. Por tanto,

$y_1 = kx_1^n$ y $y_2 = kx_2^n$

Dividiendo y_1 entre y_2 obtenemos

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1^n}{x_2^n}$$

Nótese que esta ecuación es una proporción: La razón de y_1 a y_2 es igual a la razón de x_1^n a x_2^n. Puesto que se han dado tres de los términos de esta proporción, podemos fácilmente resolver para el cuarto, y_2.

Algunas veces decimos «y es directamente proporcional a x^n» más bien que «y varía directamente como x^n». Igualmente, a veces nos referimos a constante de variación como constante de proporcionalidad.

Ejemplo (d) Para un cuerpo que cae libremente a partir del reposo y solo bajo la influencia de la gravedad, el número de metros s que el cuerpo cae es directamente proporcional al cuadrado del tiempo t, medido en segundos. Un cuerpo cae desde una altura de 176,40 m y llega al suelo en 6 segundos. ¿Qué cantidad recorrió durante los primeros 3 segundos?

Solución: Como s es directamente proporcional a t^2, podemos resolver este problema usando la proporción

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{t_1^2}{t_2^2}$$

Sabemos que $s_1 = 176{,}40$, $t_1 = 6$ y $t_2 = 3$; se nos pide encontrar s_2.

Sustituyamos estos valores en la proporción,

$$\frac{176{,}40}{s_2} = \frac{36}{9}$$

y resolviendo para s_2 obtenemos

$$\frac{176{,}40}{s_2} = 4$$

$$4s_2 = 176{,}40$$

$$s_2 = 44{,}10$$

Así, pues, el cuerpo recorre 44,10 m durante los primeros 3 segundos.

El segundo tipo de variación que hemos de considerar se llama *variación inversa*. Decir que *y varía inversamente* con la n-ésima potencia de x, $n > 0$, es decir que para todos los números en el conjunto satisfactor de x, el valor de y estará dado por

$y = \dfrac{k}{x^n}$, k una constante no nula

Se dice que esta ecuación define una variación inversa. Al igual que en el caso de la variación directa, la constante k se llama *constante de variación*. Nótese que si y varía inversamente con x^n, el conjunto satisfactor de x no puede contener al número 0.

Ejemplo (e) Si $y = \dfrac{2}{x}$, y varía inversamente con x. La constante de variación es 2.

Los problemas que comprenden variación inversa se pueden resolver de la misma manera que los de variación directa.

Ejemplo (f) y varía inversamente con x^2 y y vale 2 cuando x vale 3. Hallar la constante de variación y escribir la ecuación que define la variación.

Solución: Esta variación está definida por una ecuación de la forma

$$y = \frac{k}{x^2}$$

Puesto que $y = 2$ cuando $x = 3$, el par ordenado (3, 2) debe ser una solución de esta ecuación. Así, pues,

$$2 = \frac{k}{9}$$

y

$$k = 18$$

La ecuación pedida es

$$y = \frac{18}{x^2}$$

Supóngase que (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos soluciones cualesquiera de la ecuación

$$y = \frac{k}{x^n}$$

Entonces

$$y_1 = \frac{k}{x_1^n} \qquad \text{y} \qquad y_2 = \frac{k}{x_2^n}$$

Al resolver cada una de estas ecuaciones para k, tenemos

$$k = y_1 x_1^n \qquad \text{y} \qquad k = y_2 x_2^n$$

Por tanto,

$$y_1 x_1^n = y_2 x_2^n$$

Al dividir ambos lados de la última ecuación entre $y_2 x_1^n$, obtenemos

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_2^n}{x_1^n}$$

Consecuentemente, si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son cualesquiera dos soluciones de una ecuación que define una variación inversa, podemos expresar este hecho haciendo que la razón $\frac{y_1}{y_2}$ sea igual al *inverso multiplicativo* de la razón $\frac{x_1^n}{x_2^n}$. Es por esto que a veces se usan los términos «inversamente proporcional» y «proporción inversa», en sustitución de «varía inversamente» y «variación inversa».

Ejemplo (g) En un circuito eléctrico simple, la corriente i es inversamente proporcional a la resistencia r. Si la corriente es de 15 amperes cuando la resistencia es de 10 ohms, hallar la corriente cuando la resistencia es de 25 ohms.

Solución: i es inversamente proporcional a r, de modo que podemos escribir

$$\frac{i_1}{i_2}=\frac{r_2}{r_1}$$

Los valores conocidos de estas variables son $i_1 = 15$, $r_1 = 10$ y $r_2 = 25$. Sustituyamos estos valores en la proporción anterior y resolvamos para i_2, lo cual dará

$$\frac{15}{i_2}=\frac{25}{10}$$

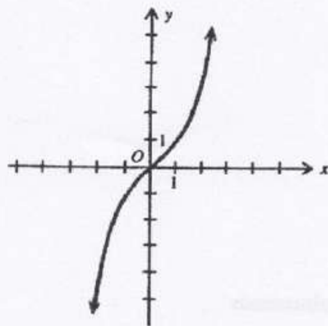
$$\frac{15}{i_2}=\frac{5}{2}$$

$$5i_2=30$$

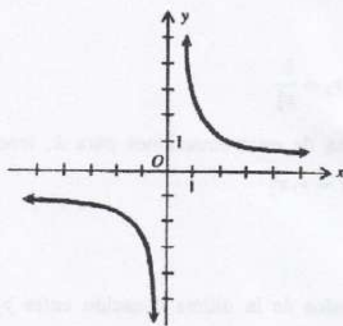
$$i_2=6$$

Por tanto, cuando la resistencia es 25 ohms, la corriente es de 6 amperes.

Las gráficas de variaciones directas e inversas típicas, pueden ayudar al estudiante a comprender el porqué de los términos usados. Primero, consideremos la gráfica de una variación directa definida por la ecuación $y = \frac{1}{2}x^3$. Si nos «movemos» a lo largo de la curva y nos alejamos del origen, crecen los valores absolutos de ambas coordenadas de los puntos de la curva. En general, en una variación directa, valores absolutos crecientes de la variable independiente están asociados con valores absolutos crecientes de la variable dependiente.



Gráfica de $y = \frac{1}{2}x^3$



Gráfica de $y = \frac{2}{x^{1/3}}$

Observemos ahora la gráfica de la variación inversa definida por $y = \frac{2}{x^{1/3}}$. Si nos «movemos» a lo largo de esta curva de modo que los valores absolutos de las abscisas de los puntos crezcan, entonces decrecen los valores absolutos de las ordenadas correspondientes. En forma más general, diremos que en una variación inversa un crecimiento del valor absoluto de la variable independiente causa un decrecimiento del valor absoluto de la variable dependiente.

Una variable puede ser directamente proporcional al producto de dos o más variables. La ecuación que establece la relación entre dichas variables define lo que se llama una *variación conjunta*.

Ejemplo (b) y varía conjuntamente con u, v y w. Si $y = 2$ cuando $u = 3$, $v = -2$ y $w = \frac{1}{4}$, hallar la constante de variación y escribir la ecuación que define la variación conjunta.

Solución: La ecuación es de la forma

$$y = kuvw$$

Al sustituir en ella los valores conocidos de y, u, v y w, tenemos

$$2 = k(3)(-2)\left(\frac{1}{4}\right)$$

Luego, $k = -\frac{4}{3}$ y la ecuación pedida es

$$y = -\frac{4}{3}uvw$$

En muchas de las leyes de la física, la química y otras ciencias se combinan variaciones directa, inversa y conjunta. De ese modo, la ecuación

$$F = \frac{kms^2}{r}$$

se usa para expresar el hecho de que la fuerza F necesaria para evitar que un carro patine en una curva, varía inversamente con el radio r de la curva y conjuntamente con la masa m del carro y el cuadrado de la velocidad s. Al igual que en el caso de las variaciones directa e inversa, las relaciones entre las variables se pueden expresar como proporciones. Para cualesquiera dos conjuntos de valores F_1, r_1, m_1, s_1 y F_2, r_2, m_2, s_2, tenemos

$$F_1 = \frac{km_1s_1^2}{r_1} \quad \text{y} \quad F_2 = \frac{km_2s_2^2}{r_2}$$

Consecuentemente,

$$k = \frac{F_1r_1}{m_1s_1^2} \quad \text{y} \quad k = \frac{F_2r_2}{m_2s_2^2}$$

Igualando los lados derechos de ambas ecuaciones, obtenemos

$$\frac{F_1r_1}{m_1s_1^2} = \frac{F_2r_2}{m_2s_2^2}$$

de donde se puede conocer el valor de cualesquiera de las variables, si se conocen los de las demás.

6-5 Ejercicios

En los Ejercicios del 1 al 7, escribir la ecuación que define cada una de las variaciones dadas. Usar k como constante de variación.

1. La altura h de un triángulo equilátero varía directamente con la longitud de un lado s.
2. El cuadro del tiempo que emplea un planeta para dar una revolución completa alrededor del Sol, varía directamente con el cubo de su distancia promedio hasta el Sol.
3. El volumen V de una caja rectangular varía con-

juntamente con su longitud l, su ancho w y su altura h.

4. El volumen V de un gas varía inversamente con su presión P y directamente con su temperatura T.
5. La potencia P en un circuito eléctrico varía conjuntamente con la resistencia r y con el cuadrado de la corriente i.
6. El volumen V de un cono circular recto varía conjuntamente con su altura h y con el cuadrado del radio de su base r.
7. La fuerza de atracción F entre dos objetos de masas M y m varía conjuntamente con las masas e inversamente con el cuadrado de la distancia d que hay entre ellas.

En los Ejercicios del 8 al 12, hallar la constante de variación y expresar la ecuación que define la variación. Después, resolver para el valor pedido de la variable apropiada.

8. y varía directamente con la raíz cuadrada de x y $y = 4$ cuando $x = 4$. Hallar x cuando $y = 8$.
9. y varía inversamente con el cubo de x y $y = 4$ cuando $x = \frac{1}{2}$. Hallar y cuando $x = 2$.
10. u varía inversamente con $\sqrt[3]{v}$, y $u = 2$ cuando $v = \frac{1}{8}$. Hallar v cuando $u = 4$.
11. s varía directamente con t e inversamente con u y $s = \frac{1}{3}$ cuando $t = \frac{1}{2}$ y $u = 6$. Hallar s cuando $t = \frac{1}{3}$ y $u = 4$.
12. z varía conjuntamente con x y con el cubo de y y $z = 8$ cuando $x = 2$ y $y = \frac{1}{3}$. Hallar x cuando $z = 16$ y $y = \frac{1}{6}$.
13. La elongación s de un resorte varía directamente con el peso aplicado w. Si s es 10 cm cuando w es 30 kg, hallar el peso necesario para producir una elongación de $12\frac{1}{2}$ cm.
14. La presión p ejercida por cierto líquido en un punto dado varía directamente con la profundidad d del punto, bajo la superficie del líquido. La presión ejercida a una profundidad de 15 m es de 50 kg por centímetro cuadrado. ¿Qué presión ejerce ese líquido a una profundidad de 25 m?
15. La resistencia r de un alambre varía directamente con su longitud l e inversamente con el cuadrado de su diámetro d. 40 m de alambre de un diámetro de 0,02 cm tienen una resistencia de 12 ohms. ¿Cuál es la resistencia de un trozo de alambre del mismo tipo, cuya longitud es 20 m y cuyo diámetro es 0,04 cm?
16. Bajo ciertas condiciones, el tiempo de exposición que se necesita para hacer una ampliación de un negativo varía directamente con el área A de la ampliación. Si toma 12 segundos hacer una ampliación de $3\frac{3}{4} \times 5$ dm, ¿cuánto tiempo tomará hacer una ampliación de 15×20 dm?
17. Si u varía directamente con el cubo de s e inversamente con t, ¿qué cambio resultará en u al duplicar s y t?
18. Si se duplican el volumen y la temperatura de un gas, ¿en qué factor cambia la presión? (Véase el Ejercicio 4.)
19. La altura de un cono circular recto se disminuye a la mitad y se duplica el radio de la base. ¿En qué factor se cambia el volumen del cono? (Véase el Ejercicio 6.)

En los Ejercicios del 20 al 23, representar la relación entre las variables mediante una proporción. Escribir primero la ecuación que define la variación, usando k como constante de proporcionalidad y después eliminar k como en la ilustración final de la Sección 6-8.

20. Ejercicio 2 de estos ejercicios.
21. Ejercicio 4.
22. Ejercicio 5.
23. Ejercicio 6.
24. Usar una proporción para resolver el Ejercicio 8.
25. Usar una proporción para resolver el Ejercicio 9.
26. Usar una proporción para resolver el Ejercicio 12.
27. Demostrar que si y varía directamente con x, entonces x varía directamente con y.
28. Demostrar que si y varía directamente con x^2 y x varía directamente con u^2, entonces y varía directamente con u^4.
29. *Demostrar*: $a, b, c, d \neq 0$ y $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.
30. *Demostrar*: $b, d \neq 0$ y $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.
31. *Demostrar*: $a, b, c, d \neq 0$ y $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$.

7 Sistemas de ecuaciones y desigualdades lineales

En el Capítulo 4 aprendimos a usar el álgebra para resolver problemas orales. El primer paso, como se recordará, era hacer que alguna variable, por ejemplo x, representase al número que estábamos tratando de encontrar. El segundo paso era poner en términos de x cualquier otra incógnita que se desease usar para construir la ecuación o desigualdad. Quizá el estudiante se haya extrañado de por qué no usábamos una variable distinta para cada incógnita diferente. En este capítulo será precisamente eso lo que haremos. Lamentablemente, no ahorra tanto tiempo y esfuerzo como se podría suponer. La ecuación es mucho más fácil de escribir, sin duda, pero se verá que usar más de una variable significa escribir más de una ecuación.

Consideremos el problema siguiente: El perímetro de un terreno rectangular es 300 m y su largo es 20 m más que el ancho. Encontrar sus dimensiones.

Podríamos decir:

Sea x = número de metros de ancho
y y = número de metros de largo

Entonces $2x + 2y = 300$ (el perímetro es 300 m); de ahí que $x + y = 150$.

El par de números $(x, y) = (65, 85)$ es una solución de esa ecuación, pero existen muchas otras: (20, 130), (75, 75), (300, −150), $\left(\frac{95}{3}, \frac{355}{3}\right)$, etc. De hecho, el conjunto verdad (o conjunto solución) es una función

$S = \{(x, y) \mid x + y = 150, x, y \in R\}$

Sin embargo, no cualquier elemento de S es solución a nuestro problema. Consideremos (20, 130). Si el largo del terreno es 130 m y el ancho es 20 m, el perímetro será de 300 m, pero el largo es 20 m mayor que el ancho.

Para resolver cualquier problema, debemos estar seguros de aprovechar todas las condiciones y aún no hemos usado el hecho de que el largo debe ser 20 m mayor que el ancho. Por tanto, nuestra solución (x, y) debe satisfacer también la ecuación $y = x + 20$, cuyo conjunto solución es $T = \{(x, y) \mid y = x + 20\}$. Consecuentemente, los números que representan al largo y al ancho deben ser pares ordenados que pertenezcan a $S \cap T$. Nuestra meta siguiente es aprender a encontrar sus elementos.

Ya que hemos de usar este método en muchos problemas, procedamos a generalizarlo. Deseamos desarrollar una técnica que nos permita encontrar $\{(x, y) \mid a_1x +$

$b_1y = c_1\} \cap \{(x, y) | a_2x + b_2y = c_2\}$, en donde a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 y c_2 son constantes reales y a_1 o $b_1 \neq 0$, a_2 o $b_2 \neq 0$ y el conjunto satisfactor para x y y es R.

Posteriormente lo generalizaremos más aún, usando ecuaciones con más de dos variables y ecuaciones que contienen a las variables elevadas a una potencia mayor que 1. Al estudiar las secciones siguientes debemos recordar que nos estamos preparando para eso, tanto como para el problema inmediato que solo comprende ecuaciones del tipo $ax + by = c$.

7-1 ECUACIONES LINEALES

Una ecuación de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + a_{n+1} = 0$$

se llama *ecuación lineal en n variables.* ($a_1, a_2, \ldots, a_{n+1} \in R$ y el conjunto satisfactor para $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es R). El conjunto solución es la totalidad de n-adas ordenadas $(s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n)$ tales que $a_1s_1 + a_2s_2 + \cdots + a_ns_n + a_{n+1} = 0$ es una proposición verdadera.

$2x - 3y - 5 = 0$ es una ecuación lineal en x y y. El par ordenado de números $(1, 1)$ no es una solución, puesto que $2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 - 5 \neq 0$. En cambio, $(1, -1)$, $\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$, y $\left(3, \frac{1}{3}\right)$ son soluciones.

$3x + y + z = 0$ es una ecuación lineal en tres variables. Algunos elementos de su conjunto solución son $(0, 0, 0)$, $(1, -1, -2)$, $(-1, 1, 2)$ y $(0, 1, -1)$.

7-2 SISTEMAS LINEALES DE ECUACIONES

Un conjunto de m ecuaciones lineales con n incógnitas se llama *sistema lineal de ecuaciones*. El conjunto solución del sistema es el conjunto de n-adas ordenadas que son soluciones de las m ecuaciones simultáneamente. Por ejemplo,

$$\begin{cases} 3x + y + z - 5 = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

es un sistema lineal de dos ecuaciones con tres variables. $(1, 1, 1)$ es una solución, puesto que al sustituir $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, en ambas ecuaciones se obtienen proposiciones verdaderas. $(2, 1, 0)$ no es, por el contrario, una solución: Sus elementos satisfacen la segunda ecuación, pero no la primera.

Si dos sistemas tienen exactamente el mismo conjunto solución, se dice que son *sistemas equivalentes*.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

son equivalentes puesto que $(1, 1)$ es una solución de ambos sistemas y, aunque en este momento no lo podemos demostrar, ningún otro par ordenado es solución de ambos sistemas.

Por otra parte,

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y = 2 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

no son equivalentes aunque (1, 1, 1) es una solución de ambos. Es la única solución del sistema de la derecha, pero hay otras para el de la izquierda; por ejemplo, $(3, -1, 1)$.

El proceso de encontrar la solución de un sistema se conoce como *resolver simultáneamente*. Esto se realiza, generalmente, escribiendo una serie de sistemas equivalentes en donde el último es un sistema cuya solución es obvia, tal como

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 8 \\ z = -5 \end{cases}$$

Nuestro problema inmediato es aprender a resolver simultáneamente sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables o tres ecuaciones con tres variables. Dejamos la mayor parte del tratamiento general para un curso posterior.

7-3 ECUACIONES LINEALES SIMULTANEAS CON DOS VARIABLES

Una expresión general de un sistema lineal de dos ecuaciones con dos variables es

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, & a_1 \neq 0 \quad \text{o} \quad b_1 \neq 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0, & a_2 \neq 0 \quad \text{o} \quad b_2 \neq 0 \end{cases}$$

Se dan a continuación dos métodos para resolver tales sistemas.

1. *Solución simultánea por sustitución*. Se resuelve una de las ecuaciones para una de las variables en términos de la otra y se sustituye la variable por esta expresión en la otra ecuación. Esta, junto con cualquiera de las dos ecuaciones originales, forma un sistema equivalente (propiedad de sustitución de la igualdad).

Puesto que la ecuación obtenida por sustitución contiene una sola variable, podemos resolverla para ella.

Ejemplo (a) Resolver simultáneamente

$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$$

Solución: Primero hemos de resolver una de las ecuaciones sea para x o para y y notamos que podemos evitar fracciones si resolvemos para y en la primera ecuación o para x en la segunda. Resolvamos la primera ecuación para y en términos de x. De ella obtenemos

$$y = 5 - 3x$$

Ahora sustituyamos y por esta expresión en la segunda ecuación:

$$x - 2(5 - 3x) = 4$$

Dado que esta es una ecuación lineal en una variable, podemos resolverla para x:

$$\begin{aligned} x - 10 + 6x &= 4 \\ 7x &= 14 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$y = 5 - 3x$ es equivalente a $3x + y = 5$. $x = 2$ es equivalente a $x - 2(5 - 3x) = 4$, que se obtuvo por sustitución. Por tanto, $x = 2$ combinada con cualquier forma de cualquiera de las ecuaciones originales da un sistema equivalente.

$$A\begin{cases} y = 5 - 3x \\ x = 2 \end{cases} \qquad B\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x = 2 \end{cases} \qquad C\begin{cases} x - 2y = 4 \\ x = 2 \end{cases}$$

son todos equivalentes al sistema original. En cada caso, al sustituir $x = 2$ en la primera ecuación y resolver para y nos da $y = -1$. De ese modo

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

es otro sistema equivalente, con lo cual hemos logrado nuestra solución. Notemos que usar el sistema A (el de la izquierda, arriba) conduce más rápidamente a la solución, puesto que la primera ecuación ya está resuelta para y.

Ejemplo (b) Resolver el sistema siguiente para x y y:

$$\begin{cases} 2x - 5y = 10 \\ 3x + 2y = -4 \end{cases}$$

Solución: En este caso, como ninguna variable tiene coeficiente 1, es indistinto qué ecuación escojamos y para qué variable resolvamos. Así, pues, arbitrariamente, resolvemos la primera ecuación para x.

$$x = \frac{10 + 5y}{2}$$

Sustituyendo en la segunda ecuación, tenemos

$$3\left(\frac{10 + 5y}{2}\right) + 2y = -4$$

Resolviendo después para y:

$$\begin{aligned} 3(10 + 5y) + 4y &= -8 \\ 30 + 15y + 4y &= -8 \\ 19y &= -38 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

Formemos el sistema

$$\begin{cases} x = \dfrac{10 + 5y}{2} \\ y = -2 \end{cases}$$

Finalmente, de nuevo por sustitución

$$\begin{cases} x = \dfrac{10 + 5(-2)}{2} = 0 \\ y = -2 \end{cases}$$

La solución es $x = 0$, $y = -2$.

Aunque la solución por sustitución es muy directa, se usa mucho menos que el segundo método para resolver sistemas lineales.

2. *Solución simultánea por suma o resta*. De nuevo deseamos encontrar el conjunto solución del sistema siguiente, llamémosle A:

$$A\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, & a_1 \neq 0 \quad \text{o} \quad b_1 \neq 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0, & a_2 \neq 0 \quad \text{o} \quad b_2 \neq 0 \end{cases}$$

Este método depende del hecho de que se obtiene un sistema equivalente si se usa una de las ecuaciones originales y la ecuación $m(a_1x + b_1y + c_1) + n(a_2x + b_2y + c_2) = 0$, $m, n \in R$, $m, n \neq 0$. Llamemos B a este nuevo sistema.

B podría ser

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ m(a_1x + b_1y + c_1) + n(a_2x + b_2y + c_2) = 0 \end{cases}$$

o

$$\begin{cases} a_2x + b_2y + c_2 = 0 \\ m(a_1x + b_1y + c_1) + n(a_2x + b_2y + c_2) = 0 \end{cases}$$

En todo caso, para especificar que *B* es equivalente a *A*, haremos notar primero que toda solución de *A* es solución de *B*.

Sea (s, t) cualquier solución de *A*. Entonces es solución de ambas ecuaciones de *A*. Una de las ecuaciones de *B* pertenece a *A*. Por tanto, (s, t) es una solución de ella. Sustituyendo (s, t) en la otra ecuación, obtenemos

$$m(a_1s + b_1t + c_1) + n(a_2s + b_2t + c_2) = 0$$

Puesto que, por hipótesis, $a_1s + b_2t + c_2 = 0$ y $a_2s + b_2t + c_2 = 0$, la ecuación anterior es una proposición verdadera. Así, pues, *toda solución de A es solución de B.*

Recíprocamente, *toda solución de B es solución de A*, como se muestra en el razonamiento siguiente,

Escojamos esta forma de *B*:

$$B\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ m(a_1x + b_1y + c_1) + n(a_2x + b_2y + c_2) = 0, \qquad m,n \neq 0 \end{cases}$$

Si (u, v) es una solución de *B*, es, por supuesto, una solución de $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, que es una de las ecuaciones de *A*.

Queda por demostrar que (u, v) es una solución de $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Dado que (u, v) es una solución de *B*, debemos tener

$$\begin{cases} a_1u + b_1v + c_1 = 0 \\ m(a_1u + b_1v + c_1) + n(a_2u + b_2v + c_2) = 0 \end{cases}$$

Entonces $m \cdot 0 + n(a_2u + b_2v + c_2) = 0$. (¿Por qué?)
Esto significa que $a_2u + b_2v + c_2 = 0$. (¿Por qué?)

Luego, cualquier solución de *B* es una solución de *A*.

Por tanto, *A* es equivalente a *B*.

Al usar este teorema, el objetivo es seleccionar *m* y *n* de modo que nuestra nueva ecuación contenga solo una variable.

Ejemplo (c) Resolver simultáneamente

$$\begin{cases} 3x + 4y - 7 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

Solución: Si escogemos $m = 1$, $n = 4$, nuestro nuevo sistema se puede escribir

$$\begin{cases} 3x + 4y - 7 = 0 \\ 1 \cdot (3x + 4y - 7) + 4(2x - y - 1) = 0 \end{cases}$$

o

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ 1 \cdot (3x + 4y - 7) + 4(2x - y - 1) = 0 \end{cases}$$

Si simplificamos términos semejantes en la segunda ecuación, obtenemos $11x - 11 = 0$, que es equivalente a $x = 1$. Así, pues, en el primer sistema tenemos

$$\begin{cases} 3x + 4y - 7 = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

y por sustitución

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Si usamos el segundo sistema llegamos al mismo resultado.

En general, el trabajo se ordena como sigue:

$$\begin{cases} 3x + 4y - 7 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

Multipliquemos por 4 ambos lados de la segunda ecuación. (A veces nos referiremos a esto diciendo que multiplicamos por 4 la ecuación.)

$$\begin{cases} 3x + 4y - 7 = 0 \\ 8x - 4y - 4 = 0 \end{cases}$$

Sumemos ahora las dos ecuaciones, miembro a miembro, con lo que llegamos a $11x - 11 = 0$ o $x = 1$. Tomemos la más simple de las ecuaciones originales como segundo miembro del sistema.

$$\begin{cases} x = 1 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

Por sustitución $y = 1$. Luego, $x = 1$, $y = 1$ es un sistema equivalente y $(1, 1)$ es la solución.

No es necesario que aparezcan en la serie todos los sistemas equivalentes.

Ejemplo (d) Resolver para x y y:

$$A\begin{cases} 4x + 6y = 3 \\ 6x + 4y = 5 \end{cases}$$

Solución: Escojamos números m y n tales que $m(4x + 6y - 3) + n(6x + 4y - 5) = 0$ sea una ecuación con una sola variable. Esto se puede realizar escribiendo primero un sistema en que los coeficientes de una de las variables en ambas sean inversos aditivos, y sumar. En este caso debemos multiplicar la primera ecuación por 3, la segunda por -2 y sumar. (Podemos interpretar esto diciendo que multiplicamos por 3 la primera ecuación, la segunda por 2 y después restamos.)

$$B\begin{cases} 12x + 18y = 9 \\ -12x - 8y = -10 \end{cases} \quad \text{(¿Por qué } B \text{ es equivalente a } A\text{?)}$$

$$10y = -1$$

$$y = -\frac{1}{10}$$

Sustituyendo $y = -\frac{1}{10}$ en la primera ecuación de A nos queda $x = \frac{9}{10}$. Según eso, $\left(\frac{9}{10}, -\frac{1}{10}\right)$ es la solución.

Después de llegar a la ecuación $y = -\frac{1}{10}$, podemos tratar de encontrar x del modo siguiente (especialmente porque y es una fracción y está involucrada una sustitución): Regre-

semos al sistema original, multipliquemos la primera ecuación por -2, la segunda por 3 y sumemos, eliminando así y en lugar de x.

$$D\begin{cases} -8x - 12y = -6 \\ 18x + 12y = 15 \end{cases}$$
$$10x = 9$$
$$x = \frac{9}{10}$$

Puesto que ya tenemos $y = -\frac{1}{10}$, la solución es $\left(\frac{9}{10}, -\frac{1}{10}\right)$.

Ejemplo (c) **Resolver simultáneamente para x y y:**

$$\begin{cases} x + ny = m \\ 2x + my = 4n \end{cases}$$

Solución: Multipliquemos la primera ecuación por 2.

$$\begin{cases} 2x + 2ny = 2m \\ 2x + my = 4n \end{cases}$$

Restemos luego para obtener

$$(2n - m)y = 2(m - 2n)$$
$$y = \frac{2(m - 2n)}{2n - m} = -2$$

Regresando al sistema original, multipliquemos la primera ecuación por m y la segunda por n y restemos. (En vez de esto pudimos haber sustituido.)

$$\begin{cases} mx + mny = m^2 \\ 2nx + mny = 4n^2 \end{cases}$$
$$(m - 2n)x = m^2 - 4n^2$$
$$x = \frac{m^2 - 4n^2}{m - 2n} = m + 2n$$

Por tanto, $(m + 2n, -2)$ es la solución, cosa fácilmente comprobable por sustitución.

7-4 SOLUCIONES SIMULTANEAS POR EL METODO GRAFICO

El conjunto solución de un sistema con dos variables se puede estimar por graficación. Puesto que es la intersección de los conjuntos solución de las ecuaciones, su gráfica será la intersección de las gráficas de las ecuaciones. Sabemos que la gráfica de una ecuación lineal es una recta. Por tanto, la gráfica de un sistema de dos ecuaciones consiste en dos rectas que entrañan las tres posibilidades siguientes.

1. Las rectas se intersectan en un punto.
2. Las rectas coinciden.
3. Las rectas son paralelas.

Las anteriores son interpretaciones gráficas de las siguientes situaciones analíticas:

1. El sistema tiene exactamente una solución.
2. El conjunto solución del sistema es la solución de cualquiera de las dos ecuaciones.
3. El sistema no tiene solución.

Si un sistema de ecuaciones tiene soluciones se llama *consistente*; si no, se llama *inconsistente*. Si dos ecuaciones tienen igual conjunto solución, se llaman *dependientes*; si no, *independientes*. Por tanto, tratándose de sistemas lineales de dos ecuaciones con dos variables, podemos decir

1. Un sistema consistente independiente tiene exactamente una solución. La gráfica muestra rectas que se cortan.
2. Un sistema consistente dependiente tiene muchas soluciones; cualquier solución de una de las ecuaciones es solución del sistema. Las gráficas de las líneas coinciden.
3. Un sistema inconsistente no tiene soluciones. La gráfica consiste en dos líneas paralelas.

Cualquier solución obtenida por graficación habrá de ser solo aproximada, dependiendo su precisión de los instrumentos usados al construir la gráfica. En virtud de esto, no podemos confiar en este método para lograr soluciones exactas ni aún para decidir si existe una solución. Dos líneas pueden ser aparentemente paralelas cuando en realidad el sistema que representan sí tiene solución y viceversa. En los ejemplos que siguen veremos cómo decidir analíticamente cuál de las tres situaciones es la que representa el sistema.

Ejemplo (a) Graficar para resolver y discutir el conjunto solución de

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$$

Solución: La gráfica del sistema aparece en la Figura 7-1. La solución es (1, 1) y el sistema es consistente e independiente. Para resolver analíticamente multiplicamos la primera ecuación por 3:

$$\begin{cases} 6x + 3y = 9 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$$

Restando, tenemos

$5x = 5$ o sea $x = 1$

Sustituyendo esto en la segunda ecuación y resolviendo para y, queda

$$\begin{aligned} 1 + 3y &= 4 \\ 3y &= 3 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

El sistema

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

es equivalente al sistema original. Por tanto, tiene una, y solo una, solución.

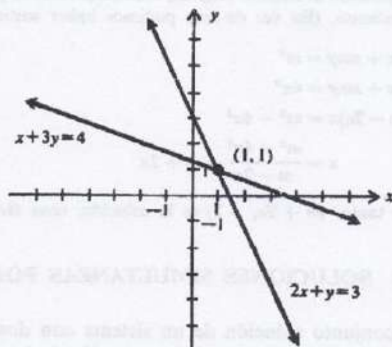


Figura 7-1

Ejemplo (b) Graficar para resolver y discutir el conjunto solución de

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 6x + 3y = 9 \end{cases}$$

Solución: La gráfica de una y otra ecuación es la recta que aparece en la Figura 7-2. El sistema es consistente y dependiente.

Si multiplicamos la primera ecuación por 3, obtenemos

$$\begin{cases} 6x + 3y = 9 \\ 6x + 3y = 9 \end{cases}$$

Restando, queda $0 = 0$, que es siempre verdadero. Nuestros sistemas equivalentes son

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} 0 = 0 \\ 6x + 3y = 9 \end{cases}$$

que obviamente serán satisfechos por cualquier solución de cualquiera de las ecuaciones.

Supongamos ahora que resolvemos el sistema por sustitución:

$$2x + y = 3 \leftrightarrow y = 3 - 2x$$

Sustituyendo en la segunda ecuación, tenemos

$$6x + 3(3 - 2x) = 9 \leftrightarrow 6x + 9 - 6x = 9 \leftrightarrow 9 = 9$$

y de ahí en adelante el razonamiento es el mismo.

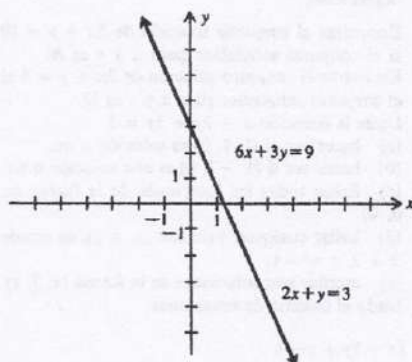


Figura 7-2

Ejemplo (c) Graficar para resolver y discutir el conjunto solución de

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 6x + 3y = 1 \end{cases}$$

Solución: Las líneas parecen ser paralelas, lo que implica que el sistema es inconsistente (Figura 7-3). En este caso, multiplicando la primera ecuación por 3, queda

$$\begin{cases} 6x + 3y = 9 \\ 6x + 3y = 1 \end{cases}$$

Restando, obtenemos $0 = 8$. Pero como ya sabemos, $0 \neq 8$. Los sistemas

$$\begin{cases} 0 = 8 \\ 6x + 3y = 1 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} 0 = 8 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

no tienen soluciones.

El método de sustitución nos llevaría a una situación similar.

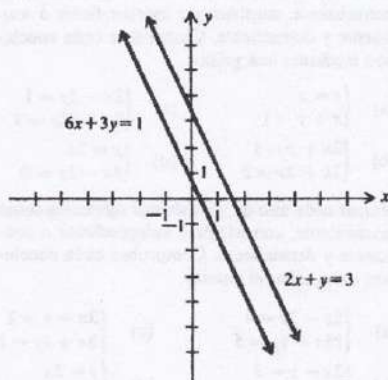


Figura 7-3

Dejamos como un ejercicio para el estudiante la labor de determinar la forma para decidir mediante la simple inspección de los coeficientes de x y y de las ecuaciones dadas, si el sistema es consistente o inconsistente y, de ser consistente, si es dependiente o independiente (Ejercicio 8, página 199).

7-1 Ejercicios

1. Encontrar el conjunto solución de $3x + y = 10$ si el conjunto satisfactor para x y y es N.
2. Encontrar el conjunto solución de $2x + y = 6$ si el conjunto satisfactor para x y y es W.
3. Dada la ecuación $x - 2y + 3z = 5$
   (a) hacer ver si $(1, 1, 0)$ es solución o no.
   (b) hacer ver si $(1, -2, 0)$ es una solución o no.
   (c) hallar todas las soluciones de la forma $(x, 0, 0)$.
   (d) hallar cualquier solución (x, y, z), en donde $x = 2$, $y = -1$.
   (e) escribir tres soluciones de la forma $(x, 5, z)$.
4. Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 2y + z = 6 \\ 3x - y + z = 2 \end{cases}$$

decir cuáles de las tercias siguientes son soluciones y cuáles no.

(a) $(1, 2, -1)$ (d) $(1, 1, -2)$
(b) $(1, 2, 1)$ (e) $(0, 0, 2)$
(c) $(0, 0, 6)$ (f) $(-2, 0, 8)$

5. Clasificar el sistema del Ejercicio 4 como consistente o inconsistente.
6. Marcar cada uno de los sistemas siguientes como inconsistente, consistente e independiente o consistente y dependiente. Comprobar cada conclusión mediante una gráfica.

(a) $\begin{cases} y = x \\ x + y = 1 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 8x - 12y = 7 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} y = 2x \\ 4x - 2y = 0 \end{cases}$

7. Marcar cada uno de los sistemas siguientes como inconsistente, consistente e independiente o consistente y dependiente. Comprobar cada conclusión sin graficar el sistema.

(a) $\begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ 15x - 6y = 5 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 3x + 3y = 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} y = 5x \\ 5y = x \end{cases}$

8. Dado el sistema

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}$$

¿qué condiciones deben satisfacer las constantes no nulas a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, para que
(a) el sistema sea inconsistente?
(b) el sistema sea consistente y dependiente?

9. Usar la regla desarrollada en el Ejercicio 8 para marcar los siguientes sistemas como consistente y dependiente, consistente e independiente o inconsistente. No se resuelvan.

(a) $\begin{cases} x - 2y - 4 = 0 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x - y = 5 \\ y - x = 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 6x - 2y + 6 = 0 \\ 5y = 15x + 15 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x - 2y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$

En cada uno de los Ejercicios del 10 al 15, resolver el sistema de ecuaciones dado, usando el método de sustitución

10. $\begin{cases} 5x = 2 \\ 3x + 4y = 6 \end{cases}$
11. $\begin{cases} x + y = 0 \\ 3x - 2y = 10 \end{cases}$
12. $\begin{cases} 2x + 5y = 3 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$
13. $\begin{cases} 5x - y = 7 \\ 3x - 4y + 6 = 0 \end{cases}$
14. $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ y = 10 - 2x \end{cases}$
15. $\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ x - 4y = 13 \end{cases}$

Usar el método de suma o resta para encontrar el conjunto solución de cada uno de los sistemas lineales dados en los Ejercicios del 16 al 21.

16. $\begin{cases} 3x - y = 19 \\ 3x + y = 29 \end{cases}$
17. $\begin{cases} 2x + 2y = 13 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}$
18. $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 7x + y = 2 \end{cases}$
19. $\begin{cases} 7x - 2y = 0 \\ 2x + 5y = 0 \end{cases}$
20. $\begin{cases} 4x + 15y = 7 \\ 6x - 12y = -1 \end{cases}$
21. $\begin{cases} 12x + 6y + 30 = 0 \\ 20x - 15y - 25 = 0 \end{cases}$

22. Graficar $A = \{(x, y) \mid x - y = 1\}$ y $B = \{(x, y) \mid x - 2y = 0\}$ sobre el mismo sistema coordenado. Indicar en la gráfica y describir $A \cap B$ y $A \cup B$.

Graficar los sistemas lineales de los Ejercicios del 23 al 27. Si el sistema es consistente e independiente, dar la solución. Si no, marcarlo como inconsistente o como consistente y dependiente.

23. $\begin{cases} x+y=10 \\ x-y=2 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 3x+y=0 \\ x-y=4 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x+2y=6 \\ 4x+3y=4 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 3x-2y=6 \\ 4y=6x+9 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x-3y+6=0 \\ 3x+18=9y \end{cases}$

Resolver algebraicamente los sistemas dados en los Ejercicios del 28 al 34.

28. $\begin{cases} 2a+3b=1 \\ 5a+7b=6 \end{cases}$

29. $\begin{cases} 3x-y=3 \\ 3x+2y=2 \end{cases}$

30. $\begin{cases} \dfrac{1}{4}(2m+3n)-\dfrac{1}{3}(2m+3)+1=0 \\ \dfrac{3}{2}(2m-3n)-\dfrac{1}{5}(3n-8)+4=0 \end{cases}$

31. $\begin{cases} x+y+4=0 \\ \dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{6}y+\dfrac{2}{5}=0 \end{cases}$

32. $\begin{cases} 2x+y-1=0 \\ 3x-2y+9=0 \end{cases}$

33. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{3}+\dfrac{x-y}{4}=10 \\ \dfrac{x+y}{2}-\dfrac{x-y}{8}=11 \end{cases}$

34. $\begin{cases} \dfrac{3y+2x}{5}+\dfrac{y+6}{7}=2 \\ \dfrac{2x-5y}{3}+\dfrac{x+7}{4}=1 \end{cases}$

En los Ejercicios del 35 al 40, usar el método de suma o resta para resolver simultáneamente los sistemas siguientes que *no* son lineales.

35. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5 \\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y}=-5 \end{cases}$ (*Sugerencia*: *No* se multipliquen ambos lados por xy.)

36. $\begin{cases} \dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{y}=-1 \\ \dfrac{7}{x}+\dfrac{6}{y}=-5 \end{cases}$

37. $\begin{cases} \dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{y}=3 \\ \dfrac{1}{2x}-\dfrac{2}{y}=1 \end{cases}$

38. $\begin{cases} \dfrac{5}{3x}-\dfrac{2}{5y}=\dfrac{7}{15} \\ \dfrac{1}{4x}-\dfrac{3}{5y}=\dfrac{1}{4} \end{cases}$

39. $\begin{cases} 5x^2-y^2=1 \\ 3x^2+2y^2=11 \end{cases}$ (¿Cuántas soluciones hay?)

40. $\begin{cases} 2x^2-5y^2+13=0 \\ 4x^2-3y^2-37=0 \end{cases}$

En los Ejercicios del 41 al 44, usar el método de sustitución para resolver simultáneamente los sistemas no lineales dados.

41. $\begin{cases} y=4x \\ x^2+y^2=68 \end{cases}$

42. $\begin{cases} y^2=3x \\ x^2+y^2=6x \end{cases}$

43. $\begin{cases} y^2=6(x+2) \\ y^2+4x=4 \end{cases}$

44. $\begin{cases} 4x^2+5xy-12y^2=2 \\ 2x-3y+1=0 \end{cases}$

45. Resolver para x y y en términos de m y n.

(a) $\begin{cases} x+y=m^2+mn \\ mx=ny \end{cases}$

(b) $\begin{cases} mx+ny=m^2+n^2 \\ x+y=2n \end{cases}$

46. Resolver para x y y en términos de u y v.

(a) $\begin{cases} vx-3uy=11uv \\ 2vx-uy=7uv \end{cases}$ (b) $\begin{cases} ux+vy=4u \\ vx+uy=3v \end{cases}$

47. Dado un sistema de tres ecuaciones con dos variables,

(a) Explicar cómo encontrar la solución, si existe y es única.

(b) Describir las gráficas si el sistema es consistente y

(1) ningún par de ecuaciones es dependiente,

(2) dos de las ecuaciones son dependientes,

(3) las tres ecuaciones son dependientes.

(c) Describir o dibujar las gráficas de tres situaciones que puedan presentarse si el sistema fuese inconsistente.

(d) Determinar si el sistema siguiente es consistente. Hallar el conjunto solución.

$\begin{cases} x+2y+5=0 \\ 3x+y+1=0 \\ 2x+y=4 \end{cases}$

(e) Graficar el sistema siguiente. Describir el conjunto solución.

$\begin{cases} 2x+y=5 \\ x-3y+1=0 \\ x+2y-4=0 \end{cases}$

7-5 SISTEMAS DE n ECUACIONES CON n VARIABLES

Si un sistema de n ecuaciones con n variables tiene una solución, ésta se puede encontrar mediante una combinación de suma o resta y sustitución para tener eventualmente un sistema equivalente en el que cada una de las n ecuaciones contenga solo una variable y ningún par de aquéllas contenga la misma variable, tal como

$$S\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 0 \\ d = 14 \end{cases}$$

Podemos llegar a un sistema tal si podemos primero encontrar un sistema equivalente al original en el que una ecuación contenga una sola variable, otra ecuación no contenga más de otra variable distinta, la siguiente, una más, y así sucesivamente. El sistema anterior S, por ejemplo, pudo haberse derivado de

$$T\begin{cases} a = 1 \\ a + b = -1 \\ 2a - b + c = 4 \\ a - 10b + 4c - d = 7 \end{cases} \qquad \text{o} \qquad U\begin{cases} a = 1 \\ a + b = -1 \\ a + c = 1 \\ b - c + d = 12 \end{cases}$$

Tanto en T como en U se puede sustituir $a = 1$ en la segunda ecuación para obtener $b = -2$, después de usar esos valores para obtener c en la tercera ecuación y, finalmente, d en la cuarta. Entonces se habrá llegado al sistema S.

Recuérdese que un sistema B será equivalente a un sistema A si cada una de sus ecuaciones es

(1) equivalente a una ecuación de A, o si
(2) se deriva, por suma o resta, de dos ecuaciones que sean equivalentes a las de A.

y todas las ecuaciones de A se usan por lo menos una vez.

En los ejemplos que siguen, mostraremos cómo se pueden usar esas ideas para escribir una sucesión de sistemas que finalmente conduzcan a sistemas como T o U, de los cuales podamos pasar inmediatamente a la solución, como en S.

Ejemplo (a) Resolver simultáneamente para x, y y z:

$$A\begin{cases} 3x + y + z = 6 \\ x + y - z = 0 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases}$$

Solución: Puesto que el coeficiente de y en cada una de las tres ecuaciones es 1, resultará más fácil eliminar primero y por suma o resta. Restemos la segunda ecuación de la primera. Esta nueva ecuación junto con cualesquiera dos del sistema original forma un sistema equivalente B:

$$B\begin{cases} 2x + 2z = 6 & \text{(se ha eliminado } y \text{ de la primera y segunda ecuaciones)} \\ x + y - z = 0 & \text{(del sistema } A) \\ x - y + 2z = 5 & \text{(del sistema } A) \end{cases}$$

Podemos construir otra ecuación que no contenga a y, sumando la segunda y tercera ecuaciones de B, y llamar C ($C \leftrightarrow B$) al nuevo sistema formado por esta nueva ecuación, la primera de B y cualquiera de las otras dos.

$$C\begin{cases} 2x + 2z = 6 & \text{(del sistema } B) \\ 2x + z = 5 & \text{(eliminando } y \text{ de la segunda y tercera ecuaciones de } B) \\ x + y - z = 0 & \text{(se escoge la segunda o tercera ecuaciones de } B) \end{cases}$$

Las primeras dos ecuaciones de C forman un sistema de dos ecuaciones con dos variables que podemos resolver para x y z. Restando la segunda de la primera, obtenemos $z = 1$. Luego, tenemos

$$D\begin{cases} z=1 \\ 2x+z=5 \\ x+y-z=0 \end{cases}$$

Sustituyendo $z = 1$ en la segunda ecuación, obtenemos $2x + 1 = 5$. De ahí que $2x = 4$ y $x = 2$. Esto da

$$E\begin{cases} x=2 \\ z=1 \\ x+y-z=0 \end{cases}$$

Al sustituir $x = 2$, $z = 1$ en la tercera ecuación tenemos $2 + y - 1 = 0$ y $y = -1$. Finalmente

$$F\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \\ z=1 \end{cases}$$

en donde $F \leftrightarrow E \leftrightarrow D \leftrightarrow C \leftrightarrow B \leftrightarrow A$.

Los primeros dos pasos de la solución anterior se pueden realizar juntos para llegar inmediatamente a C. Recuérdese que se desea un sistema equivalente en el que dos de las ecuaciones contengan las mismas dos variables y se usen las tres ecuaciones. Igualmente, se puede dejar de escribir los sistemas D y E, si se prefiere.

El mismo procedimiento general se aplica para resolver n ecuaciones con n variables.

Ejemplo (b) Hallar el conjunto solución de

$$A\begin{cases} a-b+c+d=3 \\ 2a+b+c-d=4 \\ a+b-c+2d=2 \\ a+2b+3c-2d=7 \end{cases}$$

$$B\begin{cases} -3b+c+3d=2 & \text{(eliminamos } a \text{ usando la primera y la segunda)} \\ -2b+2c-d=1 & \text{(eliminamos } a \text{ usando la primera y la tercera)} \\ -b-4c+4d=-5 & \text{(eliminamos } a \text{ usando la tercera y la cuarta)} \\ a-b+c+d=3 & \text{(escogemos cualquiera de las originales, la primera por ejemplo)} \end{cases}$$

Ahora usamos las primeras tres ecuaciones de B para tener dos ecuaciones en b y d. (Nuestra idea es eliminar c.)

$$C\begin{cases} -4b+7d=3 & \text{(eliminamos } c \text{ usando la primera y la segunda)} \\ -13b+16d=3 & \text{(eliminamos } c \text{ usando la primera y la tercera)} \\ -2b+2c-d=1 & \text{(escogemos dejar esta ecuación en } b, c, d\text{)} \\ a-b+c+d=3 & \text{(conservemos esta ecuación original seleccionada)} \end{cases}$$

Usemos las primeras dos ecuaciones para eliminar b o d. Eliminaremos b.

$$D\begin{cases} d=1 & \text{(eliminamos } b \text{ usando la primera y la segunda)} \\ -4b+7d=3 & \text{(escogemos mantener ésta en } b \text{ y } d\text{)} \\ -2b+2c-d=1 & \text{(igual que en } C\text{)} \\ a-b+c+d=3 & \text{(igual que en } C\text{)} \end{cases}$$

Ahora sustituyamos $d = 1$ en la segunda ecuación y resolvamos para b. $b = 1$. Sustituyamos $b = 1$, $d = 1$ en la tercera ecuación y resolvamos para c. $c = 2$.

Finalmente, sustituyamos $d = 1, b = 1, c = 2$ en la cuarta ecuación y resolvamos para a. $a = 1$.

$$E\begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=2 \\ d=1 \end{cases}$$

El conjunto solución es $\{(1, 1, 2, 1)\}$.

Con frecuencia, no todas las ecuaciones del sistema contienen a todas las variables. El método de solución sigue siendo el mismo aunque posiblemente se abrevie.

Ejemplo (c) Resolver simultáneamente

$$A\begin{cases} x+y=4 \\ x-y+z=1 \\ x+w=1 \\ z-w=2 \end{cases}$$

Solución: Podemos usar las primeras dos ecuaciones para obtener una ecuación en x y z y las últimas dos para obtener otra en x y z.

$$B\begin{cases} 2x+z=5 & \text{(sumamos las primeras dos)} \\ x+z=3 & \text{(sumamos las últimas dos)} \\ x+y=4 & \text{(escogemos una con } y \text{ pero no con } w) \\ z-w=2 & \text{(escogemos cualquiera con } w) \end{cases}$$

$$C\begin{cases} x=2 & \text{(eliminamos } z \text{ usando las dos primeras)} \\ x+z=3 & \text{(escogemos mantener ésta en } x \text{ y en } z) \\ x+y=4 & \text{(igual que en } B) \\ z-w=2 & \text{(igual que en } B) \end{cases}$$

$$D\begin{cases} x=2 & \text{(igual que en } C) \\ z=1 & \text{(sustituimos } x = 2 \text{ en la segunda ecuación)} \\ y=2 & \text{(sustituimos } x = 2 \text{ en la tercera ecuación)} \\ w=-1 & \text{(sustituimos } z = 1 \text{ en la cuarta ecuación)} \end{cases}$$

La solución es $(x, y, z, w) = (2, 2, 1, -1)$.

En estos ejemplos hemos tenido la precaución de escoger sistemas que no solo fuesen consistentes, sino que tuviesen una solución única. Al igual que en el caso de sistemas de dos ecuaciones con dos variables, eso no siempre es cierto. Un sistema puede no tener soluciones o puede tener un número infinito de ellas. La discusión completa de dichas posibilidades para m ecuaciones lineales con n variables, sobrepasa el nivel de este curso. Sin embargo, en los ejercicios hay problemas que esperamos que convenzan al lector de que

(a) Si $m < n$, nunca hay una solución única.
(b) Si $m > n$, el sistema casi siempre es inconsistente (el estudiante podrá encontrar la solución única si es que existe).

Nuestro interés principal recae en el caso en que $m = n$, ya que para tales sistemas generalmente hay una solución única. Si no, en el curso de la solución se podrá ver de manera obvia cuál es la situación. Al escribir la sucesión de sistemas equivalentes, quizá lleguemos a uno que contenga una o más ecuaciones de la forma $a = a$ o $a = b$, en donde $a, b \in R$, $a \neq b$. Si un sistema contiene una ecuación cuyo conjunto solución sea $\varnothing$ (tal como $2 = 7$, $5 = 0$), entonces el sistema

será inconsistente. Sin embargo, si todas las ecuaciones del sistema final tienen soluciones y una o más es de la forma $a = a$, entonces puede haber solución o no, pero si hay solución debe haber un número infinito. [Véase la Sección 7-4, Ejemplo (b).]

7-2 Ejercicios

En los Ejercicios del 1 al 6, resolver simultáneamente para x, y y z.

1. $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 3x + y + z = 2 \\ 2x - 5y - z = 12 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x + y - 4z = 5 \\ x + y - 8z = -1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x - 3y + 2z = -3 \\ 2x + y - 5z = 10 \\ 3x + 2y + z = 7 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - z = 0 \\ 3y - 6z + 1 = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x + y = z \\ x - z - 2y = 1 \\ 2x - 6z = 0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x - 2z = 1 \\ 2x + 3y + 3 = 0 \\ 4x - 3y - 4z = 3 \end{cases}$

Hallar las soluciones de los sistemas dados en los Ejercicios del 7 al 12.

7. $\begin{cases} a + b + d = 0 \\ c + 2b - d = 4 \\ 2c - b + 2d = 3 \\ -2c + 2b - d = -2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} a - b - c = -1 \\ 2a + b = 11 \\ a - 2c + d = 1 \\ c = 2 \end{cases}$

9. $\begin{cases} a - b = 4 \\ b + c = 1 \\ a + d = b \\ b - d = 6 \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{2}{a} + \dfrac{5}{b} = 9 \\ \dfrac{4}{a} + \dfrac{3}{c} = -1 \\ \dfrac{4}{b} - \dfrac{3}{c} = 13 \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 0 \\ \dfrac{4}{a} + \dfrac{1}{b} - \dfrac{2}{c} + 15 = 0 \\ \dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{b} - \dfrac{3}{c} + 7 = 0 \end{cases}$

12. $\begin{cases} a - b + c = 4 \\ a + c = 3 \\ b - d = -2 \\ a + c - e = 5 \\ d + e = a \end{cases}$

13. (a) En los Ejercicios 47 (d) y (e), de la página 207, hay ejemplos de sistemas de tres ecuaciones lineales con dos variables. Delinear un procedimiento que dé las soluciones, si existe alguna, o que explique cómo saber si no hay solución. Considerar los casos siguientes: (1) las tres ecuaciones son dependientes, (2) solo dos de las ecuaciones son dependientes y (3) no hay dos que sean dependientes. Describir la gráfica del sistema en cada caso.

(b) Suponer que se tienen m ecuaciones con dos variables, en donde $m > 3$ y que hay una solución única: ¿cómo se puede encontrar?

(c) Suponer que se tienen cinco ecuaciones con tres variables y que hay una solución única: ¿cómo se puede encontrar?

14. Considerar el sistema

$$A \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y - 2z = -1 \end{cases}$$

(a) Construir un sistema B ($B \leftrightarrow A$), formado por

(1) la ecuación derivada de las dos ecuaciones mediante la eliminación de z;

(2) la ecuación derivada de las dos ecuaciones mediante la eliminación de y.

(b) Construir un sistema C ($C \leftrightarrow B$) formado por

(1) la ecuación que se obtiene al resolver la primera ecuación de B para y en términos de x;

(2) la ecuación que se obtiene al resolver la segunda ecuación de B para z en términos de x.

(c) Dar cuatro soluciones de C.
(d) ¿Cuántas soluciones tiene A?

15. Dado el sistema

$$\begin{cases} 3a - 2b + c = 0 \\ 2a - 5b + 8c = 0 \\ 4a - 3b + 2c = 0 \end{cases}$$

(a) ¿Se puede encontrar una solución única?
(b) (0, 0, 0) es una solución. Describir otros sistemas que tengan a (0, 0, 0) como solución.

16. Hacer ver que los conjuntos solución de los sistemas siguientes son infinitos. Dar dos soluciones.

(a) $\begin{cases} 2a + b + c = 3 \\ -a + 2b + 3c = 7 \\ a + 3b + 4c = 10 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ 3x + y - z = -1 \end{cases}$

17. Hacer ver que el sistema que sigue es inconsistente:

$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x + y + z = 1 \\ x + 2z + 5 = 0 \end{cases}$$

18. Se puede demostrar que una ecuación lineal con tres variables se puede representar gráficamente como el conjunto de puntos de un espacio tridimensional que quedan sobre un plano. Un sistema de tres ecuaciones, según eso, tiene una gráfica formada por tres planos. Dar por lo menos cinco maneras posibles en que se pueden relacionar y decir en cada caso si el sistema tiene una solución única, si no tiene solución o si tiene un número infinito de soluciones. Por ejemplo, una posibilidad es tener dos planos paralelos y el otro no paralelo. En ese caso, no habrá solución.

7-6 PROBLEMAS DE PLANTEO Y SISTEMAS DE ECUACIONES

En la Sección 4-25 recomendábamos una lista de pasos para usar el álgebra con el fin de resolver problemas verbales y anotamos a continuación algunos ejemplos en donde se aplicaban. El proceso es esencialmente el mismo cuando se usa más de una variable. La única diferencia es que se necesita más de una ecuación.

A continuación aparece una lista de pasos recomendados para resolver un problema que tenga solución única. Compárense estos pasos con los que se señalaron en la página 136).

1. Entender lo que se desea encontrar y poner variables como x, y, z, etc., en sustitución de las distintas cantidades deseadas.
2. Usar la información dada o hechos matemáticos conocidos para escribir tantas ecuaciones como variables aparezcan. Dichas ecuaciones deben ser independientes si es que existe una solución única.
3. Resolver el sistema de ecuaciones simultáneamente.
4. Comprobar para ver si la solución satisface el enunciado original del problema.

Como es de suponerse, solo se usarán dos o más variables cuando aparezca más de una cantidad desconocida y aun entonces, no es estrictamente necesario. En esta sección, sí se requerirá, con objeto de obtener alguna experiencia al traducir enunciados a sistemas de ecuaciones.

Ejemplo (a) Lorenzo y Miguel fueron a la tienda a comprar lo necesario para una excursión. Llevaban un total de \$300 para gastos. Miguel gastó $\frac{9}{10}$ de su dinero, Lorenzo $\frac{4}{5}$ del suyo y regresaron a casa con un total de \$40. ¿Cuánto llevaba cada uno al ir a la tienda?

Solución: Lo que deseamos encontrar son dos números: la cantidad de dinero que llevaba Miguel y la que llevaba Lorenzo.

Sea x = número de pesos que llevaba Lorenzo y
y = número de pesos que llevaba Miguel.

Entonces, debemos buscar dos proposiciones que contengan dichos números y que hemos de traducir a dos ecuaciones. Sabemos que

(1) juntos llevaban \$300. $x + y = 300$;

(2) Miguel gastó $\frac{9}{10}$ de lo suyo, $\left(\frac{9}{10}y\right)$. Lorenzo gastó $\left(\frac{4}{5}x\right)$ y regresaron con \$40.

$300 - [(4/5)x + (9/10)y] = 40$

o sea

$$3\,000 - 8x - 9y = 400$$
$$8x + 9y = 2\,600$$

Por tanto, tenemos el sistema

$$\begin{cases} x + y = 300 \\ 8x + 9y = 2\,600 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 8x + 8y = 2\,400 \\ 8x + 9y = 2\,600 \end{cases}$$
$$\leftrightarrow \begin{cases} y = 200 \\ x + y = 300 \end{cases}$$
$$\leftrightarrow \begin{cases} y = 200 & \text{Miguel llevaba \$200} \\ x = 100 & \text{Lorenzo llevaba \$100} \end{cases}$$

Comprobación:

Juntos llevaban \$200 + \$100 = 300

Miguel gastó $\frac{9}{10}$ de \$200 = \$180

Lorenzo gastó $\frac{4}{5}$ de \$100 = \$80

Juntos gastaron \$260 y regresaron a casa con \$40

Ejemplo (b) Una avioneta vuela 450 km en 50 min con viento a favor pero hace el viaje de regreso contra el viento en 1 hora 15 min. Encontrar la velocidad de la avioneta en aire quieto y la velocidad del viento. Suponemos que las velocidades son constantes y que

$$\begin{bmatrix}\text{velocidad de la avioneta} \\ \text{en aire quieto}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{velocidad del} \\ \text{viento}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{velocidad de la avioneta} \\ \text{con viento a favor}\end{bmatrix}$$

Solución: Sean

x = velocidad de la avioneta en aire quieto en km por hora
y = velocidad del aire en km por hora

Puesto que escogimos kilómetros por hora debemos cambiar los tiempos dados a horas. Entonces

$$\begin{cases} x + y = 450 \div \frac{5}{6} & \text{(velocidad con viento a favor)} \\ x - y = 450 \div \frac{5}{4} & \text{(velocidad con viento contrario)} \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} x + y = 540 \\ x - y = 360 \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} 2x = 900 & \text{(se eliminó } y \text{ por suma)} \\ x + y = 540 & \text{(la misma ecuación que antes)} \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} x = 450 & \text{Velocidad de la avioneta: 450 kph.} \\ y = 90 & \text{Velocidad del viento: 90 kph.} \end{cases}$$

Comprobación:

$450 + 90 = 540$ (la velocidad con viento a favor es de 540 kph)
$450 - 90 = 360$ (la velocidad contra el viento es de 90 kph)

$540 \cdot \frac{5}{6} = 450$ km, $360 \cdot \frac{5}{4} = 450$ km

Ejemplo (c) Antonio, Luis y Miguel pueden lavar el carro en 10 min trabajando juntos. Si solo trabajan Antonio y Luis lo lavan en 12 min. Luis hace doble cantidad de trabajo que Miguel en el mismo tiempo. ¿Cuánto tardará cada uno solo en hacer el trabajo?

Solución: Sean

x = número de minutos que emplea Antonio en hacer el trabajo solo
y = número de minutos que emplea Luis en hacerlo
z = número de minutos que emplea Miguel en hacerlo
$\frac{1}{x}$ = fracción del carro que Antonio lava en un minuto
$\frac{1}{y}$ = fracción del carro que Luis lava en un minuto
$\frac{1}{z}$ = fracción del carro que Miguel lava en un minuto

$10 \cdot \frac{1}{x}$, $10 \cdot \frac{1}{y}$, $10 \cdot \frac{1}{z}$ = fracciones del carro que lavan Antonio, Luis y Miguel en 10 minutos, respectivamente

$$\begin{cases} 10 \cdot \frac{1}{x} + 10 \cdot \frac{1}{y} + 10 \cdot \frac{1}{z} = 1 & \text{(juntos hacen todo el trabajo en 10 minutos)} \\ 12 \cdot \frac{1}{x} + 12 \cdot \frac{1}{y} = 1 & \text{(Antonio y Luis hacen todo el trabajo en 12 minutos)} \\ z = 2y & \text{(Miguel tardará el doble de Luis)} \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} x = 20 & \text{Antonio puede lavar el carro en 20 minutos} \\ y = 30 & \text{Luis puede lavar el carro en 30 minutos} \\ z = 60 & \text{Miguel puede lavar el carro en 60 minutos} \end{cases}$$

Ejemplo (d) Una empacadora paga a las empleadas a razón de \$2,40 la hora y a los hombres a \$2,80 la hora. La nómina de un día de 8 horas de trabajo fue de \$10 560. ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres había empleados?

Solución: Sean

x = número de mujeres empleadas
y = número de hombres empleados

Entonces

$x(8)(2,40) + y(8)(2,80) = 10\,560$

o

$$19,2x + 22,4y = 10\,560$$

Esto es equivalente a $6x + 7y = 3\,300$.

Ahora buscamos otro dato que nos permita construir la otra ecuación. Sin embargo, no existe otro. Por tanto, no podemos encontrar el número de hombres y mujeres empleados. Simplemente sabemos que la solución pertenece al conjunto

$\{(x, y) | x, y \in N, 6x + 7y = 3\,300\}$

Si además se nos hubiese dado el dato de que en total había 500 empleados, podríamos poner

$$\begin{cases} 6x + 7y = 3300 \\ x + y = 500 \end{cases}$$

y resolver simultáneamente para encontrar $x = 200$, $y = 300$.

Supongamos ahora que además se nos hubiese dicho que había doble cantidad de hombres que de mujeres empleados. En ese caso no habría solución puesto que $x = 200$, $y = 300$ es la única solución de las dos ecuaciones anteriores y no satisface a $y = 2x$.

7-3 Ejercicios

Usar dos o más variables para resolver cada uno de los Ejercicios del 1 al 9.

1. Usar dos variables para resolver el Ejercicio 8, página 139.
2. Usar dos variables para resolver el Ejercicio 11, página 139.
3. Usar tres variables para resolver el Ejercicio 12, página 139.
4. Usar tres variables para resolver el Ejercicio 25, página 140.
5. Un muchacho tiene 7 años menos que el triple de la edad de su perro. La suma de sus edades es 17. Hallar la edad de cada uno.
6. Leonor es 5 años mayor de lo que dice ser. Ella dice que es 12 años más joven que su esposo. Su esposo, hombre veraz, dice que ella tenía tres cuartos de la edad de él cuando se casaron hace 20 años. ¿Qué edades tienen?
7. Las dimensiones de un terreno rectangular están en razón de 3:5. El perímetro es 480 m. Hallar las dimensiones.
8. Un contratista tiene 30 hombres a sus órdenes en tres categorías diferentes: *A*, *B* y *C*. Hay doble número de empleados en *B* que en *A* y en *C* juntos. A los de categoría *A* les paga $16 al día, a los de *B*, $20 al día y a los de *C*, $24,80 al día. Su nómina diaria es de $586,40. ¿Cuántos empleados hay en cada categoría?
9. En la peluquería de Antonio el corte de pelo cuesta $2,50 caballeros, $2,25 niños y $3,00 damas. Toma 20 minutos hacer un corte de pelo de caballero, 15 minutos a un niño y 30 minutos a una dama y tiene el quíntuplo de clientes hombres que de mujeres. La peluquería estuvo abierta de las 8:00 A.M. hasta las 6:00 P.M. de cierto día y empleó 45 minutos para el almuerzo. Ese día recogió un total de $71,25. ¿Cuántos hombres, mujeres y niños fueron a cortarse el pelo ese día?

En los Ejercicios del 10 al 12, usar el hecho de que dada la ecuación de una gráfica, cualquier punto (h, k) de ella debe ser tal que si se sustituyen en la ecuación los valores $x = h$, $y = k$, se tiene una proposición verdadera.

10. La ecuación de una recta se puede escribir en la forma $y = mx + b$. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por $(1, 1)$ y por $(-1, 2)$.
11. La ecuación de una parábola simétrica al eje y se puede escribir en la forma $y = ax^2 + b$. Hallar la ecuación de una parábola tal, que pasa por los puntos $(1, 3)$ y $(2, 6)$. Trazar la gráfica.
12. La ecuación de un círculo se puede escribir como $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Determinar a, b y c de manera que el círculo pase por los puntos $(0, 0)$, $(4, 0)$ y $(2, 2)$. Trazar la gráfica.
13. Hallar un número de tres dígitos tal que la suma de los dígitos sea 12, el dígito de las unidades sea 2 menos que la suma de los dígitos de las decenas y de las centenas y que el número aumente en 198 cuando se intercambien los dígitos de las unidades y de las centenas.
14. Un químico tiene tres botellas con el mismo ácido, una con solución al 10 %, otra al 5 % y la tercera al 4 %. Desea preparar una mezcla de 100 c. c. de solución al 6 %. Para lograrlo, vacía toda la solución al 4 %, doble cantidad de la solución al 5 % y llena el recipiente con solución al 10 %. ¿Cuánto usa de cada una?
15. El agua de un lago salado contiene aproximadamente el 20 % de sustancias minerales. ¿Cuánta agua con un 4 % de minerales hay que mezclar con agua del lago para llenar una alberca de 2000 litros con agua que contenga un 6 % de minerales?
16. El tanque *A* contiene una mezcla de 24 litros de agua y 6 litros de insecticida; el tanque *B* contiene 26 litros de agua y 4 litros de insecticida. ¿Cuánto hay que tomar de cada tanque para tener 6 litros de solución con $16\frac{2}{3}$ % de insecticida?
17. Una persona tiene tres inversiones que ascienden a un total de $15 000. Las tasas de interés son 4, 5 y 6 %. Su ingreso producido por la inversión al 5 % es igual al producido por la inversión al 6 % y el ingreso total anual es de $760. ¿Cuánto está invertido a cada tasa?
18. El primer día de clase, $\frac{6}{7}$ de los estudiantes en un curso de álgebra eran hombres. Posteriormente, se inscribieron un hombre y una mujer y el grupo quedó formado por hombres en sus $\frac{5}{6}$. ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres tomaban el curso?

19. Cierto tanque tiene una bomba de vaciado y otra de llenado. Cuando ambas bombas trabajan juntas, el tanque se llena en 14 horas, pero si la bomba de vaciado se apaga durante 2 horas y luego se pone a trabajar, el tanque se llena en 10 horas. La bomba de llenado descarga 1000 litros por hora. Hallar la capacidad del tanque y la velocidad con que extrae agua la bomba de vaciado.

20. Una oficina usa dos tipos de máquinas copiadoras: X y D. Se consumen un total de 21 horas-máquina para hacer 300 copias en la máquina X y 500 en la D, pero solo 19 horas-máquina si se hacen 500 copias en X y 300 en D. Hallar la velocidad de cada máquina.

21. El camino desde la ciudad A hasta la ciudad B por el paso C se desenvuelve a nivel por 35 km, luego asciende durante otros 18 km y finalmente desciende 24 km hasta B. Enrique emplea 54 minutos en recorrer el tramo a nivel y ascender la tercera parte del camino hasta la cumbre y 1 hora 4 minutos para completar el viaje hasta la ciudad B. El viaje de retorno lo hace en 2 horas. Hallar las velocidades promedio en los tramos a nivel, descendente y ascendente.

22. A las 3:00 A.M. arranca un caracol en línea recta a través de un campo. A las 8:00 A.M. una tortuga se despierta en el punto exactamente opuesto y comienza a moverse hacia el caracol. La tortuga se mueve con una rapidez de 450 veces la del caracol. Si la distancia a través del campo es de 2716 m y se encuentran a las 11:00 A.M., ¿cuál es el paso del caracol?

7-7 DESIGUALDADES LINEALES SIMULTANEAS CON DOS VARIABLES

Un conjunto de dos o más desigualdades de las formas $ax + by + c > 0$ o $ax + by + c < 0$ ($a, b, c \in R$ y $a \neq 0$ o $b \neq 0$) se llama *sistema de desigualdades lineales* con dos variables. Su solución se encuentra con facilidad por graficación. En la Sección 6-6 aprendimos que la gráfica de una desigualdad lineal consistía en la totalidad de puntos de un semiplano. La gráfica del sistema, entonces, debe ser la intersección de los semiplanos correspondientes a cada una de las desigualdades.

Por ejemplo, consideremos el sistema A:

$$A\begin{cases} x + y - 1 < 0 \\ 2x - y + 4 < 0 \\ x > -5 \end{cases}$$

Primero usaremos los postulados y teoremas de orden para tener desigualdades equivalentes a ésas, pero que solo tengan y a la izquierda (si la desigualdad no contiene a y, llegamos a una que tenga x en un solo lado). Así obtenemos el sistema equivalente

$$B\begin{cases} y < 1 - x \\ y > 2x + 4 \\ x > -5 \end{cases}$$

Las gráficas de las tres desigualdades aparecen en las Figuras 7-4, 7-5 y 7-6.

Para demostrar la solución del sistema trazamos las gráficas de las tres desigualdades sobre el mismo sistema coordenado, Figura 7-7. Todos los puntos de la región que aparece sombreada y cubierta, tanto con líneas horizontales como verticales, representan pares ordenados que pertenecen a la solución del sistema. En otras palabras, la gráfica del sistema consiste en la totalidad de puntos del plano localizados dentro del triángulo cuyos vértices son P, Q y R.

Dado que el conjunto solución tiene un número infinito de elementos, nuestro único modo de representarlo algebraicamente es mediante la notación de conjuntos. El conjunto solución es

$$\{(x, y) | \; y < 1 - x, \; y > 2x + 4, \; x > -5\}$$

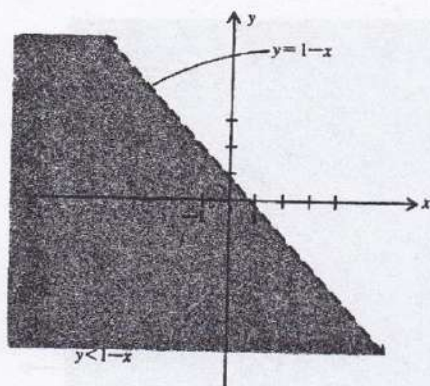


Figura 7-4

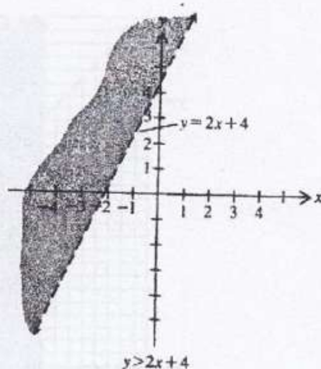


Figura 7-5

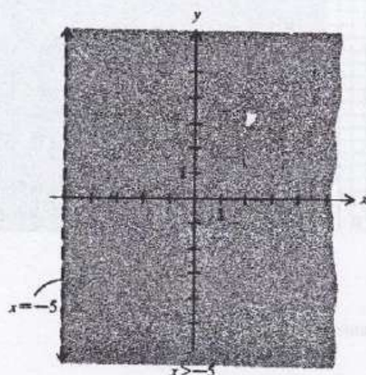


Figura 7-6

En esta situación, notamos que la solución gráfica es mucho más significativa que la algebraica.

En los Ejemplos (a) y (b) se dan las gráficas de otros dos sistemas de desigualdades. Los Ejemplos (c) y (d) son aplicaciones. Se observará que en las aplicaciones de las desigualdades rara vez es única la solución. Sin embargo, en una situación práctica, algunas de las soluciones pueden ser mejores que las otras y encontrar la mejor solución para una situación en particular es una meta importante.

Ejemplo (a) Usar una gráfica para mostrar el conjunto solución del sistema siguiente:

$$\begin{cases} x > y \\ 3x + y > 6 \\ y < 5 \\ x > 2 \end{cases}$$

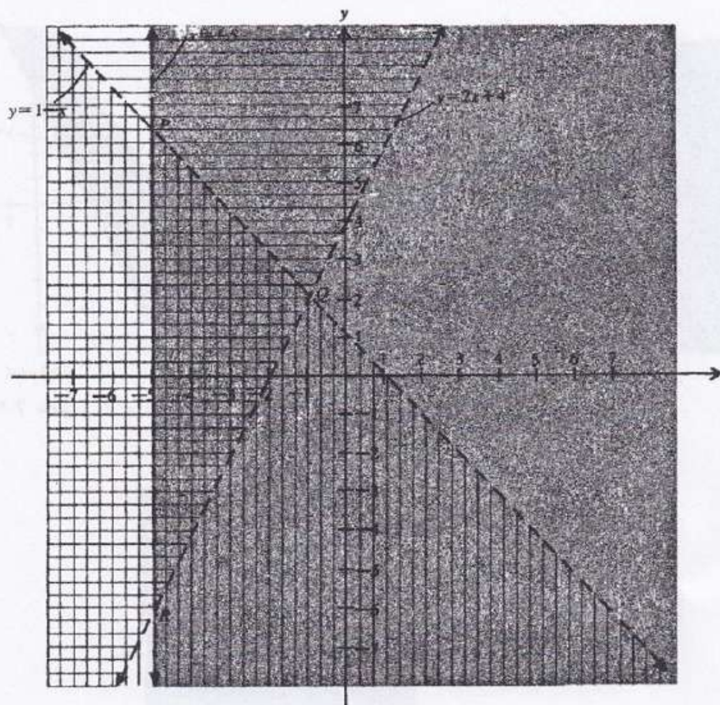


Figura 7-7

Solución: Este sistema es equivalente a

$$\begin{cases} y < x \\ y > 6 - 3x \\ y < 5 \\ x > 2 \end{cases}$$

Se puede proceder de esta manera. Se traza la línea $y = x$ (Figura 7-8) y se dibuja mentalmente la región en que $y < x$, después se traza $y = 6 - 3x$ y se localiza la región en que $y > 6 - 3x$. Sean $L_1 = \{(x, y) | y = x\}$, $L_2 = \{(x, y) | y = 6 - 3x\}$, $L_3 = \{(x, y) | y = 5\}$, $L_4 = \{(x, y) | x = 2\}$. Sean L_1, L_2, L_3 y L_4 también las gráficas de dichos conjuntos. La región abajo de L_1 y arriba de L_2 es $\{(x, y) | y < x \text{ y } y > 6 - 3x\}$. Consideremos ahora las gráficas de las otras dos desigualdades. Si $y < 5$ y $x > 2$, los puntos deben quedar abajo de L_3 y a la derecha de L_4. En seguida sombreamos la región que representa la solución: la región abajo de L_1 y L_3, arriba de L_2 y a la derecha de L_4.

Se puede tener también un sistema que contenga tanto desigualdades como igualdades, como el que aparece en el ejemplo siguiente.

Ejemplo (b) Ilustrar la solución del sistema

$$\begin{cases} y \geq x - 4 \\ y < 4x \\ x = 3 \end{cases}$$

con una gráfica.

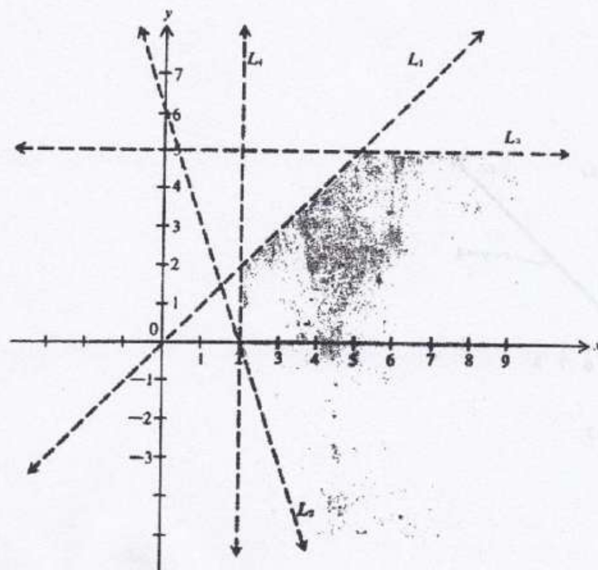


Figura 7-8

Solución: Sean $L_1 = \{(x, y) | x - y = 4\}$, $L_2 = \{(x, y) | y = 4x\}$ y $L_3 = \{(x, y) | x = 3\}$ y marquemos las gráficas como en la Figura 7-9. Los puntos que pertenecen al conjunto solución del sistema deben quedar arriba de *o en* L_1, abajo de L_2 y en L_3. Así, pues, la gráfica de $\{(x, y) | y \geq x - 4, y < 4x, x = 3\}$ es la parte de la recta L_3 que está reteñida, incluyendo el punto de intersección con L_1 pero no con L_2.

Supóngase que deseamos describir el conjunto de puntos interiores del triángulo *ABC* de la Figura 7-9. Puesto que esos puntos quedan a la izquierda de la recta $x = 3$, debemos tener $x < 3$ en vez de $x = 3$, lo que da $\{(x, y) | y > x - 4, y < 4x, x < 3\}$. Nótese el cambio de $y \geq x - 4$ a $y > x - 4$, puesto que deseamos solo aquellos puntos que están *dentro* del triángulo.

Es evidente que las tres líneas dividen al plano en siete regiones. Hemos ya descrito una como un conjunto de puntos, mediante un sistema de desigualdades. ¿Puede el estudiante hacer lo mismo con las otras seis?

Ejemplo (c) Un agente está arreglando un viaje en esquís. Puede llevar un máximo de 10 personas y ha decidido que deben ir por lo menos 4 hombres y 3 mujeres. Su ganancia será de $10 por cada mujer y $15 por cada hombre. ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres le producirán la mayor ganancia?

Solución: Sean

x = número de mujeres
y = número de hombres

Entonces, x y y deben ser tales que

$$\begin{cases} x + y \leq 10 \\ x \geq 3 \\ y \geq 4 \end{cases}$$

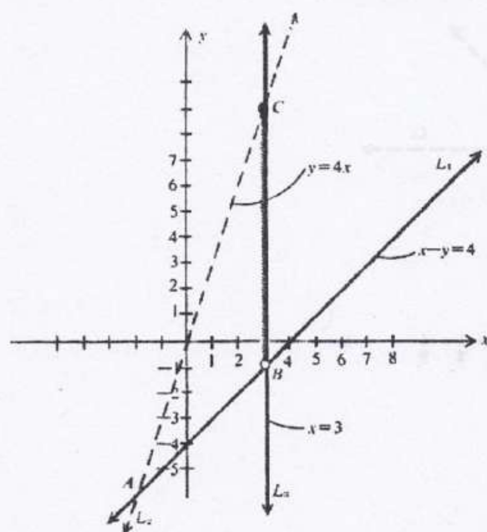


Figura 7-9

Al graficar este sistema notamos que (x, y) debe estar dentro o en la frontera del triángulo ADJ de la Figura 7-10. Dado que $x, y \in N$, hay exactamente 10 pares ordenados de números naturales que satisfacen las tres desigualdades. Cada punto de la gráfica representa a uno de ellos. La ganancia P se puede expresar como

$P = 10x + 15y$

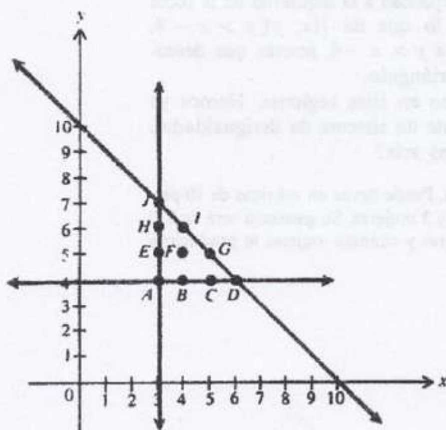


Figura 7-10

Sean P_A la ganancia que produce $A(3, 4)$, P_B la que produce $B(4, 4)$, etc. De todo ello obtenemos

$$P_A = \$10 \cdot 3 + \$15 \cdot 4 = \$90$$
$$P_B = \$10 \cdot 4 + \$15 \cdot 4 = \$100$$
$$P_C = \$10 \cdot 5 + \$15 \cdot 4 = \$110$$
$$P_D = \$10 \cdot 6 + \$15 \cdot 4 = \$120$$
$$P_E = \$10 \cdot 3 + \$15 \cdot 5 = \$105$$
$$P_F = \$10 \cdot 4 + \$15 \cdot 5 = \$115$$
$$P_G = \$10 \cdot 5 + \$15 \cdot 5 = \$125$$
$$P_H = \$10 \cdot 3 + \$15 \cdot 6 = \$120$$
$$P_I = \$10 \cdot 4 + \$15 \cdot 6 = \$130$$
$$P_J = \$10 \cdot 3 + \$15 \cdot 7 = \$135$$

Vemos que la ganancia máxima es \$135, en J (3 mujeres y 7 hombres). Notemos también que la ganancia mínima es P_A (3 mujeres y 4 hombres), de manera que el máximo se presenta en un vértice del triángulo y el mínimo en otro vértice.

Esto ilustra con un ejemplo sumamente simple un método mucho más general de la matemática aplicada llamado *programación lineal*. Si se dan dos cantidades variables restringidas por conjuntos de condiciones expresables como desigualdades lineales, la gráfica de ese sistema suele ser el conjunto de puntos dentro de alguna figura geométrica cerrada limitada por rectas, llamada polígono.* Después, si se puede expresar una tercera cantidad en forma de una expresión lineal que comprenda las mismas dos variables, su máximo o mínimo se presenta en los valores de las variables de uno de los vértices del polígono. No intentaremos demostrar esto, pero el razonamiento que sigue debe hacerlo evidentemente razonable, al menos para situaciones simples. Si hubiésemos aceptado esto antes de resolver el Ejemplo (c), solo habríamos tenido que encontrar las coordenadas de los puntos A, D y J, sabiendo que la ganancia máxima debía presentarse en uno de dichos puntos.

Deseábamos que $P = 10x + 15y$ —donde x y y estaban limitadas por las condiciones dadas en el problema— para un máximo. Consideremos el conjunto de ecuaciones

$$10x + 15y = P_1, \qquad 10x + 15y = P_2, \qquad 10x + 15y = P_3, \ldots$$

en donde $P_1, P_2, P_3, \ldots$ son números reales fijos que representan la ganancia. Las gráficas serán un conjunto de líneas paralelas que cortan al eje x en los puntos $\frac{P_1}{10}, \frac{P_2}{10}, \frac{P_3}{10}, \ldots$ Al crecer la ganancia, crece la intersección con x. Consideremos todas las líneas que intersectan al triángulo ADJ. ¿No es obvio que la que pasa por A representa la ganancia mínima y la que pasa por J representa la máxima? Si no se ve obvio, tómese una de tales líneas L, por ejemplo, $10x + 15y = 30$, graficada en la Figura 7-11. Visualice ahora otra línea paralela a L y véala moverse hacia A. Sea L_A la posición de esta línea cuando toca al punto A. En este caso, A es el primer punto del triángulo que intersecta la línea y que representa la ganancia mínima, puesto que la intersección con x está creciendo. A medida que se mueve sobre el triángulo, pero siempre paralela a L, J será el último punto del triángulo que intersecte la línea. P_J, por tanto, será la ganancia máxima.

Consideremos otra situación:

* Algunos ejemplos de polígonos son (1) triángulo, tres lados; (2) cuadrilátero, cuatro lados; (3) pentágono, cinco lados; (4) hexágono, seis lados; etc.

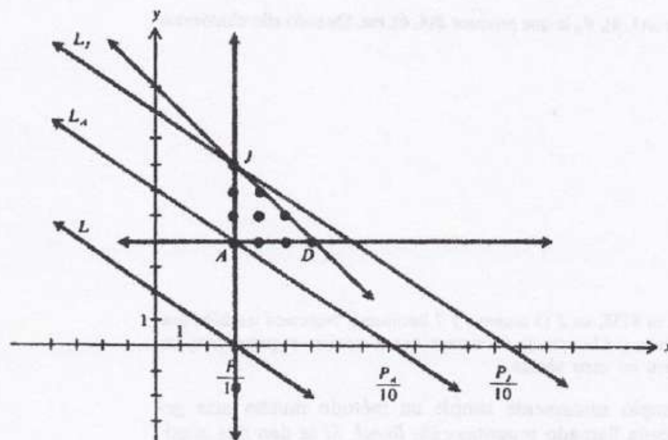


Figura 7-11

Ejemplo (d) Una firma de corredores de bolsa ofrece dos tipos de inversiones que producen ingresos a razón del 4 y 5 por 100 respectivamente. Un cliente desea invertir un máximo de \$100 000 y que su ingreso anual sea por lo menos de \$4 500. Insiste en que por lo menos $\frac{3}{4}$ del total debe ser invertido al 5 por 100. El corredor recibe un 1 por 100 de los ingresos de la inversión al 5 por 100 y un 2 por 100 de la inversión al 4 por 100. ¿Cuánto invertirá el corredor a cada tasa para que sus honorarios sean máximos?

Solución: Sean

x = cantidad al 4 por 100
y = cantidad al 5 por 100

Si utilizamos la información dada, podemos construir el sistema siguiente:

$$\begin{cases} x + y \leq 100\,000 \\ 4x + 5y \geq 450\,000 \\ y \geq 75\,000 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

La gráfica muestra que (x, y) puede ser cualquier punto interior o de la frontera del cuadrilátero $ABCD$ de la Figura 7-12.

Los honorarios F del corredor se pueden expresar como sigue

$$F = (0{,}01)(0{,}05)y + (0{,}02)(0{,}04)x$$
$$= 0{,}0005y + 0{,}0008x$$

Hallamos las coordenadas de A, B, C y D resolviendo las ecuaciones simultáneas de las rectas que corresponden. $A = (18\,750,\ 75\,000)$, $B = (25\,000,\ 75\,000)$, $C = (0,\ 100\,000)$ y $D = (0,\ 90\,000)$. Utilicemos ahora la ecuación (1) para encontrar los honorarios del corredor en los puntos A, B, C y D:

F_A = \$52,50 F_C = \$50,00
F_B = \$57,50 F_D = \$45,00

Aceptado que el máximo debe ocurrir en uno de los vértices, debe ser de \$57,50 en B, en donde la cantidad invertida al 4 por 100 es de \$25 000 y la cantidad al 5 por 100 es de \$75 000.

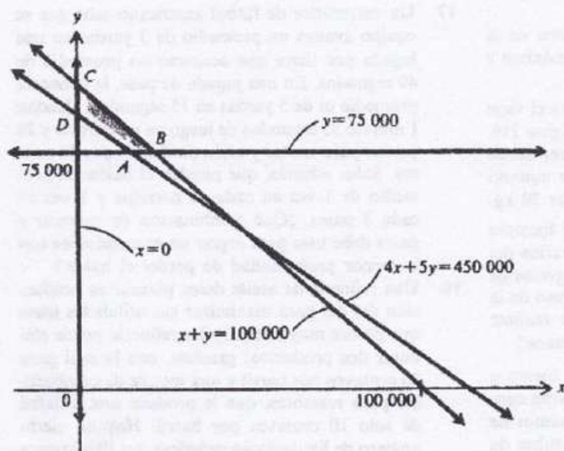


Figura 7-12

7-4 Ejercicios

En los Ejercicios del 1 al 6, trazar y describir la gráfica de cada uno de los sistemas de desigualdades.

1. $\begin{cases} y < x + 1 \\ 2y + 1 > 2x \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x - y > 0 \\ x + y < 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x + 4y \geq 12 \\ 3x \leq 4y \\ x < 5 \end{cases}$

4. $\begin{cases} -2 \leq x \leq 3 \\ 1 \leq y \leq 4 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 0 \\ y - x < 5 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x + 2y < 4 \\ 3x - y < 6 \\ x + y + 1 > 0 \\ 3x + y > -3 \end{cases}$

En los Ejercicios 7, 8 y 9, describir la región poligonal que sea la gráfica del sistema de desigualdades dado. Hallar las coordenadas de los vértices.

7. $\begin{cases} |x| < 4 \\ |y| < 2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x < 2 \\ x + y < 4 \\ x - y + 2 < 0 \\ x + 3y + 6 > 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} y > -1 \\ y < 3 \\ x - y < 2 \\ y - x < 1 \end{cases}$

10. Utilizar desigualdades para escribir los puntos del plano que no están entre las rectas paralelas $3x - y = 6$ y $12x - 4y = 15$.

11. Utilizar desigualdades para describir los puntos que están dentro del rectángulo cuyos vértices son $A(3, 5)$, $B(3, -2)$, $C(6, -2)$ y $D(6, 5)$.

12. Sombrear el área descrita por la gráfica del sistema $\begin{cases} |x| > 2 \\ |y| > 2 \end{cases}$.

13. (a) Demostrar que las líneas $3x + 2y = 6$, $x + 2y = 8$ y $y = 2$ dividen al plano en siete regiones. Marcarlas con las letras de la A a la G.
(b) Construir siete sistemas de tres desigualda-

des cada uno para describir las regiones de la A a la G.

(c) Hallar los vértices de la región triangular limitada por las líneas.

(d) Si $P = y - 2x + 1$, ¿en qué puntos de la región triangular tendrá P sus valores máximo y mínimo y cuáles son esos valores?

14. Suponiendo las mismas condiciones para el viaje en esquís, descrito en el Ejemplo (c), página 219, hallar cuántos hombres y cuántas mujeres deben incluirse si el peso del equipaje ha de ser mínimo y cada hombre lleva 10 kg y cada mujer 30 kg.

15. Supónganse las mismas condiciones del Ejemplo (d), página 222, pero en que los honorarios del corredor son como sigue: 5 % de los ingresos de la inversión al 4 % menos 0,1 % del ingreso de la inversión al 5 %. ¿En qué forma debe realizar la inversión para lograr honorarios máximos?

16. Un huevo contiene 1,1 miligramos de hierro y 6 gramos de proteínas; 85 gramos de carne contienen 2,9 miligramos de hierro y 20 gramos de proteínas. La ración diaria para un hombre de tamaño medio es de 70 gramos de proteínas y 10 miligramos de hierro.

(a) Sea x = número de huevos y y = número de gramos de carne. Construir un sistema de desigualdades en x y y que exprese las formas en que estos dos alimentos pueden suministrar por lo menos las raciones mínimas diarias para un hombre promedio.

(b) Dar cuatro formas en que se pueda completar la ración mínima diaria de hierro y proteínas, suponiendo que $x \geq 0$, $y \geq 0$, que la carne se puede pesar hasta una precisión de decenas de gramos y que los huevos no se pueden dividir.

(c) Si la carne proporciona 60 calorías por cada 28 gramos y un huevo proporciona 70 calorías, encontrar las cantidades de cada uno que proporcionen por lo menos la dieta diaria mínima de hierro y proteínas, pero con el mínimo número de calorías.

17. Un entrenador de fútbol americano sabe que su equipo avanza un promedio de 3 yardas en una jugada por tierra que consume un promedio de 40 segundos. En una jugada de pase, la ganancia promedio es de 5 yardas en 15 segundos. Quedan 1 minuto 55 segundos de juego en un partido y 28 yardas para anotar y están perdiendo por 10 puntos. Sabe, además, que pierden el balón un promedio de 1 vez en cada 10 corridas y 1 vez en cada 3 pases. ¿Qué combinación de carreras y pases debe usar para lograr un «touchdown» con la menor probabilidad de perder el balón?

18. Una refinería de aceite desea planear su producción del día para maximizar sus utilidades (cosa que parece muy natural). La refinería puede elaborar dos productos: gasolina, con la cual gana 20 centavos por barril y una mezcla de combustible para reactores, que le produce una utilidad de solo 10 centavos por barril. Hay un cierto número de limitaciones prácticas que llamaremos «restricciones». Restricción 1: Solo se dispone de 10 000 barriles de aceite crudo para procesar. Restricción 2: La refinería debe producir por lo menos 1000 barriles de combustible para reactores para satisfacer un contrato con el gobierno. Restricción 3: Debe también producir al menos 2000 barriles de gasolina para satisfacer las necesidades de un distribuidor local. Restricción 4: Ambos productos deben ser embarcados en camiones y solo se dispone de un número limitado de ellos suficiente para 180 000 barriles-kilómetro; el combustible para reactores debe entregarse en un aeropuerto a 10 km de la refinería, pero la gasolina debe transportarse 30 km hasta el distribuidor. ¿Cuántos barriles debe elaborar de cada producto para maximizar sus utilidades?

Números complejos 8

8-1 EL CONJUNTO C DE LOS NUMEROS COMPLEJOS

En la Sección 6-7 hacíamos notar que la ecuación cuadrática $x^2 - 2x + 3 = 0$ no podía tener ningún número real en su conjunto solución. Existen muchas ecuaciones con coeficientes reales que caen en esa categoría. Por ejemplo, consideremos la ecuación

$$x^2 + 4 = 0$$

Ya que $x^2 \geq 0$ para toda $x \in R$, $x^2 + 4$ nunca puede ser 0 para ningún valor real de x.

Si hemos de lograr que ecuaciones tales como $x^2 + 4 = 0$ no tengan conjuntos solución vacíos, necesitamos extender nuestro concepto de número más allá de los números reales. Tal extensión será la que efectuaremos en este capítulo; es decir, vamos a construir un nuevo sistema numérico, una parte del cual se comportará exactamente como el sistema de los números reales. Esta extensión hará necesario un nuevo conjunto de números, así como un conjunto de reglas para operar con ellos.

Definición Un *número complejo* z es un par ordenado de números reales (a, b) y cada par ordenado de números reales (a, b) es un número complejo z. El conjunto de los números complejos se designa por la letra C. Según eso,

$$C = \{z \mid z = (a, b) \text{ y } a,\ b \in R\}$$

De esta definición se sigue que $(0, 1)$, $(\pi, \sqrt{2})$, $(-3{,}1,\ 6{,}28)$, $(3, 3)$ y $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5}\right)$ son números complejos.

Sabemos ya que dos pares ordenados de números reales (a, b) y (c, d) tienen la misma gráfica si, y solo si, $a = c$ y $b = d$. Este hecho sugiere la definición siguiente de igualdad de números complejos.

Definición Para cada $z_1, z_2 \in C$, si $z_1 = (a, b)$ y $z_2 = (c, d)$, entonces $z_1 = z_2$ si, y solo si, $a = c$ y $b = d$.

Notemos que una igualdad en el conjunto de los números complejos equivale a un par de igualdades en el conjunto de los números reales.

Ejemplo (a) $(3, 4 + 1) = (\sqrt{9}, 5)$, ya que $3 = \sqrt{9}$ y $4 + 1 = 5$.

Ejemplo (b) Si $(x, 3) = (4, y)$, entonces $x = 4$ y $y = 3$.

En la Sección 2-3 asumíamos que la igualdad de números reales era reflexiva, simétrica y transitiva. Estas propiedades familiares lo son también de la igualdad de números complejos.

Ejemplo (c) Demostrar que la igualdad de números complejos tiene la propiedad transitiva: Si $z_1, z_2, z_3 \in C$, y si $z_1 = z_2$ y $z_2 = z_3$, entonces $z_1 = z_3$.

Solución: Sean $z_1 = (a, b)$, $z_2 = (c, d)$ y $z_3 = (e, f)$. Ya que $z_1 = z_2$ y $z_2 = z_3$, se sigue que

$a = c, b = d$ y $c = e, d = f$ (¿Por qué?)

Pero $a = c$ y $c = e$ implica $a = e$ (¿Por qué?)

Similarmente, $b = d$ y $d = f$ implica $b = f$. Así, pues,

$a = e$ y $b = f$

Por tanto,

$(a, b) = (e, f)$ (¿Por qué?)

En los Ejercicios 48 y 49, página 233, se le pedirá al estudiante que demuestre que la igualdad de números complejos tiene las propiedades reflexiva y simétrica.

8-2 SUMA Y MULTIPLICACION DE NUMEROS COMPLEJOS

En este momento, tenemos ya el conjunto de los números complejos en los que hemos definido una relación de igualdad. Como paso siguiente en el desarrollo del *sistema* de números complejos, definiremos la suma y la multiplicación de estos nuevos números. Estas definiciones están motivadas por dos objetivos. Primero, deseamos que una parte del nuevo sistema sea indistinguible del de los números reales. Segundo, deseamos que contenga números que nos permitan resolver ecuaciones como $x^2 + 4 = 0$.

Definición Si $z_1, z_2 \in C$, y $z_1 = (a, b)$ y $z_2 = (c, d)$, entonces $z_1 + z_2 = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.

Notemos que la suma de números complejos está definida en términos de la suma de números reales.

La definición de la multiplicación de números complejos quizá parezca complicada al principio. En una sección posterior, veremos que esta definición es la que nos proporciona los medios para encontrar un número cuyo cuadrado sea un número real negativo.

Definición Si $z_1, z_2 \in C$, y $z_1 = (a, b)$ y $z_2 = (c, d)$, entonces $z_1 \cdot z_2 = (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Conviene estudiar nuevamente esta definición para estar seguros de que hemos entendido que la multiplicación de números complejos está definida en términos de *tres* operaciones con números reales.

Si $z \in C$ y $m \in I$, la expresión z^m se usará para representar la m-ésima potencia de z. En particular, si m es un número natural, entonces $z^m = \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdots z}_{m \text{ factores}}$.

Ejemplo (a) $(1, 0) + (3, 0) = (1 + 3, 0 + 0) = (4, 0)$.

Ejemplo (b) $(2, 3) + (-4, 1) = (2 + (-4), 3 + 1) = (-2, 4)$.

Ejemplo (c) $(3, 0) \cdot (5, 0) = (3 \cdot 5 - 0 \cdot 0, 3 \cdot 0 + 0 \cdot 5) = (15, 0)$.

Ejemplo (d) $(1, 2)^2 = (1, 2) \cdot (1, 2) = (1 \cdot 1 - 2 \cdot 2, 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1)$
$= (1 - 4, 2 + 2) = (-3, 4)$

Los dos teoremas siguientes hacen ver que los procesos de suma y multiplicación de números complejos son operaciones binarias sobre el conjunto C. Es decir, C es cerrado ante $+$ y .

Teorema 8-1 Para toda $z_1, z_2 \in C$, $z_1 + z_2$ es un número complejo único.

Demostración: Sean $z_1 = (a, b)$ y $z_2 = (c, d)$. Entonces

$z_1 + z_2 = (a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)$

Pero por el postulado de cerradura de la suma de números reales, $a + c$ y $b + d$ son números reales únicos.

Por tanto, $z_1 + z_2 = (a + c, b + d)$ es un número complejo único.

Teorema 8-2 Para toda $z_1, z_2 \in C$, $z_1 \cdot z_2$ es un número complejo único.

(Véase el Ejercicio 50, página 233.)

Muchos de los resultados que obtuvimos en el trabajo con números reales dependían de las propiedades de suma y multiplicación de la igualdad. La igualdad de números complejos tiene las mismas propiedades. Según eso, si z_1, z_2, z_3 y z_4 son números complejos y si $z_1 = z_2$ y $z_3 = z_4$, entonces $z_1 + z_3 = z_2 + z_4$ y $z_1 \cdot z_3 = z_2 \cdot z_4$.

Esta proposición se sigue de manera inmediata de las propiedades de la relación de igualdad analizadas antes en este capítulo y de las definiciones de suma y multiplicación de números complejos. No hay nada difícil en la demostración, de modo que la dejamos como ejercicio.

Consideremos ahora el ejemplo que sigue, que ilustra el comportamiento de los números complejos con respecto a la multiplicación.

Ejemplo (e) Demostrar que $(1, 3) \cdot (2, 5) = (2, 5) \cdot (1, 3)$.

Solución:

$(1, 3) \cdot (2, 5) = (1 \cdot 2 - 3 \cdot 5, 1 \cdot 5 + 3 \cdot 2)$	Definición de multiplicación de números complejos
$= (2 \cdot 1 - 5 \cdot 3, 5 \cdot 1 + 2 \cdot 3)$	Postulado conmutativo de la multiplicación de los números reales
$= (2 \cdot 1 - 5 \cdot 3, 2 \cdot 3 + 5 \cdot 1)$	Postulado conmutativo de la suma de los números reales
$= (2, 5) \cdot (1, 3)$	Definición de multiplicación de números complejos

Observemos que este ejemplo hace ver que la multiplicación de los números complejos $(1, 3)$ y $(2, 5)$ es conmutativa.

Este resultado sugiere que la suma y la multiplicación de complejos tenga las mismas propiedades que la suma y la multiplicación de reales. De hecho, empleando argumentos similares a los que se usaron en ese caso específico, podemos llegar al siguiente teorema. La mayor parte de la demostración de este teorema queda para los ejercicios. Sin embargo, no se habrá de encontrar difícil el trabajo si se ha entendido el razonamiento utilizado en el Ejemplo (e).

Teorema 8-3 La suma y la multiplicación de números complejos son conmutativas y asociativas y la multiplicación es distributiva con respecto a la suma en los números complejos. Así, pues.

(a) $z_1, z_2 \in C \rightarrow z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.
(b) $z_1, z_2 \in C \rightarrow z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.
(c) $z_1, z_2, z_3 \in C \rightarrow (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.
(d) $z_1, z_2, z_3 \in C \rightarrow (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$.
(e) $z_1, z_2, z_3 \in C \rightarrow z_1 \cdot (z_2 + z_3) = (z_1 \cdot z_2) + (z_1 \cdot z_3)$.

Demostración de la parte (c): Supóngase que $z_1 = (a, b)$, $z_2 = (c, d)$ y $z_3 = (e, f)$. Entonces

$(z_1 + z_2) + z_3 = [(a, b) + (c, d)] + (e, f)$	Propiedad de sustitución de la igualdad
$= (a + c, b + d) + (e, f)$	Definición de suma de números complejos
$= ((a + c) + e, (b + d) + f)$	(¿Por qué?)
$= (a + (c + e), b + (d + f))$	Postulado asociativo de la suma de números reales
$= (a, b) + (c + e, d + f)$	(¿Por qué?)
$= (a, b) + [(c, d) + (e, f)]$	(¿Por qué?)
$= z_1 + (z_2 + z_3)$	

8-3 LOS ELEMENTOS IDENTIDAD E INVERSO EN LOS NUMEROS COMPLEJOS

Los números complejos (0, 0) y (1, 0) desempeñan papeles especiales en este sistema de números. Es claro que para cualquier número complejo (a, b),

$$(a, b) + (0, 0) = (0, 0) + (a, b) = (0 + a, 0 + b) = (a, b)$$

y

$$(a, b) \cdot (1, 0) = (1, 0) \cdot (a, b) = (1 \cdot a - 0 \cdot b, 1 \cdot b + 0 \cdot a) = (a, b)$$

Por tanto, (0, 0) es una identidad aditiva, en tanto que (1, 0) es una identidad multiplicativa en el sistema de los números complejos. La unicidad de dichos elementos se desprende de la unicidad de los elementos identidad de la suma y la multiplicación de números reales. Por ejemplo, ¿cómo sabemos que (0, 0) es el único número complejo que podemos sumar con (a, b) para obtener (a, b)? Porque 0 es el único número real que sumado con a, da a; y 0 es el único real que sumado con b, da b.

En el sistema de los números reales, x se llamaba inverso aditivo de a si, y solo si, $a + x = 0$. Similarmente, en el sistema de los números complejos, (x, y) es el inverso aditivo de (a, b) si, y solo si, $(a, b) + (x, y) = (0, 0)$.

El inverso aditivo de (a, b) se denota por $-(a, b)$. Según eso, el inverso aditivo de $(3, -5)$ se escribe $-(3, -5)$. Además, $-(3, -5) = (-3, 5)$ dado que $(3, -5) + (-3, 5) = (3 + (-3), -5 + 5) = (0, 0)$.

Sabemos que cada número real tiene un inverso aditivo único. El teorema siguiente nos hace ver que la misma proposición es válida para cada número complejo.

Teorema 8-4 Para cada número complejo $z = (a, b)$, existe un número complejo (x, y) único, tal que

$(a, b) + (x, y) = (0, 0)$

Demostración: Por la definición de suma de números complejos,

$(a, b) + (x, y) = (a + x, b + y)$

Esta suma es $(0, 0)$ si, y solo si,

$a + x = 0 \quad$ y $\quad b + y = 0$

En consecuencia, $(a, b) + (x, y) = (0, 0)$ si, y solo si,

$x = -a \quad$ y $\quad y = -b$

Pero $-a$ y $-b$ son números reales únicos para $a, b \in R$. Así, pues, debemos concluir que hay un único número complejo $(x, y) = (-a, -b)$ que satisface la ecuación $(a, b) + (x, y) = (0, 0)$.

Observemos cuidadosamente que al demostrar el Teorema 8-4 hemos asentado el hecho de que cada número complejo (a, b) tiene un inverso aditivo $(-a, -b)$, único. Puesto que hemos convenido en representar el inverso aditivo de (a, b) por $-(a, b)$, se concluye que $-(a, b) = (-a, -b)$.

Ejemplo (a) El inverso aditivo de $(-2, 6)$ es $(2, -6)$.

Ejemplo (b) Si $z = (5, 0)$, entonces $-z = -(5, 0) = (-5, 0)$.

Si el producto de dos números reales es 1, cada uno de dichos números se llama inverso multiplicativo del otro. Ahora bien, consideremos los números complejos $(2, 3)$ y $\left(\frac{2}{13}, -\frac{3}{13}\right)$ Observemos que

$$(2, 3) \left(\frac{2}{13}, -\frac{3}{13}\right) = \left(\frac{4}{13} + \frac{9}{13}, -\frac{6}{13} + \frac{6}{13}\right) = (1, 0)$$

Puesto que $(1, 0)$ es la identidad multiplicativa de los números complejos, decimos que $\left(\frac{2}{13}, -\frac{3}{13}\right)$ es el inverso multiplicativo de $(2, 3)$ y escribimos $\frac{1}{(2, 3)} = \left(\frac{2}{13}, -\frac{3}{13}\right)$.

En general, el número complejo (x, y) se llama inverso multiplicativo de (a, b) si, y solo si,

$(a, b) \cdot (x, y) = (1, 0)$

El inverso multiplicativo de (a, b) se denota por $\frac{1}{(a, b)}$.

Dado que para cada $(x, y) \in C$, $(0, 0) \cdot (x, y) = (0 \cdot x - 0 \cdot y, 0 \cdot y + 0 \cdot x) = (0, 0)$ resulta evidente que $(0, 0)$ no tiene un inverso multiplicativo. Supongamos ahora que $(a, b) \neq (0, 0)$. Sabemos que (a, b) tiene un inverso multiplicativo (x, y) y solo si,

$(a, b) \cdot (x, y) = (1, 0)$

Pero de la definición de multiplicación de números complejos

$(a, b) \cdot (x, y) = (ax - by, ay + bx)$

y este producto es $(1, 0)$ si, y solo si,

$ax - by = 1 \quad$ y $\quad ay + bx = 0 \quad$ (¿Por qué?)

Esta conjunción es equivalente al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a^2x - aby = a \\ b^2x + aby = 0 \end{cases}$$

Luego, resolviendo simultáneamente

$(a^2 + b^2)x = a$

y

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2} \qquad [a^2 + b^2 \neq 0 \text{ ya que } (a, b) \neq (0, 0)]$$

Sustituyendo $x = \dfrac{a}{a^2 + b^2}$ en la ecuación $ax - by = 1$, tenemos,

$$\frac{a^2}{a^2 + b^2} - by = 1$$

$$-by = 1 - \frac{a^2}{a^2 + b^2}$$

$$-by = \frac{b^2}{a^2 + b^2}$$

$$y = -\frac{b}{a^2 + b^2}$$

Ya que $\dfrac{a}{a^2 + b^2}$ y $-\dfrac{b}{a^2 + b^2}$ son números reales únicos, se sigue que $(x, y) = \left(\dfrac{a}{a^2 + b^2}, -\dfrac{b}{a^2 + b^2}\right)$ es un número complejo único con la propiedad de que $(a, b) \cdot (x, y) = (1, 0)$. Esto demuestra el

Teorema 8-5 Para cada $z \in C$, $z \neq (0, 0)$, existe un único número complejo, llamado *inverso multiplicativo* de z que se representa por $\frac{1}{z}$ y tal que $z \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot z = (1, 0)$.

Si $z = (a, b)$, entonces $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{(a, b)} = \left(\dfrac{a}{a^2 + b^2}, -\dfrac{b}{a^2 + b^2}\right)$.

Ejemplo (c) Hacer ver que $\left(\frac{3}{10}, -\frac{1}{10}\right)$ es el inverso multiplicativo de $(3, 1)$.

Solución: $(3, 1) \cdot \left(\frac{3}{10}, -\frac{1}{10}\right) = \left(\frac{9}{10} + \frac{1}{10}, -\frac{3}{10} + \frac{3}{10}\right) = (1, 0)$.

Ejemplo (d) Hallar el inverso multiplicativo de $(-3, 2)$.

Solución: El inverso multiplicativo $(-3, 2)$ es

$$\frac{1}{(-3, 2)} = \left(\frac{-3}{9 + 4}, -\frac{2}{9 + 4}\right) = \left(-\frac{3}{13}, -\frac{2}{13}\right)$$

8-4 EL SISTEMA DE LOS NUMEROS COMPLEJOS COMO UN CAMPO

Han quedado ya establecidas todas las propiedades elementales de los números complejos. Dichas propiedades pueden ser resumidas mediante el enunciado:

El conjunto de los números complejos junto con las operaciones de suma y multiplicación de complejos forma un cuerpo o campo.

Si es necesario, el estudiante debe remitirse a las secciones anteriores de este

capítulo para convencerse de que para cualesquiera z_1, z_2, $z_3 \in C$, son válidas las propiedades siguientes.

Cerradura $z_1 + z_2$ y $z_1 \cdot z_2$ son elementos únicos de C (Teoremas 8-1 y 8-2).

Propiedades conmutativa y asociativa

(a) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.
(b) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
(c) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
(d) $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$.

(Teorema 8-3).

Propiedad distributiva

$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = (z_1 \cdot z_2) + (z_1 \cdot z_3)$ (Teorema 8-3).

Elementos de identidad

(a) Existe un único elemento $(0, 0) \in C$ tal que $z_1 + (0, 0) = (0, 0) + z_1 = z_1$ (Sección 8-3).
(b) Existe un único elemento $(1, 0) \in C$ tal que $z_1 \cdot (1, 0) = (1, 0) \cdot z_1 = z_1$ (Sección 8-3).

Inversos

(a) Para cada z_1 existe un único elemento $-z_1 \in C$ tal que $z_1 + (-z_1) = (-z_1) + z_1 = (0, 0)$ (Teorema 8-4).
(b) Para cada z_1 [excepto (0, 0)] existe un único elemento $\frac{1}{z_1}$ tal que $z_1 \cdot \frac{1}{z_1} = \frac{1}{z_1} \cdot z_1 = (1, 0)$ (Teorema 8-5).

Ejemplo Usar las propiedades de campo y las propiedades de la igualdad de números complejos para resolver la ecuación siguiente para $z \in C$.

$$\frac{1}{(1, 3)} \cdot z + (-2, 1) = (4, -3)$$

Solución:

$$\left[\frac{1}{(1, 3)} \cdot z + (-2, 1)\right] + (2, -1) = (4, -3) + (2, -1)$$

$$\frac{1}{(1, 3)} \cdot z + [(-2, 1) + (2, -1)] = (6, -4)$$

$$\frac{1}{(1, 3)} \cdot z + (0, 0) = (6, -4)$$

$$\frac{1}{(1, 3)} \cdot z = (6, -4)$$

$$(1, 3) \cdot \left[\frac{1}{(1, 3)} \cdot z\right] = (1, 3) \cdot (6, -4)$$

$$\left[(1, 3) \cdot \frac{1}{(1, 3)}\right] \cdot z = (18, 14)$$

$$(1, 0) \cdot z = (18, 14)$$

$$z = (18, 14)$$

Tenemos ahora dos sistemas de números, cada uno de los cuales es un campo: el sistema de los números reales y el de los números complejos. Surge ahora una pregunta de manera muy natural: ¿Son válidos para los números complejos todos los teoremas de los números reales *cuyas demostraciones están basadas en las propiedades de la igualdad y/o las de campo*? La respuesta es sí. Esos teoremas dependen de solo dos cosas: las propiedades antes mencionadas y las reglas elementales de la lógica. No son una consecuencia del «tipo» de números que forman el sistema; es decir, no dependen de los símbolos utilizados para representar los elementos del cuerpo. Por ejemplo, podemos estar seguros de que los siguientes teoremas están entre los que caracterizan al sistema de números complejos:

Teorema $z_1, z_2, z_3 \in C, z_1 + z_3 = z_2 + z_3 \rightarrow z_1 = z_2$.

Teorema $z_1, z_2, z_3 \in C, z_3 \neq (0, 0), z_1 \cdot z_3 = z_2 \cdot z_3 \rightarrow z_1 = z_2$.

Teorema $z_1, z_2 \in C, z_1 \cdot z_2 = 0 \leftrightarrow z_1 = 0$ o $z_2 = 0$.

El estudiante debe ahora preguntarse: ¿Se trasladarán *todos* los teoremas de los números reales al sistema de los números complejos? A esta pregunta la respuesta es no. Aunque el sistema de los números complejos es un campo, no es un *campo ordenado* como lo es el de los números reales. Esto significa que, dados dos números complejos diferentes en general, no es posible decir que uno es menor que el otro.

Recordemos lo que significa decir que un campo F es ordenado.* Primero que nada, debe existir un subconjunto propio P de F cuyos elementos se llaman números positivos. La identidad aditiva 0, no puede pertenecer a P. Si $x \in F$ y $x \neq 0$, entonces uno, y solo uno, de los números x o $-x$ debe estar en P. Finalmente, P debe ser cerrado ante la suma y la multiplicación; es decir, que si $x, y \in P$ entonces $x + y \in P$ y $x \cdot y \in P$.

En el razonamiento que sigue se demuestra que C no puede ser ordenado. Esto se hará demostrando que ni (0,1) ni $-(0, 1) = (0, -1)$ son positivos.

Supongamos primero que el conjunto de los números complejos C puede ser ordenado. Entonces C debe contener un subconjunto propio de números positivos P. Puesto que $(1, 0) \in C$ y $(1, 0) \neq (0, 0)$, entonces $(1, 0)$ o $(-1, 0)$ serán positivos, pero no ambos a la vez. Si suponemos que $(-1, 0) \in P$, se concluirá que $(-1, 0) \cdot (-1, 0) \in P$. En consecuencia, ya que $(-1, 0) \cdot (-1, 0) = (1, 0)$, nuestra suposición nos conduciría a la contradicción de que $(-1, 0)$ y $(1, 0)$ serían ambos positivos. Por tanto, $(-1, 0)$ no puede ser positivo.

En seguida, consideraremos el número $(0, 1)$. Sabemos que $(0, 1) \neq (0, 0)$. Por tanto, si C es ordenado, $(0, 1)$ o $(0, -1)$ (pero no ambos) deben ser positivos. De ahí que $(0, 1) \cdot (0, 1)$ o bien $(0, -1) \cdot (0, -1)$ deben ser positivos. Pero $(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) \notin P$ y $(0, -1) \cdot (0, -1) = (-1, 0) \notin P$. De ahí que ni $(0, 1)$ ni $(0, -1)$ pertenecen a P, lo cual implica una contradicción. Por tanto, debemos concluir que el cuerpo o campo de los números complejos no es un cuerpo ordenado. Esto significa que, en general, no podemos hablar de que un número complejo sea positivo o negativo.

8-1 Ejercicios

En los Ejercicios del 1 al 6, hallar los valores de m y n que hacen cierta la proposición dada.

1. $\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{3}\right) = (-1, 2)$
2. $(\sqrt{m}, n) = (3, 1)$
3. $(m, 6) = (5, n)$
4. $(m, 2n + m) = (1, 5)$
5. $(m - n, m + n) = (1, 3)$

* Véase la Sección 3-4.

6. $(4m + 3, n - 6) = (m, -n)$

En los Ejercicios del 7 al 20, indicar si la proposición dada es falsa o verdadera.

7. $[(a, b) = (c, d)] \rightarrow [(c, d) = (a, b)]$
8. $[(a, b) = (c, d)] \rightarrow [(b, a) = (d, c)]$
9. $[(a, b) = (b, a)] \rightarrow a = b$
10. $[(a, b) = (c, d)] \rightarrow [(c, d) = (b, a)]$
11. $(a, b) = (b, a)$
12. $(a, b) + (c, d) = (c + a, d + b)$
13. $(a, b) \cdot (c, d) = (d, c) \cdot (b, a)$
14. $(a, b) \cdot (1, 0) = (a, b)$
15. $-(2, -4) = (-2, 4)$
16. Para toda $z \in C$, $(1, 0) \cdot z = z$
17. Si $z \neq (0, 0)$, entonces $\frac{1}{z} \in C$.
18. $(a, b) = (a, 0) + (0, b)$
19. $(a, b) = (a, 0) + [(b, 0) \cdot (0, 1)]$
20. $(a, 0) \cdot (0, 1) = (0, a)$

Efectuar las operaciones indicadas en los Ejercicios del 21 al 34. $a, b \in R$.

21. $\left(\frac{7}{8}, \frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{3}\right)$
22. $(\sqrt{2}, -3) + (-\sqrt{2}, 3)$
23. $(-4, 3) + [(-5, 6) + (5, -6)]$
24. $(a, b) + (0, 0)$
25. $(1, 3) \cdot (-1, -3)$
26. $\left(2, \frac{1}{2}\right) \cdot (4, -6)$
27. $(2, -1) \cdot \left[(1, 0) \cdot \left(-\frac{1}{2}, 1\right)\right]$
28. $(4, -2) \cdot [(3, -1) + (-2, 1)]$
29. $\left[\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) + (1, 0)\right] \cdot (1, 1)$
30. $(0, 1)^2$
31. $(0, 2)^2$
32. $(2, 0)^2$
33. $(1, 0)^3$
34. $(0, 1) \cdot (0, 1)^2$

En los Ejercicios del 35 al 42, hallar los inversos aditivo y multiplicativo de los números complejos dados. En cada caso, dar los resultados en la forma (a, b).

35. $(1, -1)$
36. $(0, 1)$
37. $(1, 0)$
38. $(a, 0), a \neq 0$
39. $(\sqrt{3}, -\sqrt{2})$
40. $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$
41. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
42. $(k + 1, k\sqrt{2}), k \neq 0$
43. Comprobar que la suma de dos complejos $(\pi, \sqrt{3})$ y $(\sqrt{2}, 1)$ es conmutativa.
44. Comprobar que la multiplicación de dos complejos $(1, 3)$ y $(4, 2)$ es conmutativa.
45. Comprobar el caso especial siguiente de la propiedad asociativa de la multiplicación de números complejos.

$$\left[(10, -10) \cdot \left(\frac{1}{5}, -\frac{1}{10}\right)\right] \cdot (4, -2) = (10, -10) \cdot \left[\left(\frac{1}{5}, -\frac{1}{10}\right) \cdot (4, -2)\right]$$

46. Demostrar que

$$(2, 0) \cdot [(4, 1) + (3, -2)] = [(2, 0) \cdot (4, 1)] + [(2, 0) \cdot (3, -2)]$$

47. Demostrar que para cada número complejo (a, b)

$$(0, 0) \cdot (a, b) = (0, 0)$$

48. Demostrar que la igualdad de números complejos tiene la propiedad reflexiva.
49. Demostrar que la igualdad de números complejos tiene la propiedad de simetría.
50. Demostrar el Teorema 8-2, página 227.
51. Demostrar el Teorema 8-3 (a), página 228.
52. Demostrar el Teorema 8-3 (b), página 228.
53. Demostrar el Teorema 8-3 (d), página 228.
54. Demostrar la ley de la cancelación para la suma de números complejos:

$$z_1, z_2, z_3 \in C \quad \text{y} \quad z_1 + z_3 = z_2 + z_3 \rightarrow z_1 = z_2$$

55. Demostrar la ley de la cancelación para la multiplicación de números complejos:

Para toda $z_1, z_2, z_3 \in C$, $z_3 \neq (0, 0)$,

$$z_1 \cdot z_3 = z_2 \cdot z_3 \rightarrow z_1 = z_2$$

En los Ejercicios del 56 al 61, resolver para $z \in C$ las ecuaciones dadas.

56. $z + (-6, 4) = (2, -7)$
57. $(m, 2n) + z = (0, 0)$
58. $\frac{1}{(3, 0)} \cdot z = (4, -1)$
59. $(m, n) \cdot z = (1, 0)$
60. $(2, 3) \cdot z = (-1, 2)$
61. $(-3, 4) + (1, -1) \cdot z = (-3, 3)$

8-5 UN SUBCONJUNTO ESPECIAL DE LOS NUMEROS COMPLEJOS

Consideremos la totalidad de números complejos de la forma $(a, 0)$. Si representamos este conjunto por R^*, podemos poner

$$R^* = \{(a, 0) \mid a \in R\}$$

Cada elemento de R^* es un elemento de C, pero $R^* \neq C$. Por tanto, $R^* \subset C$.

Notemos que R^* es cerrado ante la suma y la multiplicación de números complejos. Es decir, que para todo $(a, 0), (b, 0) \in R^*$,

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \in R^*$$

y

$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (a \cdot b - 0 \cdot 0, a \cdot 0 + 0 \cdot b) = (ab, 0) \in R^*$$

¿Qué más podemos concluir acerca del conjunto R^*?

- ¿Pertenece a R^* la identidad aditiva de los números complejos?
- ¿Pertenece a R^* la identidad multiplicativa de los números complejos?

Las respuestas a estas preguntas pueden expresarse como sigue:

- La identidad aditiva de los números complejos es $(0, 0)$ y $(0, 0) \in R^*$.
- La identidad multiplicativa de C es $(1, 0)$ y $(1, 0)$ es de la forma $(a, 0)$, de modo que $(1, 0) \in R^*$.

Quizá ya se ha notado que los elementos de R^* se comportan exactamente igual que los elementos del conjunto de números reales R. Por ejemplo,

$$\begin{array}{lccccc} & (7, 0) & + & (2, 0) & = & (9, 0) \\ \text{y} & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ & 7 & + & 2 & = & 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{lccccc} & (5, 0) & + & (-5, 0) & = & (0, 0) \\ \text{y} & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ & 5 & + & (-5) & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lccccc} & (3, 0) & \cdot & (-2, 0) & = & (-6, 0) \\ \text{y} & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ & 3 & \cdot & (-2) & = & -6 \end{array}$$

$$\begin{array}{lccccc} & (2, 0) & \cdot & \left(\frac{1}{2}, 0\right) & = & (1, 0) \\ \text{y} & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ & 2 & \cdot & \frac{1}{2} & = & 1 \end{array}$$

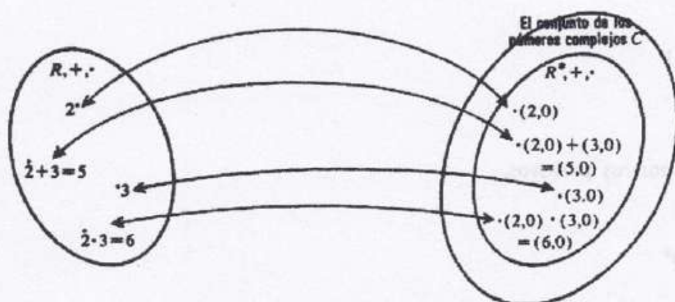
En general, se puede establecer una correspondencia uno a uno entre los elementos de los conjuntos R y R^*, de manera que para cualesquiera números reales a y b, si a se corresponde con $(a, 0)$ y b con $(b, 0)$, entonces $a + b$ corresponde con $(a, 0) + (b, 0)$ y ab se hace corresponder con $(a, 0) \cdot (b, 0)$. Es por esto que decimos que el sistema de los números reales es «esencialmente el mismo» que el sistema formado por el conjunto R^* y las operaciones de suma y multiplicación de números complejos. Cuando dos sistemas numéricos son «esencialmente el mismo» se dice que son *isomorfos*. Los sistemas R y R^* son isomorfos.

Dado que el conjunto de los números reales R, junto con las operaciones $+$ y $\cdot$ es un cuerpo, también debe serlo R^* junto con sus operaciones. De ahí que sin más investigaciones podamos decir que cada $(a, 0) \in R^*$ tiene un inverso aditivo que pertenece a R^* y que dicho inverso aditivo es $(-a, 0)$. Es decir, que para cada $(a, 0) \in R^*$

$$\begin{array}{lccccccc} & (a, 0) & + & (-a, 0) & = & (0, 0) \\ \text{ya que} & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ & a & + & (-a) & = & 0 \end{array}$$

Similarmente, para cada $(a, 0) \in R^*$ [excepto $(0, 0)$], existe un único inverso multiplicativo que pertenece a R^*. Este inverso multiplicativo debe ser $\left(\frac{1}{a}, 0\right)$.

Para aclarar la noción de campos isomorfos, tenemos el dibujo siguiente.



En vista del hecho de que el sistema de números R y R^* son isomorfos y que $R^* \subset C$, el sistema de los números complejos se llama una *extensión* del sistema de los números reales.

Ya que los elementos de R^*, con respecto a las operaciones $+$ y $\cdot$, se comportan exactamente como los números reales respecto a $+$ y $\cdot$, no resultará ninguna contradicción si convenimos en denotar el número complejo $(a, 0)$ por a e interpretar al conjunto de los números reales como un subconjunto del de los números complejos.

Notemos que, como resultado de este convenio, la identidad aditiva $(0, 0)$ se puede representar por 0 y la identidad multiplicativa $(1, 0)$ por 1.

Observemos también que

$$k \cdot (a, b) = (k, 0) \cdot (a, b) = (k \cdot a - 0 \cdot b, k \cdot b + 0 \cdot a) = (ka, kb)$$

y que en particular

$$-1 \cdot (a, b) = (-a, -b)$$

En consecuencia, el inverso aditivo de cada número complejo $z = (a, b)$ se puede escribir

$$-z = -(a, b) = (-a, -b) = -1 \cdot (a, b) = -1 \cdot z$$

8-6 LA FORMA RECTANGULAR DEL NUMERO COMPLEJO (a, b)

En esta sección habremos de adoptar otros convenios en la notación que simplificarán grandemente el manejo de números complejos.

Primero, representaremos el número complejo (0, 1) por i; es decir, que escribiremos

$i = (0, 1)$

Por la definición de z^2,

$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0)$

Luego,

$i^2 = (-1, 0)$

Y, según nuestro convenio en la notación, podemos poner

$i^2 = -1$

El número i tiene algunas propiedades muy interesantes. Por ejemplo,

$-1 \cdot i = -1 \cdot (0, 1) = -i$

Consecuentemente,

$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$

$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$

$i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$

En general, si m y n son enteros positivos,

$i^{4m} = (i^4)^m = (1)^m = 1$

y

$i^{4m+n} = i^{4m} \cdot i^n = 1 \cdot i^n = i^n$

Así,

$i^{24} = (i^4)^6 = 1$

y

$i^{39} = i^{36+3} = (i^4)^9 \cdot i^3 = i^3 = -i$

De donde $i + (-i) = (0, 1) + (0, -1) = (0, 0) = 0$, el inverso aditivo de i es $-i$. Pero $i \cdot (-i) = i \cdot (-1 \cdot i) = -1 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$. De modo que $-i$ es también el inverso multiplicativo de i. ¿Existe algún número real con esa propiedad? Es decir, ¿hay un número real cuyo inverso aditivo sea el mismo que su inverso multiplicativo?

Haremos ver ahora que cada número complejo (a, b) se puede escribir en la forma $a + bi$, que es la llamada *forma rectangular* del número.

Teorema 8-6 Para cada $(a, b) \in C$, $(a, b) = a + bi$.

Demostración:

$(a, b) = (a + 0, b + 0)$	Postulado de la Identidad aditiva de los números reales
$= (a + 0, 0 + b)$	(¿Por qué?)
$= (a, 0) + (0, b)$	Definición de suma de números complejos
$= a + (0, b)$	Convenio sobre la notación

$= a + b \cdot (0, 1)$ $\qquad k \cdot (a, b) = (ka, kb)$

$= a + bi$ $\qquad$ Sustitución de i por $(0, 1)$

Ejemplo (a) $(7, 4) = 7 + 4i$.

Ejemplo (b) $(\pi, \sqrt{3}) = \pi + i\sqrt{3}$. Podíamos haber escrito $\pi + \sqrt{3}\, i$ pero es muy fácil confundir la expresión $\sqrt{3}\, i$ con $\sqrt{3i}$. Por ello es más seguro escribir $i\sqrt{3}$.

Ejemplo (c) $(3, -2)$ se puede poner como $3 + (-2)i$.

Ejemplo (d) $(0, 3)$ se puede escribir como $0 + 3i$ o como $3i$.

Ejemplo (e) $(2, 0)$ se puede escribir como $2 + 0 \cdot i$ o como 2.

Es fácil reenunciar las definiciones y resultados de las secciones anteriores de este capítulo en la notación $a + bi$. Así, por ejemplo, tenemos

El conjunto C de los números complejos

$C = \{a + bi | a, b \in R\}$

Definición de igualdad

$a + bi = c + di$ si, y solo si, $a = c$ y $b = d$

Definición de suma

$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Definición de multiplicación

$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Inverso aditivo

Para cada $z \in C$, $-z = -(a + bi) = -a + (-b)i$.

Si $b = 0$ el número complejo $a + bi$ se reduce a $a + 0 \cdot i$. Puesto que $a = a + 0 \cdot i$, se puede afirmar que cada número real a se puede remplazar por un número complejo escrito en forma rectangular. Por otra parte, si $a = 0$ y $b \neq 0$, $a + bi$ se convierte en $0 + bi$. El número $0 + bi$ se escribe usualmente bi y se llama *número imaginario puro*. Dado un número complejo $a + bi$, es costumbre llamar a a la *parte real* y a b la *parte imaginaria* del número. Los adjetivos *complejo* e *imaginario* son bastante desafortunados. Reflejan el hecho de que por más de doscientos años los números complejos se usaron con reservas suponiéndolos sin significado, imposibles, ficticios o imaginarios y se tendió un bloqueo psicológico contra la aceptación de dichos números. En realidad, los números complejos no son más imaginarios que los números reales y, de hecho, han demostrado ser indispensables en el desarrollo de la matemática moderna.

Una ventaja de escribir los números complejos en forma rectangular es que la suma y la multiplicación se pueden efectuar sin referirse a las definiciones en términos de pares ordenados. Puesto que el sistema de los números complejos es un campo, podemos usar las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva de la suma y la multiplicación y efectuar las operaciones exactamente como si estuviésemos trabajando con expresiones que representasen números reales. Por supuesto, que siempre que sea posible, simplificaremos expresiones de la forma i^n, $n \geq 2$, sustituyéndolas por 1, -1, i o $-i$.

Ejemplo (f) Hallar el producto de $(2, -3)$ y $(-1, 4)$.

Solución: Escribiremos primero los números dados en forma rectangular:

$(2, -3) = 2 + (-3)i$ y $(-1, 4) = -1 + 4i$

Entonces

$(2+(-3)i)\cdot(-1+4i)$

$= -2+3i+8i+(-12)i^2$ Multiplicación como binomios reales

$= -2+3i+8i+12$ Sustitución de $i^2 = -1$

$= 10+11i$ Simplificación como expresiones que representan números reales

De ahí que el producto de $(2, -3)$ y $(-1, 4)$ se puede escribir como $10 + 11i$ o como $(10, 11)$.

El estudiante debe usar la definición de multiplicación en términos de parejas ordenadas para comprobar el cálculo.

8-7 RESTA DE NUMEROS COMPLEJOS

En el conjunto de los números reales definimos la resta en términos de la suma. Hicimos notar que la resta era una operación binaria en R y que para toda $x, y \in R$

$x - y = x + (-y)$

No habríamos tenido problema en seguir el mismo procedimiento en el conjunto de los números complejos. Sin embargo, utilizaremos el resultado final anterior como modelo para la *definición* de la diferencia de dos complejos.

Definición Para cada par de números complejos z_1 y z_2,

$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$

$z_1 - z_2$ se llama *diferencia* de z_1 y z_2.

El estudiante debe convencerse de que la resta es una operación binaria sobre el conjunto de los números complejos; es decir, debe demostrar que $z_1 - z_2$ es un número complejo único.

Supóngase que $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$. Entonces

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (a+bi)-(c+di) \\ &= (a+bi)+[-(c+di)] \\ &= (a+bi)+(-c+(-d)i) \\ &= (a+(-c))+(b+(-d))i \\ &= (a-c)+(b-d)i \end{aligned}$$

En consecuencia, para restar un número complejo de otro solo necesitamos encontrar la diferencia de sus partes reales y la diferencia de sus partes imaginarias.

Ejemplo (a) Restar $(-5 + 3i)$ de $(2 + 5i)$.

Solución:

$$\begin{aligned} (-5+3i)-(2+5i) &= (-5-2)+(3-5)i \\ &= -7+(-2)i \end{aligned}$$

Notemos que nuestra definición de resta nos permite escribir expresiones tales como $-7 + (-2)i$ en una forma más simple.

$$\begin{aligned}-7-2i &= (-7+0\cdot i)-(0+2i)\\ &= (-7-0)+(0-2)i\\ &= -7+(-2)i\end{aligned}$$

De ahí que podemos escribir $-7 + (-2)i = -7 - 2i$. En general,

$$a + (-b)i = a - bi$$

Otro resultado importante de esta definición es que podemos continuar tratando los complejos como si fuesen polinomios sobre los reales.

Ejemplo (b) Desarrollar $(2 - 3i)^3$ y reducir el resultado a la forma $a + bi$.

Solución:

$$\begin{aligned}(2-3i)^3 &= 2^3+3\cdot 2^2(-3i)+3\cdot 2(-3i)^2+(-3i)^3\\ &= 8-36i+54i^2-27i^3\\ &= 8-36i+54(-1)-27(-i)\\ &= 8-36i-54+27i\\ &= -46-9i\end{aligned}$$

8-8 DIVISION DE NUMEROS COMPLEJOS

Al igual que en el caso de la resta, la definición de división está motivada por un teorema sobre los números reales.

Definición Para cada par de números complejos z_1 y z_2, $z_2 \neq 0$

$$z_1 \div z_2 = \frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$$

$z_1 \div z_2$ o $\frac{z_1}{z_2}$ se llama *cociente* de z_1 y z_2.

Dado que para toda $z_2 \neq 0$, $\frac{1}{z_2}$ es un número complejo único y puesto que la multiplicación es una operación binaria sobre C, se concluye de manera inmediata que la división (excepto entre 0) siempre es posible y da un resultado único. Si $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di \neq 0$, entonces el cociente $z_1 \div z_2 = \frac{z_1}{z_2}$ se puede escribir

$$\frac{a+bi}{c+di} = (a+bi)\cdot\frac{1}{c+di} \qquad \text{Por la definición anterior}$$

$$= (a+bi)\cdot\left[\frac{c}{c^2+d^2}+\left(-\frac{d}{c^2+d^2}\right)i\right] \qquad \text{Se usa el resultado del Teorema 8-5, escrito en forma rectangular}$$

$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i \qquad \text{Definición de multiplicación}$$

Aunque este resultado nos da una regla que se puede usar para dividir un complejo entre otro, no se intenta que el estudiante memorice esta fórmula. Hay un enfoque mucho más simple del problema, basado en la importante propiedad de los números complejos que sigue:

Teorema 8-7 Para toda $x, y, z \in C$, si $y, z \neq 0$, entonces $\frac{xz}{yz} = \frac{x}{y}$.

Esta propiedad quedó demostrada para números reales x, y y z en la página 69 y es una consecuencia directa de las propiedades de cuerpo del sistema de los números reales. Como el sistema de los números complejos es un cuerpo, la misma demostración vale para números complejos x, y y z.

Antes de aplicar el Teorema 8-7 al problema de dividir un complejo entre otro, necesitamos introducir una noción adicional.

Definición El *conjugado* del número complejo $a + bi$ es el número complejo $a + (-b)i$. Ya que $a + (-b)i = a - bi$, el conjugado de $a + bi$ se puede escribir como $a - bi$. El conjugado del número complejo z se representa por $\bar{z}$.

Por ejemplo, el conjugado de $2 - 3i$ es $2 + 3i$ y si $z = -5 + 7i$, entonces $\bar{z} = -5 - 7i$.

Cada número complejo $c + di$ tiene un conjugado y es fácil comprobar que $(c + di)(c - di) = c^2 + d^2$

Según eso, el producto de cualquier complejo y su conjugado es un número real. Además, si $c + di \neq 0$, entonces $c \neq 0$ o $d \neq 0$. Por tanto, si $c + di \neq 0$, entonces tanto $c - di \neq 0$ como $c^2 + d^2 > 0$.

Consideremos ahora el problema de encontrar el cociente de $2 - 3i$ y $5 + 2i$.

$\frac{2-3i}{5+2i} = \frac{(2-3i)\cdot(5-2i)}{(5+2i)\cdot(5-2i)}$	Aplicación del Teorema 8-7, multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador
$= \frac{(10-6)+(-15-4)i}{25+4}$	Multiplicación como con binomios reales
$= \frac{4+(-19)i}{29}$	Simplificación
$= [4+(-19)i]\cdot\left(\frac{1}{29}\right)$	Definición de división
$= 4\cdot\frac{1}{29} + [(-19)i]\cdot\frac{1}{29}$	Propiedad distributiva
$= \frac{4}{29} + \frac{(-19)i}{29}$	Definición de división
$= \frac{4}{29} - \frac{19i}{29}$	$a + (-b)i = a - bi$

Por supuesto que en la práctica no necesita el estudiante mostrar todos estos pasos, sino proceder como en el ejemplo siguiente.

Ejemplo Dividir $1 + 2i$ entre $3 - i$ y expresar el resultado en la forma $a + bi$.

Solución:

$$\frac{1+2i}{3-i} = \frac{(1+2i)\cdot(3+i)}{(3-i)\cdot(3+i)}$$
$$= \frac{(3-2)+(6+1)i}{9+1}$$
$$= \frac{1+7i}{10}$$
$$= \frac{1}{10} + \frac{7}{10}i$$

8-2 Ejercicios

En los Ejercicios del 1 al 6, hallar los valores de m y n, en donde $m, n \in R$, que hacen verdadera la proposición dada.

1. $2m + ni = 4 - 4i$
2. $3m + ni = 0$
3. $(4m + n) + (m - n)i = 5$
4. $(3m - 4n) + (2m + n)i = 2i$
5. $(3 + 2i) + (m - 4ni) = 3 - 2i$
6. $(m - 3i) - (4 + ni) = 0$

En los Ejercicios del 7 al 18, indicar si la proposición dada es verdadera o falsa.

7. $\dfrac{1}{6i} = -\dfrac{i}{6}$
8. $(6 + 4i) \div 2 = 3 + 2i$
9. $z \div \bar{z} = -1, z \neq 0$
10. $(-i)^2 = -1$
11. Para todo $a + bi \in C$, $\dfrac{a + bi}{a + bi} = 1$
12. $z \div (-z) = -1, z \neq 0$
13. $(3 + 4i) \div (1 + 0 \cdot i) = 3 + 4i$
14. $\dfrac{1}{i} = -i$
15. $i^{27} = i^{31}$
16. Si $z = 4$, entonces $\bar{z} = 4$
17. $\dfrac{1 + i}{1 - i} = -1$
18. Si $z = a + bi$, entonces $z + \bar{z} = 2a$

Efectuar las operaciones indicadas en los Ejercicios del 19 al 44 y expresar el resultado en forma rectangular.

19. $2(3 + 6i) + 3(2 - i)$
20. $(3 - i) + 6i - 4(2 + 3i)$
21. $(3\sqrt{2} + 5i) - (4\sqrt{2} - i)$
22. $(7 - 2i) - (7 + 2i)$
23. $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\sqrt{3}\right) + \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)$
24. $3 + 4i(2 - i)$
25. $4i + 2(3 - 2i) - i(1 - i)$
26. $(\sqrt{5} - i) \cdot (\sqrt{5} + i)$
27. $(1 + i\sqrt{3}) \cdot (1 - i\sqrt{3})$
28. $(12 + 5i) \cdot \left(\dfrac{12}{13} - \dfrac{5}{13}i\right)$
29. $(3 - 4i) \cdot (4 + i) \cdot \left(\dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}i\right)$
30. $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)^3$
31. $(1 + i)^3$
32. $(3 - 2i) \cdot i^2$
33. $i \cdot (2 - 3i)^2$
34. $1 \div (2 - i)$
35. $(2 - i) \div 4$
36. $\dfrac{2 - i}{i}$
37. $\dfrac{\sqrt{3} - i}{3 + i\sqrt{3}}$
38. $\dfrac{i}{1 + i}$
39. $\dfrac{5i}{1 + 2i}$
40. $\dfrac{6}{i^6 - i^7}$
41. $\dfrac{(1 - i)^2}{1 + i}$
42. $\dfrac{a}{c + di}, c + di \neq 0$
43. $\dfrac{4}{1 + i} - \dfrac{2}{1 - i}$
44. $\dfrac{2i}{2 - i} + \dfrac{i}{1 - 2i}$
45. Sea el conjunto de los números complejos el conjunto satisfactor para x y sea f una función definida por la ecuación

    $f(x) = x^2 - i$

    (a) Hallar $f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{i\sqrt{2}}{2}\right)$

    (b) Hallar $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{i\sqrt{2}}{2}\right)$

    (c) Hallar dos soluciones de la ecuación $x^2 - i = 0$.

Resolver para z las ecuaciones dadas en los Ejercicios del 46 al 51. $z \in C$. Expresar los resultados en forma rectangular.

46. $2z + 3i = z + (2 - i)$
47. $3z + 4i = 3 - 2i$
48. $z \cdot i + 2 = i$
49. $z \cdot (1 - i) = z + i$
50. $\dfrac{2z}{i} + 4i = 6$
51. $\dfrac{z}{1 - i} + \dfrac{2}{i} = 3$
52. Dar la expresión más simple de cada una de las siguientes.

    (a) i^{31} (c) $i^{4n+1}, n \in N$

    (b) i^{21} (d) $i^{4n+16}, n \in N$
53. Si $z = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}i$, hallar

    (a) z^2 (c) z^6 (e) z^{24}

    (b) z^3 (d) z^{12}

54. ¿Con respecto a qué operaciones es cerrado el conjunto $\{i, -i, 1, -1\}$?
(a) Suma (c) Resta
(b) Multiplicación (d) División

55. ¿Bajo qué condiciones es $a + bi = a - bi$?

56. (a) Dar los conjugados de $a + bi$ y $c + di$ y hallar la suma de ellos.
(b) Sumar $a + bi$ con $c + di$ y hallar el conjugado de la suma.
(c) ¿Cómo es la suma de los conjugados de dos números complejos con respecto al conjugado de su suma?

57. Demostrar que para toda $z_1, z_2 \in C, \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_1 \cdot z_2}$. (*Sugerencia*: Sea $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$. Usar luego el método delineado en el Ejercicio 56.)

8-9 RAICES CUADRADAS QUE SON NUMEROS COMPLEJOS

Puesto que $i^2 = -1$ y $(-i)^2 = (-1 \cdot i)^2 = (-1)^2 \cdot (i)^2 = 1 \cdot i^2 = -1$, es razonable decir que i y $-i$ son raíces cuadradas de -1 y poner

$$i = \sqrt{-1} \quad \text{y} \quad -i = -\sqrt{-1}$$

Similarmente, $(i\sqrt{2})^2 = i^2 \cdot 2 = -2$ y $(-i\sqrt{2})^2 = (-i)^2 \cdot (\sqrt{2})^2 = i^2 \cdot 2 = -2$. Luego tanto $i\sqrt{2}$ como $-i\sqrt{2}$ se dice que son raíces cuadradas de -2.

Ahora bien, sea x un número real positivo. El número complejo $i\sqrt{x}$ es una raíz cuadrada de $-x$ puesto que $(i\sqrt{x})^2 = i^2 \cdot x = -x$. Además, ya que $(-i\sqrt{x})^2 = (-i)^2 \cdot (\sqrt{x})^2 = i^2 \cdot x = -x$, $-i\sqrt{x}$ es también una raíz cuadrada de $-x$. Hay dos raíces cuadradas de $-x$ y una es el inverso aditivo de la otra.

Definición Para cualquier número real $x > 0$, las dos raíces cuadradas de $-x$ son $i\sqrt{x}$ y $-i\sqrt{x}$.

Ejemplo (a) **Hallar las dos raíces cuadradas de -9.**

Solución: Una de las raíces cuadradas de -9 es $i\sqrt{9} = 3i$. La otra raíz cuadrada de -9 es $-i\sqrt{9} = -3i$.

Ejemplo (b) **Si $x \in C$, hallar el conjunto de verdad de la ecuación $x^2 = -4$.**

Solución: Hagámonos esta pregunta: ¿Qué número complejo al elevarse al cuadrado da -4? La respuesta es, por supuesto, las raíces cuadradas de -4. Por tanto, el conjunto solución de la ecuación dada es $\{2i, -2i\}$.

Para todo número real positivo x, definíamos el número $\sqrt{x}$ como la raíz cuadrada principal o positiva de x. Como los números complejos no se pueden clasificar como positivos o negativos, no llamaremos ni a $i\sqrt{x}$ ni a $-i\sqrt{x}$ raíz cuadrada principal de $-x$, $x > 0$. Sin embargo, convendremos en lo siguiente sobre la notación:

Convenio Para cada número real $x > 0$,

$$\sqrt{-x} = i\sqrt{x} \quad \text{y} \quad -\sqrt{-x} = -i\sqrt{x}$$

Ejemplo (c) $\sqrt{-7} = i\sqrt{7}$ y $-\sqrt{-7} = -i\sqrt{7}$.

El estudiante que ha aprendido a trabajar con expresiones radicales no debe encontrar dificultad en realizar operaciones similares con expresiones que contengan raíces cuadradas de números negativos. Sin embargo, debe ser cuidadoso al aplicar la definición anterior y el convenio sobre la notación.

Ejemplo (d) Simplificar $\sqrt{-32}$.

Solución: $\sqrt{-32} = i\sqrt{32} = i\sqrt{16 \cdot 2} = i \cdot 4\sqrt{2} = 4i\sqrt{2}$.

Ejemplo (e) Simplificar $-\sqrt{-300}$.

Solución: $-\sqrt{-300} = -i\sqrt{300} = -i\sqrt{100 \cdot 3} = -10i\sqrt{3}$.

Ejemplo (f) Hallar el producto de $\sqrt{-9}$ y $\sqrt{-4}$.

Solución: $\sqrt{-9} \cdot \sqrt{-4} = (i\sqrt{9}) \cdot (i\sqrt{4}) = (3i) \cdot (2i) = 6i^2 = -6$.

Notemos que

$\sqrt{-9} \cdot \sqrt{-4} \neq \sqrt{(-9) \cdot (-4)}$

ya que

$\sqrt{-9} \cdot \sqrt{-4} = -6$

en tanto que

$\sqrt{(-9)(-4)} = \sqrt{36} = 6$

En general, si $x > 0$ y $y > 0$, entonces

$\sqrt{-x}\,\sqrt{-y} \neq \sqrt{(-x)(-y)}$

Para evitar dificultades con problemas como los anteriores, debe el estudiante escribir todos los factores de la forma $\sqrt{-x}$, $x > 0$, como $i\sqrt{x}$ antes de multiplicar o dividir.

Ejemplo (g) Efectuar las operaciones indicadas y escribir los resultados en la forma $a + bi$.

$\sqrt{-12} + \sqrt[3]{-8} + \sqrt{-3}$

Solución:

$$\begin{aligned}\sqrt{-12} + \sqrt[3]{-8} + \sqrt{-3} &= i\sqrt{12} + (-2) + i\sqrt{3}\\ &= 2i\sqrt{3} - 2 + i\sqrt{3}\\ &= -2 + 3i\sqrt{3}\end{aligned}$$

Ejemplo (h) Si $x \in C$, hallar el conjunto solución de la ecuación $(x - 1)^2 + 5 = 0$.

Solución:

$(x-1)^2 + 5 = 0$

$(x-1)^2 = -5$

Luego,

$x - 1 = i\sqrt{5}$ o $x - 1 = -i\sqrt{5}$

y

$x = 1 + i\sqrt{5}$ o $x = 1 - i\sqrt{5}$

El conjunto solución es

$\{1 + i\sqrt{5}, 1 - i\sqrt{5}\}$

8-10 UN MODELO GEOMETRICO PARA C: EL PLANO COMPLEJO

Como mencionamos antes, llevó más de doscientos años el que los matemáticos aceptaran completamente el concepto de número complejo como algo lógicamente ortodoxo. Aunque dichos números fueron analizados en un libro de álgebra,

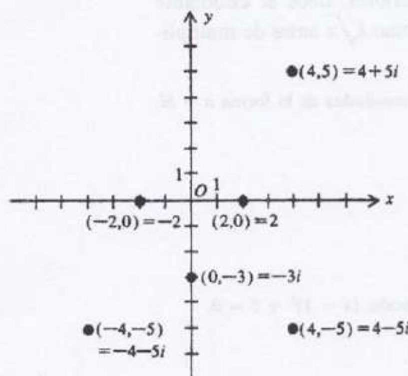
publicado en 1572, no fue sino hasta alrededor de 1800 cuando se les dio una interpretación geométrica, que estos entes «místicos» o «imaginarios» fueron entendidos como objetos cuya existencia podía ser justificada plenamente.

La idea de representar geométricamente un número complejo es realmente muy simple. En el Capítulo 6 establecimos una correspondencia uno a uno entre el conjunto de los pares ordenados de números reales y el de los puntos del plano cartesiano. Similarmente, los números complejos se pueden equiparar uno a uno con los puntos del plano de acuerdo con el esquema

Número complejo		*Punto del plano*
$(a, b) = a + bi$	$\leftrightarrow$	$P(a, b)$

Por tanto, cada número complejo $(a, b) = a + bi$ corresponde a un punto único del plano cuyas coordenadas son $x = a$ y $y = b$. Recíprocamente, cada punto $P(m, n)$ del plano corresponde al número único $m + ni$.

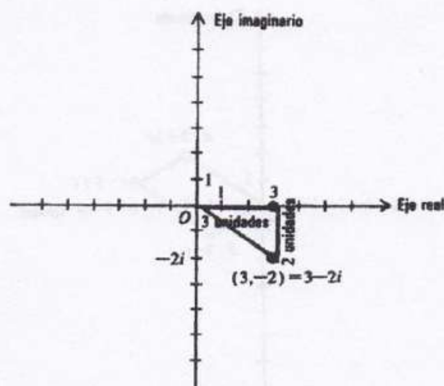
El plano completo en el que cada punto se usa para representar un número complejo se conoce con el nombre de *plano complejo*. El punto $P(a, b)$ se llama *gráfica* del número complejo $(a, b) = a + bi$. En la figura se muestran las gráficas de los números complejos $4 + 5i$, $4 - 5i$, $-4 - 5i$, $2 + 0 \cdot i$, $-2 + 0 \cdot i$ y $0 - 3i$.



El número real a se ha identificado con el número complejo $(a, 0) = a + 0 \cdot i$. Notemos que la gráfica de cada número complejo $(a, 0)$ debe ser un punto del eje x. Similarmente, cada número imaginario puro $(0, b) = bi$ corresponde a un punto del eje y. Por eso es que en el plano complejo, con frecuencia al eje x se le llama *eje de los reales*, en tanto que el eje y se denomina *eje de los imaginarios*.

Consideremos ahora la gráfica del número complejo $(3, -2) = 3 - 2i$. La distancia desde el origen hasta el punto $(3, -2)$ se llama *valor absoluto* de $3 - 2i$ y se representa por $|3 - 2i|$. Notemos que los puntos $(0, 0)$, $(3, 0)$ y $(3, -2)$ son los vértices de un triángulo rectángulo. De ahí que, según el teorema de Pitágoras, la distancia de $(0,0)$ hasta $(3, -2)$ sea $\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$. En general, adoptaremos la definición siguiente.

Definición Para toda $z \in C$, si $z = (a, b) = a + bi$, entonces el *valor absoluto* de z, que se denota por $|z| = |a + bi|$, es $\sqrt{a^2 + b^2}$.



Nótese que para toda $a, b \in R$, $\sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$. De ahí que el valor absoluto de $a + bi$ nunca será negativo. Debe notarse también que la definición de valor absoluto para los números reales concuerda con esta definición.* Es decir, que si $b = 0$, entonces $a + bi = a$ y que

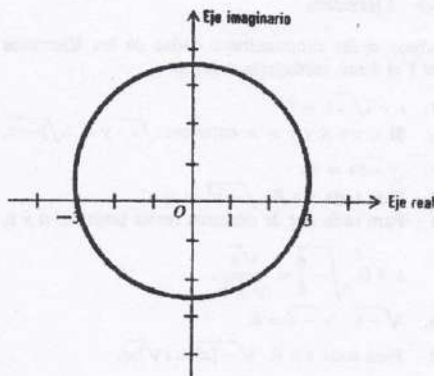
$$\begin{aligned} |a + bi| &= |a + 0 \cdot i| \\ &= \sqrt{a^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{a^2} = |a| \end{aligned}$$

Recuérdese que el valor absoluto de un número real a se interpreta como la distancia sobre la recta numérica, desde el origen hasta el punto $P(a)$. Es claro que esta interpretación se ha trasladado al plano complejo.

Ejemplo (a) Graficar el conjunto verdad de la ecuación

$|z| = 3, \ z \in C.$

Solución: El conjunto verdad de esta ecuación es el de los números complejos $z = x + yi$ cuyas gráficas estén a tres unidades del origen. La gráfica de este conjunto es un círculo con centro en el origen y radio 3.

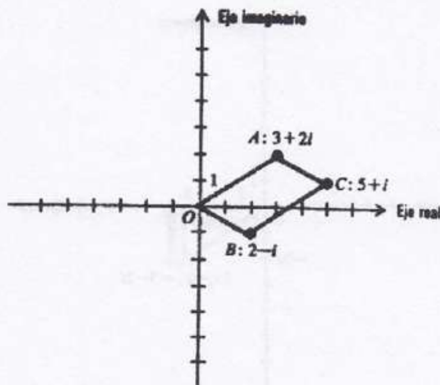


Una vez establecida la idea de la representación de un número complejo como un punto del plano complejo, no fue difícil para los matemáticos dar interpretaciones geométricas de la suma, resta, multiplicación y división.

* Véanse las Secciones 3-9 y 3-10.

Ejemplo (b) Hallar un método geométrico para obtener la suma de $3 + 2i$ y $2 - i$.

Solución: Si graficamos los números dados y su suma $(3 + 2i) + (2 - i) = 5 + i$, obtenemos los puntos $A(3, 2)$, $B(2, -1)$ y $C(5, 1)$ que aparecen en la figura que acompaña. Si ahora trazamos los segmentos que unen los puntos A y B con el origen y con C, obtenemos el paralelogramo $OACB$. Según eso, para obtener la suma de $3 + 2i$ con $2 - i$, simplemente necesitamos graficar los puntos $A(3, 2)$ y $B(2, -1)$ y en seguida completar el paralelogramo, tres de cuyos vértices son el origen y los puntos A y B. El cuarto vértice es la gráfica de la suma deseada.



El Ejemplo (b) ilustra la *ley del paralelogramo* para la suma geométrica de números complejos.

Ejemplo (c) Indicar cómo se pueden usar los métodos gráficos para obtener la diferencia siguiente:

$(6 + 9i) - (-4 + 2i)$

Solución: Ya que

$$(6 + 9i) - (-4 + 2i) = (6 + 9i) + [-(-4 + 2i)] = (6 + 9i) + (4 - 2i)$$

la diferencia buscada se puede encontrar mediante la ley del paralelogramo, descrita en el Ejemplo (b), para encontrar la suma de $6 + 9i$ con $4 - 2i$.

8-3 Ejercicios

Indicar si las proposiciones dadas en los Ejercicios del 1 al 8 son verdaderas o falsas.

1. $i + \sqrt{-1} = 0$.
2. Si $x, y \in R$ y $y > x$, entonces $\sqrt{x-y} = i\sqrt{y-x}$.
3. $\sqrt[3]{-64} = 4i$.
4. Para toda $x \in R$, $\sqrt{-x^2} = i|x|$.
5. Para cada par de números reales positivos a y b, $b \neq 0$, $\sqrt{-\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}}$.
6. $\sqrt{-6} \cdot \sqrt{-6} = 6$.
7. Para toda $x \in R$, $\sqrt{-|x|} = i\sqrt{|x|}$.
8. $1, -1, i$ y $-i$ son raíces cuartas de 1.

En los Ejercicios del 9 al 24, expresar los números dados en una de las formas $a\sqrt{x}$, $-a\sqrt{x}$, $ai\sqrt{x}$ o $-ai\sqrt{x}$, en donde a es un número real positivo y x es un número natural que no contiene ningún factor que sea un cuadrado perfecto.

9. $-\sqrt{-32}$
10. $\sqrt{-50}$
11. $-\sqrt{8}$
12. $\sqrt{-5} \cdot \sqrt{-10}$
13. $(-\sqrt{-5})\sqrt{10}$
14. $\sqrt{-32} + \sqrt{-8}$
15. $3\sqrt{-12}$
16. $-2\sqrt{-18}$
17. $\sqrt{-50} + 2\sqrt{-32}$
18. $\sqrt{-3} - 2\sqrt{-48}$
19. $\dfrac{\sqrt{-10}}{\sqrt{5}}$
20. $\sqrt{\dfrac{-10}{5}}$
21. $\dfrac{3}{\sqrt{-2}}$
22. $\dfrac{\sqrt{-28} + \sqrt{-7} - \sqrt{-63}}{\sqrt{3}}$

23. $\sqrt{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}$
24. $\sqrt{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}$

Efectuar las operaciones indicadas en los Ejercicios del 25 al 38 y reducir las respuestas a la forma rectangular.

25. $1-\sqrt{-5}$
26. $2i+\sqrt[3]{-32}$
27. $\sqrt{27}+\sqrt{-27}$
28. $\sqrt{12}-\sqrt{-8}-\sqrt{-18}$
29. $\sqrt{2}(\sqrt{-8}+\sqrt{2})$
30. $\sqrt{-3}(\sqrt{-3}+\sqrt{6})$
31. $(\sqrt{2}-\sqrt{-3})^2$
32. $(\sqrt{2}-\sqrt{-3})\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{-3})$
33. $(\sqrt{-2}+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{-2}-\sqrt{3})$
34. $(\sqrt{-4}+\sqrt{-2})^2$
35. $(\sqrt{-25}+\sqrt{-4}-\sqrt{-36})^2$
36. $\dfrac{3}{\sqrt{-1}+\sqrt{-2}}$
37. $\dfrac{\sqrt{-1}-1}{\sqrt{-1}+1}$
38. $\dfrac{1+\sqrt{9}}{1-\sqrt{-9}}$

En cada uno de los Ejercicios del 39 al 46, hallar el conjunto solución de la ecuación dada. $x\in C$. Presentar todas las soluciones en forma rectangular.

39. $x^2=-25$
40. $x^2+7=0$
41. $(x-3)\cdot(x+3)=5$
42. $(x-3)^2=4$
43. $(x-3)^2=-4$
44. $x^2+2x+1=-4$
45. $\dfrac{1}{x-4}=-\dfrac{x-4}{4}$
46. $\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x-1}=1$

47. ¿Qué restricción debe imponerse a x para que $\sqrt{x-1}=i\sqrt{x-1}$?

48. Un estudiante expuso la siguiente «demostración» de que $1=-1$. Encontrar su error.

$$\frac{1}{-1}=\frac{-1}{1}$$
$$\to\sqrt{\frac{1}{-1}}=\sqrt{\frac{-1}{1}}$$
$$\to\frac{1}{\sqrt{-1}}=\frac{\sqrt{-1}}{1}$$
$$\to\quad\frac{1}{i}=\frac{i}{1}$$
$$\to\quad 1=\frac{i}{1}\cdot i$$
$$\to\quad 1=i\cdot i$$
$$\to\quad 1=i^2$$
$$\to\quad 1=-1$$

49. En estudios posteriores de matemática, verá el estudiante que cada número complejo (y, consecuentemente, cada número real) tiene exactamente n raíces n-ésimas *diferentes* en el conjunto de los números complejos. Por ejemplo, 1 tiene cinco raíces quintas diferentes y $1+i$ tiene exactamente cuatro raíces cuartas diferentes.
(a) Hallar las cuatro distintas raíces cuartas de 16.
(b) Hallar las cuatro distintas raíces cuartas de 100.

50. Graficar cada uno de los números siguientes en el plano complejo.

(a) $2+i$ (d) -6
(b) $-2-i$ (e) $4+i\sqrt{2}$
(c) $3i$ (f) $-7i$

En los Ejercicios 51 al 57, hallar el valor absoluto indicado.

51. $|1-i\sqrt{2}|$
52. $|-\sqrt{2}+i\sqrt{2}|$
53. $|-3-4i|$
54. $|3+4i|$
55. $|-6i|$
56. $|bi|, b\in R$
57. $|-\sqrt{5}+0\cdot i|$

58. Sean $z_1=a+bi$ y $z_2=c+di$.
(a) Demostrar que $|z_1|=|-z_1|$.
(b) Demostrar que $|z_1|=|\overline{z_1}|$.
(c) Demostrar que $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$.
(d) Demostrar que $\sqrt{z_1\cdot\overline{z_1}}=|z_1|$.

59. Puesto que los valores absolutos son números reales, sí pueden ser ordenados. En cada uno de los casos siguientes, sustituir la coma por el símbolo apropiado: $<, =, >$.

(a) $|3i+2i|, |3i|+|2i|$.
(b) $|(1-i)+(-1+2i)|, |1-i|+|-1+2i|$.

60. Sean $z_1=a+bi$ y $z_2=c+di$ y supóngase que $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}, a, b, c, d\neq 0$.

(a) ¿Qué se puede decir acerca de las gráficas de z_1 y z_2?

(b) ¿Se puede usar la ley del paralelogramo para encontrar la suma de z_1 y z_2?

(c) ¿Puede el estudiante describir un método gráfico para encontrar $z_1 + z_2$?

61. Sea $z_1 = a + bi$, $b \neq 0$.

(a) ¿Cómo se relaciona la gráfica de z con la de $\bar{z}$?

(b) ¿Cómo se relaciona la gráfica de z con la de $-z$?

(c) ¿Dónde queda la gráfica de $z + \bar{z}$?

(d) ¿Cuál es la localización de la gráfica de $z + (-z)$?

62. Utilizar los métodos gráficos para efectuar las operaciones indicadas.

(a) $(2 + 0 \cdot i) + (0 + 6i)$

(b) $(1 - i) - (4 + 2i)$

(c) $4 - (3 + i)$

(d) $(2 + 3i) + (4 - 2i)$ (*Sugerencia*: Véase el

(e) $(3 + 2i) - (6 + 4i)$ Ejercicio 60.)

63. Trazar la gráfica en cada uno de los siguientes casos. $z \in C$.

(a) $|z| = 2$

(b) $|z| \geq 2$

(c) $|z| \leq 2$

(d) $\{z \in C \mid$ la parte imaginaria de z es positiva$\}$

(e) $\{z \in C \mid$ la parte real de z es negativa$\}$

(f) $\{z \in C \mid |z| = 3$ y la parte imaginaria de z es negativa$\}$

64. Sea $z = x + yi$.

(a) Expresar $|z + 1|$ en términos de x y y.

(b) Expresar $|z - 1|$ en términos de x y y.

(c) ¿Qué debe ser cierto para x si $|z + 1| = |z - 1|$?

(d) Trazar la gráfica del conjunto verdad de la ecuación $|z + 1| = |z - 1|$.

65. Como mencionábamos en la Sección 8-10, los métodos gráficos también se pueden utilizar para obtener productos y cocientes. Aunque no es práctico analizar el caso general hasta que se haya estudiado algo de trigonometría, en este problema investigaremos un caso particular interesante.

(a) Trazar la gráfica de $2 + 0 \cdot i = 2$. Marcar este punto con A.

(b) Trazar la gráfica de $i(2 + 0 \cdot i) = 2i$. Marcar este punto con B.

(c) Notar que el punto A se puede hacer coincidir con el punto B mediante un simple giro de 90° del segmento OA. Ahora, sea $z = a + bi$. Describir un método para localizar la gráfica de $i \cdot z$.

(d) Probar la respuesta de la parte (c) haciendo las gráficas de $2 + 3i$ y $i \cdot (2 + 3i)$.

(e) Si la gráfica de $z = a + bi$ es el punto C, describir un método para localizar las gráficas de $i^2 \cdot z$ y $i^3 \cdot z$.

(f) Si $z = a + bi$, ¿cómo se relaciona la gráfica de $i^4 \cdot z$ con la de z?

(g) Si $z = a + bi$, describir cómo se puede localizar la gráfica de $3i \cdot z$.

Ecuaciones cuadráticas 9

9-1 LA FORMA CANONICA DE LA ECUACION CUADRATICA EN UNA VARIABLE

En muchas aplicaciones de la matemática a las ciencias es necesario encontrar el conjunto solución de una ecuación cuadrática o determinar una o más propiedades de alguna función cuadrática. Este capítulo se dedica al estudio de tales problemas.

Cualquier ecuación equivalente a una de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

en la que a, b y c son constantes y $a \neq 0$, se llama *ecuación cuadrática* en la variable x. Aunque los coeficientes a, b y c se pueden seleccionar de cualquiera de nuestros sistemas numéricos, frecuentemente nos restringiremos al conjunto R de los números reales. En tales casos, la ecuación se llama *ecuación cuadrática real*. Según eso

$$3x^2 + 7x - 6 = 0 \quad \text{y} \quad x^2 + 1 = 0$$

son ecuaciones cuadráticas reales en x.

En general, al resolver una ecuación cuadrática, supondremos que el conjunto satisfactor de la variable es el conjunto C de los números complejos. Sin embargo, en algunos casos buscaremos la solución en algún subconjunto propio de C.

Cuando una ecuación cuadrática está dada en la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

o en la de una ecuación equivalente de esta forma, diremos que la ecuación está escrita en *forma canónica*. Por ejemplo, consideremos la ecuación

$$(2x + 1)^2 = x\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Haciendo uso de las propiedades de los números complejos y de la relación de igualdad, vemos que

$$(2x + 1)^2 = x\left(x + \frac{1}{2}\right) \leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 = x^2 + \frac{1}{2}x$$

$$\leftrightarrow 3x^2 + \frac{7}{2}x + 1 = 0$$

Esta última ecuación es equivalente a la ecuación dada y, además, está en forma canónica, en donde $a = 3$, $b = \frac{7}{2}$ y $c = 1$. Por supuesto, que si multiplicamos por 2 ambos lados de $3x^2 + \frac{7}{2}x + 1 = 0$, obtenemos otra ecuación equivalente, $6x^2 + 7x + 2 = 0$. Puesto que los coeficientes de esta ecuación son enteros, generalmente se considera que es una forma más conveniente de la ecuación dada.

Ejemplo Escribir la ecuación siguiente en forma canónica y determinar los valores de a, b y c.

$$4t^2 + 8t + (1 + i) = 2it + (1 + 5i)$$

Solución: Notemos que esta es una ecuación cuadrática en la variable t. Usando las propiedades de la igualdad y combinando términos semejantes obtenemos

$$4t^2 + (8 - 2i)t - 4i = 0$$

o

$$2t^2 + (4 - i)t - 2i = 0$$

Esto da la ecuación en forma canónica en la que $a = 2$, $b = 4 - i$ y $c = -2i$.

9-2 SOLUCION DE ECUACIONES CUADRATICAS POR FACTORIZACION

Recordemos que si $a, b, c \in R$ y $a \neq 0$ y si x no tiene un valor dado, entonces $ax^2 + bx + c$ se llama polinomio cuadrático sobre los reales. Del mismo modo, si los coeficientes a, b y c se toman del conjunto C de números complejos, se dice que $ax^2 + bx + c$ es un polinomio cuadrático sobre los complejos. Cuando se encuentran números complejos d, e, f y g tales que $ax^2 + bx + c = (dx + e)(fx + g)$, decimos que $ax^2 + bx + c$ está factorizada sobre los números complejos.

Si los factores complejos de $ax^2 + bx + c$ se pueden determinar mentalmente, el conjunto solución de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ es fácil de encontrar. Esto es cierto por las propiedades siguientes del sistema de los números complejos:

Teorema 9-1 Si $z_1, z_2 \in C$, entonces

$z_1 \cdot z_2 = 0$ si, y solo si, $z_1 = 0$ o $z_2 = 0$

Se señalaba en el Capítulo 8 que todo campo de números tiene esa propiedad y que la demostración del teorema anterior para los números complejos es idéntica a la demostración para números reales.

Ejemplo (a) Resolver la ecuación $2x^2 + 5x + 2 = 0$.

Solución:

$$2x^2 + 5x + 2 = 0$$

es equivalente a

$$(2x + 1)(x + 2) = 0$$

Sin embargo, según el Teorema 9-1,

$$(2x + 1)(x + 2) = 0$$

si, y solo si,

$$2x + 1 = 0 \quad \text{o} \quad x + 2 = 0$$

Al resolver estas ecuaciones lineales encontramos que

$$x = -\frac{1}{2} \quad \text{o} \quad x = -2$$

Esto significa que si $x = -\frac{1}{2}$ o si $x = -2$, entonces $2x^2 + 5x + 2 = 0$ y además que si sustituimos x por cualquier valor que no sea $-\frac{1}{2}$ o -2, $2x^2 + 5x + 2 \neq 0$. En consecuencia, debemos concluir que $\left\{-\frac{1}{2}, -2\right\}$ es el conjunto solución de la citada ecuación cuadrática.

Ejemplo (b) Resolver la ecuación $x^2 + 4 = 0$, factorizando su lado izquierdo.

Solución:

$$\begin{aligned} x^2 + 4 = 0 &\leftrightarrow x^2 + (-4)(-1) = 0 \\ &\leftrightarrow x^2 - 4i^2 = 0 \\ &\leftrightarrow (x + 2i)(x - 2i) = 0 \\ &\leftrightarrow x = -2i \quad \text{o} \quad x = 2i \end{aligned}$$

Por tanto, $\{-2i, 2i\}$ es el conjunto solución de $x^2 + 4 = 0$.

En la práctica, el método de factorización se usa muy raras veces para resolver una ecuación cuadrática, a menos que, cuando la ecuación esté escrita en forma canónica, el polinomio cuadrático correspondiente se pueda factorizar sobre los enteros.

Si el lado izquierdo de una ecuación cuadrática en forma canónica es el cuadrado de un binomio, su conjunto solución contiene solamente un número. Por ejemplo, puesto que

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \leftrightarrow x = 2$$

el conjunto solución de $x^2 - 4x + 4 = 0$ es $\{2\}$.

Ejemplo (c) Hallar el conjunto solución de

$$\frac{2x^2}{x-2} - 1 = \frac{2x+4}{x-2}$$

Solución: Dado que el mínimo común múltiplo de los denominadores es $x - 2$ y que $x - 2 = 0$ si, y solo si, $x = 2$, sabemos que 2 *no* es un satisfactor permitido para x. Con esto en mente, multiplicamos por $x - 2$ los dos lados de la ecuación dada y simplificando obtenemos

$$\begin{aligned} (x-2)\left[\frac{2x^2}{x-2} - 1\right] &= (x-2)\cdot\frac{2x+4}{x-2} \\ 2x^2 - (x-2) &= 2x + 4 \\ 2x^2 - x + 2 &= 2x + 4 \\ 2x^2 - 3x - 2 &= 0 \\ (2x+1)(x-2) &= 0 \end{aligned}$$

Si no se hubiesen impuesto restricciones a la variable, esta última ecuación implicaría que $x = -\frac{1}{2}$ o que $x = 2$. Pero x no debe ser sustituida por 2. Luego, el conjunto solución de la ecuación dada es $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

El estudiante debe observar cuidadosamente que la ecuación del Ejemplo (c) *no es una ecuación cuadrática*. Es decir, que la ecuación dada no es equivalente a $2x^2 - 3x - 2 = 0$ y que en cambio *sí* es equivalente a la conjunción de $2x^2 - 3x - 2 = 0$ y $x \neq 2$.

La misma técnica que se desarrolló para el análisis y solución de los proble-

mas verbales de la Sección 4-25, se puede aplicar a problemas verbales que se traduzcan a ecuaciones cuadráticas.

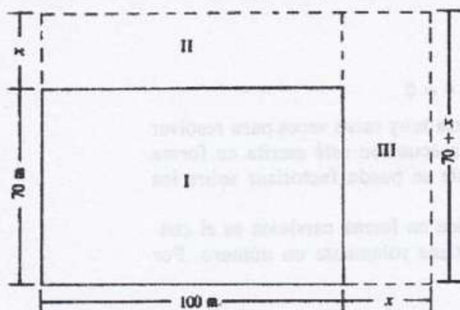
Ejemplo (d) Un patinadero mide 100 m de largo y 70 de ancho. El propietario desea aumentar su área a 13 000 m^2 agregando franjas de igual ancho a un lado y a un extremo y mantener su forma rectangular. Hallar el ancho de las franjas que deben añadirse.

Solución: Puesto que el ancho de las franjas es igual, estamos buscando solo un número.

Sea $x =$ al ancho de las franjas, expresado en metros.

Debemos ahora considerar que el nuevo patinadero está formado por tres piezas rectangulares: el patinadero original (I), la franja a lo largo de un lado (II) y la franja a lo largo de su extremo (III). Observemos que las áreas (en metros cuadrados) de estos tres rectángulos son

I: 7 000 II: $100x$ III: $(70 + x)x = 70x + x^2$



Luego el área del nuevo patinadero debe ser

$7\,000 + 100x + 70x + x^2 = x^2 + 170x + 7\,000$

Pero puesto que deseamos que esta nueva área sea 13 000 m^2, debemos tener también que

$x^2 + 170x + 7\,000 = 13\,000$

Si escribimos esta ecuación cuadrática en forma canónica y factorizamos el lado izquierdo, obtendremos

$x^2 + 170x - 6\,000 = 0$
$(x + 200)(x - 30) = 0$

se sigue de ahí que $\{-200, 30\}$ es el conjunto solución de la ecuación cuadrática. Sin embargo, hemos de rechazar al -200 como una solución posible a nuestro problema original. Si «agregamos» franjas de este ancho terminaríamos con un patinadero de dimensiones negativas, cosa que carecería de significado. Por tanto, nuestra única respuesta posible es 30 m.

Comprobación: Si el ancho de las franjas añadidas es 30 m, entonces el nuevo patinadero medirá 130 por 100 m, y su área será

130×100 o 13 000 m^2

9-1 Ejercicios

Hallar el conjunto solución de cada ecuación cuadrática de los Ejercicios del 1 al 18 por factorización.

1. $x^2 + 3x - 10 = 0$
2. $x(x-2) = 15$
3. $x^2 - 12 = x$
4. $4x^2 - 16ix = 0$
5. $9y^2 - 25 = 0$
6. $4y^2 + 4y + 1 = 0$
7. $25x^2 + 4 = 20x$
8. $15 - 7t - 4t^2 = 0$
9. $x^2 + (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$
10. $x^2 + (2 - i)x - 2i = 0$

11. $13x^2 - 30 = 6(1 + x)^2 + 63$
12. $(10x + 3)(x - 1) + 4 = 0$
13. $\dfrac{2}{y-1} = \dfrac{5}{3} + \dfrac{3}{2y+5}$
14. $\dfrac{10}{x^2} + \dfrac{29}{x} = 21$
15. $\dfrac{3}{x^2-1} - 1 = \dfrac{5x}{x-1}$
16. $\dfrac{3}{x-3} - \dfrac{1}{20} = \dfrac{3}{x}$
17. $\dfrac{1}{10} + \dfrac{6}{t+20} = \dfrac{5}{t}$
18. $3(t+2)(t-1) = (t+2)(t+3)$

En los Ejercicios del 19 al 24, usar la técnica de factorización para resolver para x cada ecuación.

19. $x^2 + (a - b)x - ab = 0$
20. $x^2 - kx - 2k^2 = 0$
21. $cx^2 + (a - bc)x = ab$
22. $12x^2 - 5xy - 3y^2 = 0$
23. $abx^2 + ab = x(a^2 + b^2)$
24. $x^2 + kx + 1 = kx^2 + 2x, k \neq 1$

Cada una de las ecuaciones dadas en los Ejercicios del 25 al 32 implica una cierta ecuación cuadrática. Es decir, que una solución de cualquiera de dichas ecuaciones es una solución de una ecuación cuadrática correspondiente. En cada caso, hallar el conjunto solución de la ecuación dada.

25. $\dfrac{t}{t+1} + \dfrac{2t}{4t-1} = -\dfrac{1}{t+1}$
26. $\dfrac{3t}{t+2} + \dfrac{2}{t} - \dfrac{5}{2} = 0$
27. $\dfrac{3x-5}{5} = 2 - \dfrac{6}{x+2}$
28. $\dfrac{x^2}{x^2-16} + 1 = \dfrac{x+2}{x+4}$
29. $\dfrac{y^2-6}{3-y} = y - \dfrac{y}{y-3}$
30. $\dfrac{x+2}{x-1} + \dfrac{6x}{1-x^2} = \dfrac{2x-1}{x+1}$
31. $\dfrac{2y-11}{y-8} + \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{5}{y-8}$
32. $\dfrac{x+1}{x+2} + \dfrac{x+1}{x} = 0$
33. Hemos visto que

    $(x - r)(x - s) = 0 \leftrightarrow x = r \text{ o } x = s$

    Así, pues, dado el conjunto de los números complejos $\{r, s\}$, sabemos que los elementos de dicho conjunto deben ser las soluciones de la ecuación

    $(x - r)(x - s) = 0$

    Utilizar esta idea para escribir ecuaciones cuadráticas que tengan los conjuntos solución siguientes. En cada caso, dar la respuesta en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con $a > 0$ y sin coeficiente fraccionarios.

    (a) $\{1, -2\}$ (d) $\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$
    (b) $\left\{6, -\dfrac{1}{2}\right\}$ (e) $\{1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}\}$
    (c) $\{2i, -3i\}$ (f) $\left\{\dfrac{1}{2} + i, \dfrac{1}{2} - i\right\}$

Aunque las ecuaciones dadas en los Ejercicios del 34 al 39 no son cuadráticas, sus conjuntos solución se pueden obtener por el método de factorización. Simplemente usaremos la propiedad siguiente de los números complejos:

$$x(yz) = 0 \leftrightarrow x = 0 \text{ o } yz = 0$$
$$\leftrightarrow x = 0 \text{ o } y = 0 \text{ o } z = 0$$

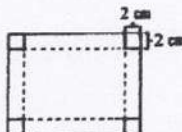
34. $x^2(x - 3) = 0$
35. $x^3 - 14x^2 - 51x = 0$
36. $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$
37. $x(x - 2)^2 - (x - 2)^2 = 0$
38. $x^3 - 3x^2 = 3x^2 - 9x$
39. $4x^4 + 4x^3 - x^2 - x = 0$

Usar una variable para resolver cada uno de los problemas verbales dados en los Ejercicios del 40 al 50.

40. Hallar dos números cuya suma sea 8 y cuyo producto sea -33.
41. Hallar un par de números que difieran en 3 y cuyo producto sea 108. ¿Hay un segundo par de números que satisfagan dicha condición? Si lo hay, encontrarlo.
42. Hallar dos enteros positivos consecutivos cuyo producto sea 210.
43. La suma de un número y su inverso multiplicativo es $\dfrac{13}{6}$. ¿Cuál es el número? ¿Existe un segundo número? Si lo hay, encontrarlo.
44. La suma de tres números positivos es 16. Hallar dichos números si el segundo es doble del cuadrado del primero y el tercero es triple del primero.
45. Hallar dos números reales cada uno de los cuales sea 56 unidades menos que su propio cuadrado.
46. El área de un rectángulo es 120 m^2. Su largo es 7 m mayor que su ancho. Hallar sus dimensiones.
47. ¿Cuáles son las dimensiones de un rectángulo que tiene un perímetro de 44 cm y un área de 85 cm^2?
48. La suma S de los primeros n enteros positivos, 1, 2, 3, . . . , n, está dada por la fórmula $S = \dfrac{1}{2}n(n+1)$. ¿Cuántos enteros consecutivos, empezando por 1, hay que sumar para que la suma sea 465?
49. La suma de los enteros consecutivos desde 4 hasta

n es 345. Utilizar la fórmula del Ejercicio 48 para encontrar n.

50. Se hace un corte cuadrado de 2 cm de largo en cada esquina de una pieza rectangular de hojalata, cuyo largo es 4 cm mayor que su ancho. Después los lados se voltean hacia arriba para formar una caja abierta (como en la figura). Si el volumen de la caja es de 192 cm³, ¿cuáles eran las dimensiones de la pieza original de hojalata?





9-3 SOLUCIONES DE ECUACIONES CUADRATICAS DE LA FORMA $(x + m)^2 = t$

Hasta ahora hemos usado solo el método de factorización para resolver ecuaciones cuadráticas. Lamentablemente, no siempre es fácil visualizar los factores de un polinomio cuadrático. Por ejemplo, es cierto que podemos poner

$$x^2 + 2x + 2 = [x - (-1 + i)][x - (-1 - i)]$$

y en consecuencia

$x^2 + 2x + 2 = 0$ tiene el conjunto solución $\{-1 + i, -1 - i\}$

Pero ¿cómo encontramos esos factores? Responderemos a esta pregunta en esta sección y en la siguiente, desarrollando métodos generales para encontrar el conjunto solución de cualquier ecuación cuadrática. Estos métodos estarán basados, en gran parte, en la siguiente propiedad del sistema de los números complejos.

Teorema 9-2 Si $m, n \in C$, entonces

$m^2 = n^2$ si, y solo si, $m = n$ o $m = -n$

Demostración:

$$\begin{aligned} m^2 = n^2 &\leftrightarrow m^2 - n^2 = 0 \\ &\leftrightarrow (m - n)(m + n) = 0 \\ &\leftrightarrow m - n = 0 \quad \text{o} \quad m + n = 0 \\ &\leftrightarrow m = n \quad \text{o} \quad m = -n \end{aligned}$$

Ahora, consideremos la ecuación cuadrática

$$(x + m)^2 = t$$

en donde m es cualquier número complejo y t es un número real. Dado que $(\sqrt{t})^2 = t$ para toda $t \in R$, se sigue que esta ecuación es equivalente a

$$(x + m)^2 = (\sqrt{t})^2$$

De ahí que, según el Teorema 9-2, esta última proposición es verdadera si, y solo si,

$$x + m = \sqrt{t} \quad \text{o} \quad x + m = -\sqrt{t}$$

Por tanto,

$$x = -m + \sqrt{t} \quad \text{o} \quad x = -m - \sqrt{t}$$

y la ecuación

$(x + m)^2 = t$ tiene como conjunto solución al conjunto $\{-m + \sqrt{t}, -m - \sqrt{t}\}$

Ejemplo (a) Hallar el conjunto solución de la ecuación cuadrática $4x^2 - 5 = 0$.

Solución: Ya que la ecuación dada es equivalente a

$$x^2 = \frac{5}{4}$$

tenemos que

$$x = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{o} \quad x = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Por tanto, el conjunto solución buscado es

$$\left\{\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$$

Ejemplo (b) Resolver la ecuación $(x + 2)^2 = -4$.

Solución: Puesto que

$$\begin{aligned}(x+2)^2 = -4 &\leftrightarrow x+2 = \sqrt{-4} \quad \text{o} \quad x+2 = -\sqrt{-4}\\ &\leftrightarrow x = -2+\sqrt{-4} \quad \text{o} \quad x = -2-\sqrt{-4}\\ &\leftrightarrow x = -2+2i \quad \text{o} \quad x = -2-2i\end{aligned}$$

Se concluye que el conjunto solución de la ecuación dada es

$$\{-2+2i, -2-2i\}$$

En el análisis anterior de la ecuación $(x + m)^2 = t$ exigíamos que t fuese un número real. La pregunta que surge de manera natural es: ¿Son válidos estos resultados si t es un número complejo no real? Aunque la respuesta a esta pregunta es *sí*, no habremos de demostrarlo. Simplemente aceptaremos el hecho de que para cada número complejo t, $t \neq 0$, existen exactamente dos números complejos, s y $-s$, tales que $s^2 = (-s)^2 = t$. Según esto, cada número complejo no nulo t tiene exactamente dos raíces cuadradas que representaremos por $\sqrt{t}$ y $-\sqrt{t}$. De ahí que para toda m, $t \in C$,

$(x + m)^2 = t$ tiene como conjunto solución al conjunto $\{-m + \sqrt{t}, -m - \sqrt{t}\}$

Como ilustración, notemos que $1 + i$ es una raíz cuadrada de $2i$, ya que

$$(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$$

Según eso, para la ecuación

$$(x+2)^2 = 2i$$

debemos tener

$$x + 2 = 1 + i \quad \text{o} \quad x + 2 = -1 - i$$

Por tanto,

$$x = -1 + i \quad \text{o} \quad x = -3 + i$$

(El estudiante debe comprobar estas soluciones.)

9-4 SOLUCIONES DE ECUACIONES CUADRATICAS COMPLETANDO EL CUADRADO

Algunos polinomios cuadráticos son «trinomios que son cuadrados perfectos» (o simplemente «cuadrados perfectos»). Por ejemplo,

$$x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$$

y

$9x^2 - 30x + 25 = (3x - 5)^2$

Supongamos que un polinomio cuadrático en x tiene coeficiente 1 en el término en x^2; ¿cómo podemos decir si es un cuadrado perfecto? Dado que

$$x^2 + \boxed{2n} \cdot x + \boxed{n^2} = (x+n)^2 \qquad \text{para toda } x \in C,$$

$$\left[\frac{1}{2}(2n)\right]^2$$

es claro que tales polinomios cuadráticos son cuadrados perfectos si, y solo si, el término constante es igual al cuadrado de la mitad del coeficiente del término en x. Así,

$$x^2 + \boxed{12} \cdot x + \boxed{36}$$

$$\left(\frac{1}{2} \cdot 12\right)^2$$

es un cuadrado perfecto, puesto que $\left(\frac{1}{2} \cdot 12\right)^2 = 6^2 = 36$. Por otra parte,

$x^2 + 10x + 16$

no es un cuadrado perfecto, ya que $\left(\frac{1}{2} \cdot 10\right)^2 = 5^2 = 25 \neq 16$.

Siempre podemos usar este hecho para transformar un polinomio cuadrático de la forma $x^2 + kx$ en un cuadrado perfecto. Por ejemplo, dado el polinomio cuadrático

$x^2 \;+\; 3x$

sumamos el cuadrado de la mitad del coeficiente de x, $\left(\frac{1}{2} \cdot 3\right)^2$, para obtener

$$x^2 + 3x + \frac{9}{4} = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2$$

Este proceso de sumar una constante a un polinomio cuadrático para convertirlo en un cuadrado perfecto se llama *completar el cuadrado*. Dada cualquier ecuación cuadrática, podemos usar este proceso para transformar la ecuación en otra equivalente, pero de la forma $(x + m)^2 = t$. En seguida, usando los resultados de la Sección 9-3, podemos encontrar su conjunto solución.

Ejemplo (a) Resolver la ecuación cuadrática

$3x^2 + 2x - 2 = 0$

por el método de completar el cuadrado.

Solución:

$3x^2 + 2x - 2 = 0$

$\leftrightarrow 3x^2 + 2x \quad = 2$ Sumar 2 a cada lado

$\leftrightarrow x^2 + \frac{2}{3}x \quad = \frac{2}{3}$ Multiplicar ambos lados por $\frac{1}{3}$

La última transformación se lleva a cabo de modo que el lado izquierdo sea de la forma $x^2 + kx$.

Ahora, $x^2 + \frac{2}{3}x$ se puede transformar en un cuadrado perfecto sumándole $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$.

Si también sumamos $\frac{1}{9}$ al lado derecho, obtenemos la ecuación equivalente

$$x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = \frac{2}{3} + \frac{1}{9}$$

$$\leftrightarrow \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}$$

$$\leftrightarrow x + \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{7}}{3} \quad \text{o} \quad x + \frac{1}{3} = -\frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\leftrightarrow x = -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3} \quad \text{o} \quad x = -\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{7}}{3}$$

De ahí que el conjunto solución buscado sea

$$\left\{-\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3}, -\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{7}}{3}\right\}$$

Notemos que el par de soluciones encontradas en el Ejemplo (a) se puede escribir

$$x = \frac{-1 + \sqrt{7}}{3}, \qquad x = \frac{-1 - \sqrt{7}}{3}$$

o de manera más económica en la forma

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{3}$$

El símbolo $\pm$ se lee «más, menos».

Ejemplo (b) Hallar el conjunto solución de $x^2 + 2ix - 2 = 0$.

Solución: Obtenemos la secuencia siguiente de ecuaciones equivalentes:

$x^2 + 2ix - 2 = 0$

$\leftrightarrow x^2 + 2ix = 2$ — Sumar 2 a cada lado.

$\leftrightarrow x^2 + 2ix + i^2 = 2 + i^2$ — Sumar $\left(\frac{1}{2} \cdot 2i\right)^2 = i^2$ a cada lado; notemos que el coeficiente de x^2 ya es 1

$\leftrightarrow x^2 + 2ix + i^2 = 1$ — Simplificar el lado derecho

$\leftrightarrow (x + i)^2 = 1$

$\leftrightarrow x + i = 1 \quad \text{o} \quad x + i = -1$ — Aplicar el Teorema 9-2

$\leftrightarrow x = 1 - i \quad \text{o} \quad x = -1 - i$

Así, pues, la ecuación dada tiene el conjunto solución

$\{1 - i, -1 - i\}$

9-2 Ejercicios

Usar el Teorema 9-2 para encontrar el conjunto solución de cada una de las ecuaciones dadas en los Ejercicios del 1 al 10. Dar todos los resultados en la forma más simple. Suponer que $x, y \in C$.

1. $(x - 2)^2 = 9$
2. $(y + 5)^2 = 3$
3. $x^2 = 27$

4. $y^2 = -16$
5. $(x-3)^2 - 18 = 0$
6. $(y+3i)^2 + 16 = 0$
7. $(3x+6)^2 = 9$
8. $(2y+i)^2 + 4 = 0$
9. $(ax+b)^2 - c^2 = 0, a \neq 0$
10. $(ay+b)^2 + c^2 = 0, a \neq 0$

En cada uno de los Ejercicios del 11 al 19, hallar el término que se debe sumar a la expresión dada para convertirla en un cuadrado perfecto y después escribir la expresión resultante, como el cuadrado de un binomio.

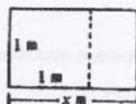
11. $x^2 + 10x$
12. $x^2 - 2x$
13. $x^2 + \frac{8}{3}x$
14. $y^2 - 3y$
15. $x^2 + x$
16. $x^2 - \frac{1}{2}x$
17. $x^2 - 3ix$
18. $x^2 + \frac{m}{2}x$
19. $x^2 + \frac{b}{a}x, a \neq 0$

En los Ejercicios del 20 al 35, hallar el conjunto solución de cada ecuación por el método de completar cuadrados. En cada caso, sea el conjunto de los números complejos el conjunto satisfactor de la variable.

20. $x^2 + 2x - 1 = 0$
21. $y^2 - 2y - 1 = 0$
22. $x^2 + 2 = 6x$
23. $4x + 16 = x^2$
24. $x^2 + 6x + 10 = 0$
25. $y^2 + y + 1 = 0$
26. $2y^2 + 2y - 1 = 0$
27. $2y^2 + y + 1 = 0$
28. $x^2 + 2\sqrt{2}x - 2 = 0$
29. $2x^2 + 3ix + 2 = 0$
30. $ix^2 - 4x + 5i = 0$
31. $(x+1)^2 = (x+2)(2x+1)$
32. $\frac{2x}{2x+1} + \frac{3}{x-1} = 0$
33. $2 = \frac{6}{x^2} - \frac{5}{x}$
34. $x^2 + 4ax + a^2 = 0, a \in R$
35. $x^2 + ax + 4a^2 = 0, a \in R$

Usar una variable para resolver cada uno de los problemas de planteo dados en los Ejercicios del 36 al 40.

36. Se dice que la forma ideal de un rectángulo utilizado en el dibujo artístico es la del *rectángulo de oro*, usado por los griegos. Si se recorta un cuadrado en un extremo, se obtiene un rectángulo menor, pero que conserva la misma razón de largo a ancho que el rectángulo original (véase la figura). Hallar la longitud de un rectángulo de oro de 1 m de ancho.



37. Hallar los números que son una unidad menos que sus respectivos cuadrados.
38. Hallar los números que son una unidad mayores que sus recíprocos respectivos.
39. Una ciudad posee un parque cuadrado sembrado de árboles y flores y cuya área es $\frac{1}{64}$ de kilómetro cuadrado. El lote de estacionamiento asfaltado y adyacente al parque sobre la misma calle es también un cuadrado, pero mayor que el parque. Su propietario es un industrial que desea permitir que la ciudad extienda el límite posterior del parque ocupando parte de su lote, paralelo a la calle, levantando el pavimento y sembrando árboles. El parque resultante tendrá entonces la misma área que queda al lote del industrial. Hallar la longitud original del terreno del industrial.
40. La suma de dos números reales positivos es 1. El producto de sus cuadrados también es 1. Hallar los dos números.

9-5 LA FORMULA CUADRATICA

Hemos visto que el método de completar cuadrados se puede emplear para resolver cualquier ecuación cuadrática. Si aplicamos esa técnica a la ecuación

$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \in C$ y $a \neq 0$

obtenemos la secuencia siguiente de ecuaciones equivalentes:

$ax^2 + bx + c = 0$	Dada
$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$	Multiplicar ambos lados por $\frac{1}{a}$
$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$	Sumar $-\frac{c}{a}$ a ambos lados
$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$	Se sumó $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ a ambos lados, completando así el cuadrado a la izquierda
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$	Se factorizó el lado izquierdo y se sumaron los términos del lado derecho

Ahora bien, según el Teorema 9-2, tenemos

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{o} \quad x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

y, por tanto,

$$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{o} \quad x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Puesto que cada uno de los pasos anteriores es reversible, se sigue que el conjunto solución de $ax^2 + bx + c = 0$ es

$$\left\{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right\}$$

En otras palabras, las soluciones de cualquier ecuación cuadrática

$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$

en donde a, b y c son constantes complejas, y $x \in C$, están dadas por la fórmula

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Esta fórmula, que es una de las más importantes de toda la matemática elemental, se llama *fórmula cuadrática*. Debe ser recordada y usada siempre que la factorización no sea conveniente.

Ejemplo (a) Usar la fórmula cuadrática para encontrar el conjunto solución de $x^2 + x - 1 = 0$.

Solución: En esta ecuación, $a = 1$, $b = 1$ y $c = -1$. Luego,

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - (4)(1)(-1)}}{2}$$

Al simplificar nos queda

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Si usamos primero el signo más y después el signo menos, observamos que el conjunto solución buscado es

$$\left\{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$$

Ejemplo (b) Dado que $y^2 + 4x^2 - 4xy - x = 0$, utilizar la fórmula cuadrática para expresar y en términos de x.

Solución: La primera cosa que debemos observar es qué se nos pide resolver y en términos de x. Por tanto, debemos pensar en la ecuación cuadrática como una cuadrática en y. Teniendo presente esto, obtenemos la forma canónica

$$y^2 - (4x)y + (4x^2 - x) = 0$$

con $a = 1$, $b = -4x$ y $c = 4x^2 - x$. Entonces

$$y = \frac{4x \pm \sqrt{16x^2 - 16x^2 + 4x}}{2} = \frac{4x \pm \sqrt{4x}}{2} = 2x \pm \sqrt{x}$$

Por tanto, tenemos

$$y = 2x + \sqrt{x} \qquad \text{o} \qquad y = 2x - \sqrt{x}$$

Las soluciones de una ecuación también se suelen llamar sus *raíces*. Si llamamos r_1 y r_2 a las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, podemos escribir

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{y} \qquad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si sumamos estos valores, obtenemos

$$r_1 + r_2 = \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}) + (-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

y multiplicándolos, nos queda

$$r_1 \cdot r_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Luego, si $\{r_1, r_2\}$ es el conjunto solución de $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, la suma de dichas raíces está dada por la fórmula

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$$

y el producto por

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a}$$

La inversa de esta proposición también es verdadera, porque supongamos que r_1, r_2, a y b son números complejos tales que $r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$ y que $r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a}$, $a \neq 0$, entonces, puesto que

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0$$

$$\leftrightarrow \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\leftrightarrow x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 \cdot r_2 = 0$$

$$\leftrightarrow \quad (x - r_1)(x - r_2) = 0$$

$$\leftrightarrow \quad x = r_1 \quad \text{o} \quad x = r_2$$

se concluye que $\{r_1, r_2\}$ es el conjunto solución de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$.

Con lo anterior hemos demostrado el

Teorema 9-3 El conjunto solución de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, es $\{r_1, r_2\}$ si, y solo si, $r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$ y $r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a}$.

Este teorema se puede utilizar para hacer una comprobación rápida de las soluciones de una ecuación cuadrática. Con frecuencia, esto es más fácil que sustituir cada una de las supuestas raíces en la ecuación original.

Ejemplo (c) Hacer ver que $\left\{\frac{3+i}{2}, \frac{3-i}{2}\right\}$ es el conjunto solución de $2x^2 + 5 = 6x$.

Solución: Primero escribiremos la ecuación en la forma canónica,

$2x^2 - 6x + 5 = 0$

En esta ecuación, $a = 2$, $b = -6$ y $c = 5$. Dado que

$$\frac{3+i}{2} + \frac{3-i}{2} = \frac{6}{2} = 3 = -\frac{b}{a}$$

y

$$\left(\frac{3+i}{2}\right)\left(\frac{3-i}{2}\right) = \frac{9+1}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = \frac{c}{a}$$

se concluye que $\left\{\frac{3+i}{2}, \frac{3-i}{2}\right\}$ es el conjunto solución de $2x^2 + 5 = 6x$.

El Teorema 9-3 también es útil para construir una ecuación cuadrática cuyo conjunto solución $\{r_1, r_2\}$ esté dado. Como $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, es equivalente a

$$x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$$

el teorema nos permite escribir cualquiera de tales ecuaciones en la forma

$$x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 \cdot r_2 = 0$$

Ejemplo (d) Escribir una ecuación cuadrática cuyas raíces sean $\frac{2+\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{2-\sqrt{5}}{2}$.

Solución:

$$r_1 + r_2 = \frac{2+\sqrt{5}}{2} + \frac{2-\sqrt{5}}{2} = 2$$

y

$$r_1 \cdot r_2 = \left(\frac{2+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{2-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{4-5}{4} = -\frac{1}{4}$$

Por tanto, $x^2 - 2x - \frac{1}{4} = 0$ es una ecuación que tiene las raíces dadas. Por supuesto que esta ecuación no es la única. Por ejemplo, si se nos hubiese pedido construir una ecuación con coeficientes enteros y que tuviese dichas raíces, podíamos haber escrito $4x^2 - 8x - 1 = 0$.

Ejemplo (e) La suma de las raíces de $2x^2 + 3kx - 7 = 0$, es 6. Hallar el valor de k.

Solución: Del Teorema 9-3 sabemos que

$$r_1 + r_2 = -\frac{3k}{2}$$

De ahi que $-\frac{3k}{2} = 6$ y $k = -4$.

La expresión $b^2 - 4ac$, que está bajo el radical en la fórmula cuadrática, se llama *discriminante* de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. El discriminante es de particular significado e interés cuando los coeficientes a, b y c son números reales. En tales casos, notemos que:

- Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces $\sqrt{b^2 - 4ac} = 0$ y

  $$r_1 = \frac{-b+0}{2a} = \frac{-b-0}{2a} = r_2$$

  Las raíces de la ecuación son iguales.

- Si $b^2 - 4ac > 0$, entonces $\sqrt{b^2 - 4ac}$ es un número real positivo, digamos k, y

  $$r_1 = \frac{-b+k}{2a} \neq \frac{-b-k}{2a} = r_2$$

  Las raíces de la ecuación son reales y diferentes.

- Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces $\sqrt{b^2 - 4ac}$ es un número imaginario puro, digamos ki, y

  $$r_1 = \frac{-b+ki}{2a} \neq \frac{-b-ki}{2a} = r_2$$

  Las raices de la ecuación son complejos no reales conjugados uno del otro.

Aun si uno o más de los coeficientes de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ son números complejos no reales, sus dos soluciones son iguales si, y solo si, $b^2 - 4ac = 0$.

Ejemplo (f) Determinar k de modo que la gráfica de $y = x^2 + x + 2k$ corte al eje x en dos puntos distintos.

Solución: En la Sección 6-7 veíamos que si r era la coordenada x de un punto en que la gráfica de la ecuación dada cruzaba al eje x, entonces r debía ser una solución real de la ecuación $x^2 + x + 2k = 0$. Puesto que la gráfica debe cruzar al eje x en dos puntos distintos, las raíces de esta ecuación deben ser reales y diferentes. En consecuencia, debe suceder que $b^2 - 4ac > 0$. Por tanto,

$$1 - (4)(1)(2k) > 0$$

lo cual implica que

$$k < \frac{1}{8}$$

9-3 Ejercicios

En los Ejercicios del 1 al 16, hallar la solución de cada ecuación cuadrática mediante la fórmula. Escribir cualquier solución compleja no real en forma rectangular y simplificar los radicales.

1. $x^2 - 2x - 1 = 0$
2. $x^2 - 2x + 10 = 0$
3. $3x^2 + x = 2$
4. $y^2 + 2 = 2\sqrt{3}\,y$

5. $y^2+2y+5=0$
6. $2+2x=3x^2$
7. $2z^2+1=2z$
8. $15x^2-14x+3=0$
9. $\sqrt{2}y^2+y=\sqrt{2}$
10. $\sqrt{2}x^2+2\sqrt{3}x+\sqrt{2}=0$
11. $x^2+2ix-1=0$
12. $\frac{y^2-3y}{y}-1=\frac{1}{y}$
13. $x^2-(2-2i)x-(4+2i)=0$
14. $2+3ix+2x^2=0$
15. $3x^2+5ix=0$
16. $\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}+\frac{1}{x}$

En los Ejercicios del 17 al 21, utilizar la fórmula para resolver para y en términos de x. (Véase el Ejemplo (b) de la Sección 9-5.)

17. $y^2+xy-6x^2=0$
18. $3y^2+xy-2x^2=0$
19. $y^2-4xy+(4x^2-9)=0$
20. $(1-x^2)y^2-2xy+x^2=0, |x|\neq 1$
21. $y^2-4xy+2y+3x^2-6x=0,\ x\geq 1$

22. Dado que $y^2+x^2-2xy-2x=0$, hallar x en términos de y y y en términos de x.

En los Ejercicios del 23 al 28, usar el Teorema 9-3 para determinar la suma y el producto de las raices de cada ecuación. Expresar cualquier resultado complejo no real en la forma $a+bi$ y simplificar los radicales.

23. $-y^2+5y=3$
24. $\sqrt{2}y^2-3y+1=0$
25. $x^2-3=\pi x$
26. $3x^2+2ix+1=0$
27. $(2-i)x^2+ix+(-1+i)=0$
28. $x^2-3ax+a^2=0$

En los Ejercicios del 29 al 35, usar el Teorema 9-3 para construir una ecuación cuadrática que tenga el conjunto solución dado. Dar los resultados finales en la forma $ax^2+bx+c=0$, $a>0$, y ningún coeficiente fraccionario.

29. $\left\{\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}\right\}$
30. $\left\{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right\}$
31. $\left\{\frac{3}{2}\right\}$
32. $\{2+i, 2-i\}$
33. $\left\{\frac{1+i\sqrt{2}}{2}, \frac{1-i\sqrt{2}}{2}\right\}$
34. $\left\{-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$
35. $\{1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{3}\}$

36. Si una raiz de $x^2+3x+k=0$ es 2, hallar la otra raiz. ¿Cuál es el valor de k?
37. Una raiz de $x^2-kx+1-i=0$ es i. Hallar la otra raiz y el valor de k.
38. Si una de las raiçes de $2x^2+x-18=mx$ es el negativo de la otra, hallar las raices y el valor de m.
39. Hallar el valor de la constante m tal que una de las soluciones de $x^2-mx+27=0$ sea el triple de la otra.
40. La suma de dos números es 8 y su producto es 17. Hallar tales números.
41. Sin resolver la ecuación, hallar la suma de los inversos multiplicativos de las raices de $2x^2-3x+5=0$.
42. Un estudiante encontró que las raices de una ecuación cuadrática eran $\frac{3}{2}$ y $\frac{1}{2}$. Aunque no tenía errores en sus cálculos, había copiado equivocadamente el término constante. Otro estudiante, al resolver la misma ecuación, cometió un error solo al copiar el coeficiente del término de primer grado y encontró que el conjunto solución era $\{1, -8\}$. ¿Cuál es el conjunto solución correcto de la ecuación que ambos estudiantes estaban tratando de resolver?

En los Ejercicios del 43 al 46, utilizar el discriminante para determinar k de modo que la ecuación dada tenga raíces iguales.

43. $3x^2-2kx+3=0$
44. $3x^2-7x-k=0$
45. $4x^2-4kx+5k=0$
46. $kx^2+8x+2k=0$

47. ¿Para qué valores de b^2-4ac no corta al eje x la gráfica de $y=ax^2+bx+c$?
48. ¿Para qué valor de b^2-4ac es la gráfica de $y=ax^2+bx+c$ tangente al eje x?
49. ¿Para qué valor o valores de k es la gráfica de $y=x^2+4x-k$ tangente al eje x?
50. ¿Para qué valor o valores de k tiene raíces complejas no reales la ecuación $2x^2-6x-k=0$?

En los Ejercicios 51, 52 y 53, tratar la ecuación dada como una cuadrática en y. Luego resolver para y en términos de x y determinar los valores de x que dan valores reales a y.

51. $y^2-6y+2x+3=0,\ x\leq 3$
52. $x^2+2x-4xy+4y^2=1$
53. $xy^2-2xy+x-2=0$

9.5 ECUACIONES CON RADICALES

Ecuaciones en que la variable aparece bajo un radical, con frecuencia se llaman *ecuaciones radicales*. Por ejemplo,

$$3 - x = 2\sqrt{x}$$

$$x + 1 = \sqrt[3]{2x + 5}$$

y

$$3 + \sqrt{2x - 1} = \sqrt{x + 1}$$

son ecuaciones radicales.

En esta sección desarrollaremos una técnica para resolver ecuaciones radicales que contengan raíces cuadradas. Sin embargo, antes de atacar directamente el problema, recordemos lo que hemos dicho acerca del símbolo $\sqrt{a}$.

- Si $a \in R$ y $a > 0$, entonces $\sqrt{a}$ es el número real positivo tal que $(\sqrt{a})^2 = a$. Llamamos a $\sqrt{a}$ raíz cuadrada principal de a.
- Si $a \in R$ y $a < 0$, entonces $\sqrt{a} = i\sqrt{-a}$. (Recordemos que si $a < 0$, entonces $-a > 0$ y $\sqrt{-a}$ es un número real.)
- Si a es un número complejo no real, entonces todo lo que podemos decir acerca de $\sqrt{a}$ es que es una de las dos raíces cuadradas de a.

Como aún no estamos capacitados para asignar un valor definido a símbolos tales como $\sqrt{2i}$, todas las variables que aparezcan en las ecuaciones de esta sección tendrán un subconjunto de R como conjunto satisfactor.

Para resolver una ecuación radical, comenzaremos por escribir una ecuación equivalente que contenga un solo radical en un lado y todos los otros términos en el otro. Después elevamos al cuadrado ambos lados.

Ejemplo (a) Hallar el conjunto solución de $3 - 2\sqrt{x} = x$.

Solución: Escribiremos primero la ecuación equivalente

$$3 - x = 2\sqrt{x}$$

Para eliminar el radical, elevamos al cuadrado ambos lados, lo que da

$$(3 - x)^2 = (2\sqrt{x})^2$$

que es equivalente a

$$x^2 - 6x + 9 = 4x$$

o

$$x^2 - 10x + 9 = 0$$

El conjunto solución de esta última ecuación es $\{1, 9\}$. Al comprobar para ver si 1 y 9 son soluciones de la ecuación dada, encontramos que

$$3 - 2\sqrt{1} \stackrel{?}{=} 1 \qquad 3 - 2\sqrt{9} \stackrel{?}{=} 9$$
$$1 = 1 \qquad\qquad -3 \neq 9$$

Por tanto, 1 es una solución de la ecuación dada, en tanto que 9 no lo es.

Este ejemplo muestra claramente que no podemos depender de elevar al cuadrado ambos lados para obtener una ecuación equivalente. La dificultad está

en que aunque $m = n$ implica que $m^2 = n^2$, esta argumentación no es reversible. De hecho, $m^2 = n^2$ implica que $m = n$ o que $m = -n$.

Viendo de nuevo el Ejemplo (a), notamos que al elevar al cuadrado los dos lados de $3 - x = 2\sqrt{x}$, obtuvimos la ecuación $(3 - x)^2 = (2\sqrt{x})^2$. Pero esta nueva ecuación es equivalente a la proposición abierta compuesta

$$3 - x = 2\sqrt{x} \quad \text{o} \quad 3 - x = -2\sqrt{x}$$

Esto significa que el conjunto solución de la ecuación cuadrada contiene las soluciones de $3 - x = -2\sqrt{x}$ junto con las de $3 - x = 2\sqrt{x}$.

En general, elevar al cuadrado de dos lados de una ecuación no siempre produce una ecuación equivalente. A causa de esto, es absolutamente necesaria una comprobación de la solución de ecuaciones con radicales.*

Si dos o más términos de una ecuación contienen radicales, empezamos como en el Ejemplo (a), escribiendo una ecuación equivalente con un solo radical en uno de los lados y todos los otros términos en el otro. Si al elevar al cuadrado los dos lados de esta ecuación no llegamos a una ecuación sin radicales, simplemente repetimos el proceso hasta lograrlo.

Ejemplo (b) Hallar el conjunto de números reales solución de

$$\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+4} = 1$$

Solución:

$$\sqrt{3x+1} = 1 + \sqrt{x+4}$$
$$3x + 1 = 1 + 2\sqrt{x+4} + x + 4$$
$$2x - 4 = 2\sqrt{x+4}$$
$$x - 2 = \sqrt{x+4}$$
$$x^2 - 4x + 4 = x + 4$$
$$x^2 - 5x = 0$$
$$x(x - 5) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{o} \quad x = 5$$

Al comprobar, tenemos

$x = 0$

$$\sqrt{1} - \sqrt{4} \stackrel{?}{=} 1$$
$$1 - 2 \neq 1$$

$x = 5$

$$\sqrt{15+1} - \sqrt{5+4} \stackrel{?}{=} 1$$
$$\sqrt{16} - \sqrt{9} \stackrel{?}{=} 1$$
$$4 - 3 = 1$$

Por tanto, el conjunto solución de la ecuación dada es $\{5\}$.

9-7 ECUACIONES DE FORMA CUADRATICA

Consideremos la ecuación cuadrática que sigue, en la variable u:

$$u^2 - 8u + 12 = 0$$

Si sustituimos u por la expresión $x^2 - x$, obtenemos la ecuación

$$(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12 = 0$$

* Algunos autores se refieren a las soluciones de una ecuación derivada que no lo son de la ecuación original con el nombre de *soluciones extrañas*. Puesto que estos valores no son de ningún modo soluciones de la ecuación dada, no usaremos dicho término en este texto.

Esta ecuación ciertamente *no* es una ecuación cuadrática en x. Sin embargo, es cuadrática en $x^2 - x$. En razón de esto, decimos que es de *forma cuadrática*.

En general, se dice que una ecuación no cuadrática es de forma cuadrática si es equivalente a una ecuación de la forma

$$au^2 + bu + c = 0, \qquad a \neq 0$$

en donde u representa alguna expresión que contiene una segunda variable.

Ejemplo (a) $2x^4 - 5x^2 + 2 = 0$ es equivalente a $2[x^2]^2 - 5[x^2] + 2 = 0$. De ahí que esta ecuación es cuadrática en x^2.

Ejemplo (b) $x^{-6} - 9x^{-3} + 8 = 0$ es cuadrática en x^{-3}.

Cualquiera de las técnicas empleadas para resolver ecuaciones cuadráticas se puede usar para encontrar los conjuntos solución de ecuaciones de forma cuadrática.

Ejemplo (c) Hallar el conjunto de números reales solución de

$$(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12 = 0$$

Solución: Como se puede notar, esta ecuación es cuadrática en $x^2 - x$. Si hacemos $u = x^2 - x$, entonces $u^2 = (x^2 - x)^2$ y la ecuación dada se transforma en

$$u^2 - 8u + 12 = 0$$

Factorizando tenemos

$$(u - 6)(u - 2) = 0$$

De ahí que

$$u = 6 \quad \text{o} \quad u = 2$$

Pero

$$u = x^2 - x$$

De modo que

$$x^2 - x = 6 \quad \text{o} \quad x^2 - x = 2$$

Al resolver estas dos ecuaciones cuadráticas en x, encontramos que

$$x^2 - x = 6 \leftrightarrow x = -2 \text{ o } x = 3$$

y que

$$x^2 - x = 2 \leftrightarrow x = -1 \text{ o } x = 2$$

Por tanto, el conjunto solución de la ecuación dada es $\{-2, -1, 2, 3\}$.

9-4 Ejercicios

En los Ejercicios del 1 al 5 indicar si la proposición dada es verdadera o falsa. Suponer que $x \in R$.

1. $\sqrt{x - 3}$ es real si, y solo si, $x \geq 0$.
2. El conjunto solución de la ecuación $\sqrt{x} = i$ es $\{-1\}$.
3. El conjunto solución de $\sqrt{(x - 2)^2} = -2$ es $\{0, 4\}$.
4. El conjunto solución de la ecuación $(x - 1)^2 = (\sqrt{2x + 1})^2$ es un subconjunto del de $x - 1 = \sqrt{2x + 1}$.
5. Supóngase que r es una solución de la ecuación $(x - 1)^2 = (\sqrt{2x + 1})^2$ y que r no satisface la ecuación $x - 1 = \sqrt{2x + 1}$. Entonces, r debe ser una solución de $x - 1 = -\sqrt{2x + 1}$.

En los Ejercicios del 6 al 27, hallar el conjunto solución de números reales de cada una de las ecuaciones dadas.

6. $\sqrt{x} = x - 2$
7. $\sqrt{x} = 2 - x$

8. $y-1=\sqrt{y+1}$
9. $\sqrt{1-w^2}=-1$
10. $\sqrt{x+1}+1=-x$
11. $\sqrt{x^2+3x}-2=0$
12. $\sqrt{y+2}+\sqrt{y+7}=0$
13. $\sqrt{2x-10}+\sqrt{x+5}=0$
14. $\sqrt{y^2+1}-\sqrt{y+3}=0$
15. $\sqrt{x-5}\sqrt{x+3}=3$
16. $\sqrt{x+4}\sqrt{x-4}=-3$
17. $\sqrt{w+2}-\sqrt{w+7}=1$
18. $\sqrt{2x+6}+\sqrt{2x+2}=1$
19. $\sqrt{2y+7}-\sqrt{y+3}=5$
20. $\sqrt{y+2}+\sqrt{y+14}=6$
21. $\sqrt{2}+\sqrt{x}=\sqrt{x+2}$
22. $\sqrt{2y+3}=\sqrt{y+1}+\sqrt{y-2}$
23. $\sqrt{2y+3}+\sqrt{y+1}=\sqrt{y-2}$
24. $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=\sqrt{2x+1}$
25. $\sqrt{3w-1}+\sqrt{2}=3\sqrt{w-1}$
26. $\sqrt{3-y}=\sqrt{y-13}-\sqrt{y-8}$
27. $\sqrt{x^2+x+5}=2+\sqrt{x^2+x-11}$

Hallar el conjunto solución de cada una de las ecuaciones dadas en los Ejercicios del 28 al 41.

28. $x^4-2x^2+1=0$
29. $x^4-3x^2-4=0$
30. $x^4-2x^2-24=0$
31. $(2w^2+w)^2-4(2w^2+w)+3=0$
32. $(x^2-1)^2-(x^2-1)-2=0$
33. $(z^2-4z)^2-(z^2-4z)-20=0$
34. $(w^2-1)-4\sqrt{w^2-1}+3=0$
35. $(x+6)-\sqrt{x+6}-2=0$
36. $(y+1)^4+4(y+1)^2+4=0$
37. $y^{-4}-5y^{-2}+4=0$
38. $y^{-4}+10y^{-2}+9=0$
39. $y^2+y+\dfrac{12}{y^2+y}=8$
40. $\left(\dfrac{w-1}{w}\right)+2=3\left(\dfrac{w}{w-1}\right)$
41. $\dfrac{y^2+1}{y}+\dfrac{4y}{y^2+1}=4$

Sistemas de ecuaciones con cuadráticas 10

10-1 INTRODUCCION

En el Capítulo 7 estudiamos sistemas de ecuaciones y de desigualdades y aprendimos a resolverlos utilizando tanto métodos gráficos como algebraicos. Aunque nos restringimos a sistemas lineales, las definiciones de un sistema y de su conjunto solución se aplican a sistemas de ecuaciones y de desigualdades en general. En este capítulo usaremos esas mismas definiciones refiriéndonos a sistemas que contienen ecuaciones cuadráticas en dos variables.

La ecuación cuadrática general en dos variables es de la forma

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

en donde a, b, c, d, e y f son constantes reales y a, b y c no son todas 0. Algunos ejemplos son

(a) $x^2 + y^2 = 25.$
(b) $xy = 4.$
(c) $y^2 + 3x + 2y = 5.$

Consideraremos la solución de sistemas en dos variables en los que una ecuación sea lineal y la otra cuadrática, así como algunos casos especiales en que ambas sean cuadráticas.

10-2 SOLUCION GRAFICA

El método gráfico que usamos para resolver sistemas lineales en la Sección 7-4, se puede aplicar a cualquier sistema de ecuaciones que no contenga más de dos variables. Simplemente trazamos las gráficas de las ecuaciones sobre un sistema coordenado y leemos los valores aproximados de los puntos de intersección. Cada uno de dichos puntos corresponde a un par ordenado de números reales que son una solución del sistema.

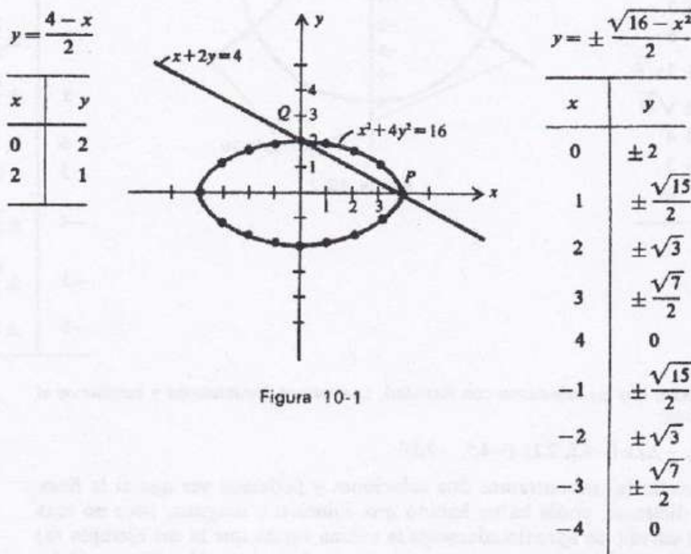
Ejemplo (a) Resolver gráficamente el sistema

$$A \begin{cases} x + 2y = 4 \\ x^2 + 4y^2 = 16 \end{cases}$$

Solución: Para facilitar encontrar los pares ordenados, ponemos

$$B\begin{cases} y = \dfrac{4-x}{2} \\ y = \pm\dfrac{\sqrt{16-x^2}}{2}, \quad \text{en donde } B \leftrightarrow A \end{cases}$$

Después trazamos las gráficas de las dos ecuaciones como se muestra en la Figura 10-1.



$y = \dfrac{4-x}{2}$

x	y
0	2
2	1

$y = \pm\dfrac{\sqrt{16-x^2}}{2}$

x	y
0	± 2
1	$\pm\dfrac{\sqrt{15}}{2}$
2	$\pm\sqrt{3}$
3	$\pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}$
4	0
−1	$\pm\dfrac{\sqrt{15}}{2}$
−2	$\pm\sqrt{3}$
−3	$\pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}$
−4	0

Figura 10-1

Hay dos puntos de intersección: $P(4, 0)$ y $Q(0, 2)$.
El conjunto solución es $\{(4, 0), (0, 2)\}$.

Ejemplo (b) Hallar la solución de

$$A\begin{cases} 4x^2 - 9y^2 = 36 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

Solución: Un sistema equivalente es

$$B\begin{cases} y = \pm\dfrac{2}{3}\sqrt{x^2-9} \\ y = \pm\sqrt{25-x^2} \end{cases}$$

$y = \pm\sqrt{25 - x^2}$

x	y
0	± 5
1	$\pm 2\sqrt{6}$
2	$\pm\sqrt{21}$
3	± 4
4	± 3
5	0
−1	$\pm 2\sqrt{6}$
−2	$\pm\sqrt{21}$
−3	± 4
−4	± 3
−5	0

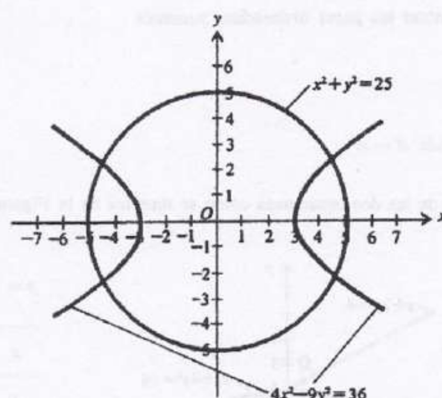


Figura 10-2

$y = \pm\frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 9}$

x	y
0	Imaginaria
1	Imaginaria
2	Imaginaria
3	0
4	$\pm\frac{2}{3}\sqrt{7}$
5	$\pm\frac{8}{3}$
6	$\pm 2\sqrt{3}$
−3	0
−4	$\pm\frac{2}{3}\sqrt{7}$
−5	$\pm\frac{8}{3}$
−6	$\pm 2\sqrt{3}$

Aquí no se pueden leer las soluciones con facilidad. Las leemos aproximadas y escribimos el conjunto solución

$\{(4{,}5,\ 2{,}2),\ (4{,}5,\ -2{,}2),\ (-4{,}5,\ 2{,}2),\ (-4{,}5,\ -2{,}2)\}$

En el Ejemplo (a) encontramos dos soluciones y podemos ver que si la línea hubiese sido diferente, podía haber habido una solución o ninguna, pero no más de dos. Otras curvas, de aproximadamente la misma forma que la del Ejemplo (b) pueden tener uno, dos, tres, cuatro o ningún punto de intersección (Figura 10-3). En cualquier caso, las soluciones que se obtienen a partir de una gráfica son solo aproximadas. Además, puesto que los puntos en un plano corresponden solo a pares ordenados de números reales, este método no dará soluciones complejas no reales.

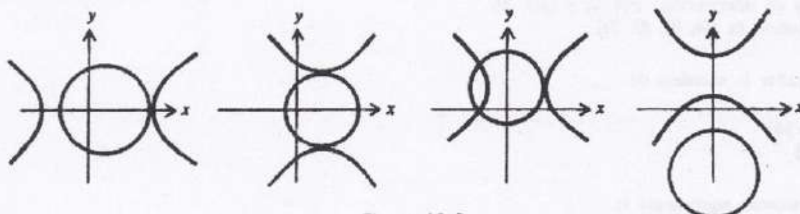


Figura 10-3

10-3 SOLUCION POR SUSTITUCION

La solución algebraica de un sistema de dos ecuaciones cuadráticas en general conduce a una ecuación de cuarto grado en una de las variables. Los métodos

desarrollados en este capítulo son adecuados para sistemas especiales que se presentan con frecuencia y que se pueden resolver reduciéndolos a sistemas equivalentes en los que una ecuación sea cuadrática (o de forma cuadrática) en una variable.

Siempre es posible resolver una de las ecuaciones para una variable en términos de la otra. Su sustitución en la otra ecuación conduce, entonces, a una ecuación en una sola variable. Si podemos resolver esta ecuación, entonces podemos hallar fácilmente el conjunto solución del sistema. Si no, quizá algún otro método nos lleve a una ecuación más simple, aunque algunos sistemas no se pueden resolver fácilmente y las soluciones reales usualmente se obtienen mediante un proceso de aproximación.

Si una de las ecuaciones es lineal, la sustitución siempre nos llevará a una ecuación cuadrática en una variable.

Ejemplo (a) Resolver algebraicamente el sistema del Ejemplo (a), Sección 10-2.

$$A\begin{cases}x+2y=4\\x^2+4y^2=16\end{cases}$$

Solución: Resolvamos la primera ecuación para x:

$$x = 4 - 2y$$

Sustituyamos x por esta expresión en la segunda ecuación y simplifiquemos:

$$\begin{aligned}(4-2y)^2+4y^2&=16\\16-16y+4y^2+4y^2&=16\\8y^2-16y&=0\\y^2-2y&=0\end{aligned}$$

Escribamos el sistema equivalente

$$B\begin{cases}x=4-2y\\y^2-2y=0\end{cases}$$

Resolvamos ahora la segunda ecuación para y:

$$y = 0 \quad \text{o} \quad y = 2$$

Por tanto, tenemos que $A \leftrightarrow B \leftrightarrow C \leftrightarrow (D \text{ o } E)$:

$$C\begin{cases}x=4-2y\\y=0 \quad \text{o} \quad y=2\end{cases} \leftrightarrow \quad D\begin{cases}x=4-2y\\y=0\end{cases} \quad \text{o} \quad E\begin{cases}x=4-2y\\y=2\end{cases}$$

de donde, por sustitución,

$$D \text{ o } E \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases}x=4\\y=0\end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases}x=0\\y=2\end{cases}$$

Las dos soluciones son (4, 0) y (0, 2). Todo sistema de este tipo ha de tener dos soluciones. ¿Por qué?

Ejemplo (b) Resolver simultáneamente:

$$\begin{cases}3x-2y=4\\2x^2-3xy+6x+2y=21\end{cases}$$

Solución: Resolvamos la primera ecuación para cualquiera de las variables; escojamos y.

$$y=\frac{3x-4}{2}$$

Sustituyamos en la segunda ecuación

$$2x^2-3x\left(\frac{3x-4}{2}\right)+6x+2\left(\frac{3x-4}{2}\right)=21$$

Multipliquemos ambos lados por 2 y simplifiquemos para obtener

$x^2 - 6x + 10 = 0$

Usemos la fórmula cuadrática para resolver para x:

$x = 3 \pm i$

Nuestro sistema original es equivalente a

$$\begin{cases} y = \dfrac{3x-4}{2} \\ x = 3 + i \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} y = \dfrac{3x-4}{2} \\ x = 3 - i \end{cases}$$

y por sustitución las soluciones son:

$$\left(3 + i, \frac{5+3i}{2}\right), \left(3 - i, \frac{5-3i}{2}\right)$$

Ejemplo (c) Resolver simultáneamente

$$\begin{cases} xy = 4 \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases}$$

Solución: Ninguna de las dos ecuaciones es lineal. Sin embargo, podemos fácilmente resolver la primera ecuación para x o para y y sustituir en la segunda:

$$y = \frac{4}{x}$$

$$x^2 + \frac{16}{x^2} = 8$$

Esto nos lleva a una ecuación de cuarto grado que se puede resolver por factorización:

$$\begin{aligned} x^4 - 8x^2 + 16 &= 0 \\ (x^2 - 4)^2 &= 0 \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = \dfrac{4}{x} \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = \dfrac{4}{x} \end{cases}$$

El conjunto solución es $\{(2, 2), (-2, -2)\}$.

10-4 DOS ECUACIONES DE LA FORMA $ax^2 + by^2 = c$

El método más eficiente para resolver un sistema en que ambas ecuaciones son de la forma $ax^2 + by^2 = c$ consiste en eliminar una de las variables por suma o resta. Se obtiene entonces una ecuación de la forma $ex^2 = f$ (o $gy^2 = h$) a partir de la cual podemos encontrar dos valores para x (o para y). Podemos en seguida sustituirlos en una u otra de las ecuaciones originales para encontrar el otro elemento de la solución (x, y).

Ejemplo Resolver simultáneamente

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 5 \\ 4x^2 - 7y^2 = -3 \end{cases}$$

Solución: Supongamos que escogemos eliminar x. Multiplicamos la primera ecuación por 4 y la segunda por 3:

$$\begin{cases}3x^2+2y^2=5\\4x^2-7y^2=-3\end{cases} \leftrightarrow \begin{cases}12x^2+8y^2=20\\12x^2-21y^2=-9\end{cases}$$

Al restar obtenemos $29y^2 = 29$ o sea $y^2 = 1$ o $y = \pm 1$. Entonces, cualquier solución de nuestro problema es una solución de

$$\begin{cases}3x^2+2y^2=5\\y=1\end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases}3x^2+2y^2=5\\y=-1\end{cases}$$

Por sustitución

$$\begin{cases}x=\pm 1\\y=1\end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases}x=\pm 1\\y=-1\end{cases}$$

Hemos encontrado cuatro soluciones, cada una de las cuales es un *par ordenado* de números complejos. Estos son

$(1, 1); (-1, 1); (1, -1); (-1, -1)$

10-1 Ejercicios

En los Ejercicios del 1 al 6, graficar el sistema y leer las soluciones reales aproximadas.

1. $\begin{cases}x^2+y^2=10\\9x^2+y^2=18\end{cases}$
2. $\begin{cases}xy=-9\\3x+y+6=0\end{cases}$
3. $\begin{cases}x^2+y^2=5\\2x+y=4\end{cases}$
4. $\begin{cases}x^2+y^2=16\\x^2-2y=8\end{cases}$
5. $\begin{cases}x^2+y^2=5\\xy=10\end{cases}$
6. $\begin{cases}x^2=2y\\2x-2y=1\end{cases}$

En los Ejercicios del 7 al 21, hallar todas las soluciones complejas.

7. El sistema del Ejercicio 1.
8. El sistema del Ejercicio 3.
9. El sistema del Ejercicio 6.
10. $\begin{cases}x^2+y^2=37\\x+y=5\end{cases}$
11. $\begin{cases}x^2+y^2+6y-x=7\\x+y+1=0\end{cases}$
12. $\begin{cases}2x+y-5=0\\x^2+y^2=25\end{cases}$
13. $\begin{cases}2x+3y=7\\x^2+y^2+4y-22=0\end{cases}$
14. $\begin{cases}3x^2+2y^2=5\\4x^2-7y^2+3=0\end{cases}$
15. $\begin{cases}5x^2-3y^2+11=0\\7x^2-5y^2+13=0\end{cases}$
16. $\begin{cases}3y^2+2x^2=11\\x^2=30-2y^2\end{cases}$
17. $\begin{cases}3x^2+4y^2=7\\7x^2+12y^2=3\end{cases}$
18. $\begin{cases}\frac{3}{5}x^2-\frac{2}{3}y^2-9=0\\\frac{7}{10}x^2+\frac{5}{6}y^2=25\end{cases}$
19. $\begin{cases}4x^2-xy=28\\4x^2+xy=100\end{cases}$
20. $\begin{cases}\frac{2}{x^2}-\frac{1}{y^2}+17=0\\\frac{1}{x^2}+\frac{2}{y^2}=54\end{cases}$
21. $\begin{cases}\frac{2}{x^2}-\frac{3}{y^2}+1=0\\\frac{6}{x^2}-\frac{7}{y^2}+2=0\end{cases}$

En los Ejercicios 22 y 23, resolver simultáneamente para x y para y.

22. $\begin{cases}mx^2+ny^2=p\\nx^2-my^2=0\end{cases}$
23. $\begin{cases}x^2+y^2=b^2\\y=mx+b\end{cases}$
24. Hallar el valor de m para el cual el sistema siguiente tiene una solución (es decir, dos soluciones iguales).

$$\begin{cases}x^2+y^2=5\\y=mx+3\end{cases}$$

25. Hallar los valores de b de modo que el sistema siguiente tenga soluciones reales.

$$\begin{cases}y^2-9x^2=9\\2x-y+b=0\end{cases}$$

Descubra su propio método para resolver los sistemas siguientes.

26. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ xy = -3 \end{cases}$

27. $\begin{cases} (x-y)(x+2y) = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

28. $\begin{cases} x^2 = y^2 - 2y \\ x^2 = 4y + 16 \end{cases}$

29. $\begin{cases} x^2 + y^2 + x = 4 \\ 2x^2 + 2y^2 + 5y = 0 \end{cases}$

10-5 DOS ECUACIONES SIN TERMINOS LINEALES

Consideremos ahora un sistema de dos ecuaciones de la forma $ax^2 + bxy + cy^2 = d$, en donde los coeficientes de algunos de los términos pueden ser 0. Supondremos, sin embargo, que por lo menos una de las ecuaciones tiene un término xy; de otro modo, usaríamos el método descrito en la Sección 10-4.

Ejemplo (a) Resolver simultáneamente:

$$A\begin{cases} 3x^2 + 16xy + 5y^2 = 8 \\ x^2 + 3xy + 2y^2 = 2 \end{cases}$$

Solución: Construyamos un sistema B, equivalente a A, que contenga cualquiera de las ecuaciones originales junto con la que hemos de encontrar por el método de «suma o resta», para eliminar la constante. En este caso, podemos multiplicar la segunda ecuación por 4 y restarle la primera

$$B\begin{cases} x^2 + 3xy + 2y^2 = 2 & \text{(del sistema } A) \\ x^2 - 4xy + 3y^2 = 0 & \text{(por eliminación de la constante)} \end{cases}$$

Puesto que la segunda ecuación tiene 0 en el lado derecho y tiene factores en el lado izquierdo, obtenemos

$$x^2 - 4xy + 3y^2 = 0 \leftrightarrow (x-3y)(x-y) = 0$$
$$\leftrightarrow x = 3y \quad \text{o} \quad x = y$$

Por tanto, tenemos que $A \leftrightarrow B \leftrightarrow (C \text{ o } D)$:

$$C\begin{cases} x^2 + 3xy + 2y^2 = 2 \\ x = 3y \end{cases} \qquad D\begin{cases} x^2 + 3xy + 2y^2 = 2 \\ x = y \end{cases}$$

Cualquier solución de C o de D será una solución de A y las soluciones de C y D las podemos encontrar por sustitución como en la Sección 10-3.

En el sistema C, sustituyamos $x = 3y$ en la primera ecuación para que quede

$$9y^2 + 9y^2 + 2y^2 = 2$$
$$20y^2 = 2$$
$$y^2 = \frac{1}{10}$$
$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}$$

ya que $x = 3y$,

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{\sqrt{10}} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x = -\dfrac{3}{\sqrt{10}} \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

Si sustituimos $x = y$ en D, tenemos

$$y^2 + 3y^2 + 2y^2 = 2$$
$$6y^2 = 2$$
$$y^2 = \frac{1}{3}$$
$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Puesto que $x = y$,

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Luego, el conjunto solución es

$$\left\{\left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right), \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$$

Ejemplo (b) Resolver para x y para y:

$$A\begin{cases} 2x^2 - 7xy + 5y^2 = 0 \\ 3xy - y^2 = 2 \end{cases}$$

Solución: La primera ecuación ya tiene término constante 0, lo que nos evita el primer paso del método descrito en el Ejemplo (a). Hagamos

$$B\begin{cases} (2x - 5y)(x - y) = 0 \\ 3xy - y^2 = 2 \end{cases}$$

que es equivalente a

$$C\begin{cases} 2x - 5y = 0 \\ 3xy - y^2 = 2 \end{cases} \quad \text{o} \quad D\begin{cases} x - y = 0 \\ 3xy - y^2 = 2 \end{cases}$$

Resolvamos ahora cada uno de estos sistemas por sustitución. El conjunto solución es

$$\left\{\left(\frac{5}{13}\sqrt{13}, \frac{2}{13}\sqrt{13}\right), \left(-\frac{5}{13}\sqrt{13}, -\frac{2}{13}\sqrt{13}\right), (1, 1), (-1, -1)\right\}$$

Ejemplo (c) Resolver simultáneamente

$$\begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 0 \\ x^2 - y^2 = 4 \end{cases}$$

Solución: En este caso, la primera ecuación tiene 0 a la derecha, pero el lado izquierdo no tiene factores. Podemos, sin embargo, usar la fórmula cuadrática para resolver esta ecuación para una variable en términos de la otra. Por ejemplo, resolviendo para x tenemos

$$x = \frac{-y \pm \sqrt{y^2 + 4y^2}}{2} = \left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)y$$

A partir de este punto, la solución se puede completar por el método descrito en los Ejemplos (a) y (b).

10-2 Ejercicios

Utilizar el método de esta sección para resolver los sistemas siguientes.

1. $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 0 \\ y^2 + xy = 6 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x^2 - 4xy - 5y^2 = 0 \\ 3x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 - 1 = 0 \\ xy + 2x^2 = 1 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 21 \\ xy = 4 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 2x^2 - 6xy + 4y^2 = 1 \\ 4xy = 3 \end{cases}$
6. $\begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 1 \\ 4y^2 + 6xy = 1 \end{cases}$
7. $\begin{cases} 63x^2 + 5xy - 28y^2 = 30 \\ 11x^2 + xy - 5y^2 = 5 \end{cases}$
8. $\begin{cases} x^2 + 5xy + y^2 = 5 \\ 3x^2 + 8xy + 3y^2 = 1 \end{cases}$
9. $\begin{cases} x^2 + xy + 4y^2 = 6 \\ x^2 - xy + 2y^2 = 8 \end{cases}$
10. $\begin{cases} 3x^2 + 7xy + 2y^2 = 3 \\ 2x^2 + 4xy - y^2 = 6 \end{cases}$
11. Completar la solución del sistema del Ejemplo (c), página 275.

10-6 SOLUCION DE PROBLEMAS

Uno de los objetivos más importantes de este curso es el de enseñar al estudiante a resolver problemas utilizando el álgebra. Hasta este momento hemos estudiado métodos para resolver algunos tipos de ecuaciones y de sistemas de ecuaciones. Es tiempo, pues, de resolver problemas.

En los siguientes ejercicios, hay tres tipos de problemas.

1. Un conjunto misceláneo de sistemas de grado superior. La mayoría de ellos son de uno de los tipos especiales estudiados en las Secciones 10-3, 10-4 y 10-5. Sin embargo, algunos pueden necesitar de una variante de dichos métodos. ¿Puede el estudiante ampliar su conocimiento para hacerlo?
2. Problemas verbales o de planteo. Usar una variable en estos problemas puede conducir a una ecuación lineal o cuadrática. Usar dos o más variables puede llevarnos a un sistema cuadrático o lineal de ecuaciones. Unos cuantos problemas comprenden ecuaciones de grado superior.
3. Ejercicios diseñados para conducir al estudiante a descubrir por sí mismo cosas acerca de las relaciones entre una ecuación o una desigualdad y su gráfica. ¿Puede el estudiante aprender sin ser enseñado?

10-3 Ejercicios

Emplear cualquier método para resolver los sistemas dados en los Ejercicios del 1 al 14.

1. $\begin{cases} 4x^2 + 2y^2 = 19 \\ 8x^2 - 3y^2 + 25 = 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 54 \\ x - 2y = 9 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 8x^2 - 63xy - 2y^2 + 126 = 0 \\ 5x^2 - 63xy - 17y^2 + 189 = 0 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 12x^2 - 2y^2 = -5 \\ 4y = 12x^2 - 11 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 4x^2 - 9y^2 = 0 \\ xy - 5y = 0 \end{cases}$
6. $\begin{cases} xy = 7 \\ 2x - 3y = 11 \end{cases}$
7. $\begin{cases} 8x^2 - 9y^2 - 21y + 6 = 0 \\ 3x^2 + y^2 - 14y - 3 = 0 \end{cases}$
8. $\begin{cases} y = x^2 - 3x + 3 \\ 3x + 2y = 6 \end{cases}$
9. $\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 = 5 \\ 3xy + y^2 = -5 \end{cases}$
10. $\begin{cases} 3x^2 - y^2 = 7 \\ 4x^2 + 7y^2 = 1 \end{cases}$
11. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^2 - xy + y^2 = 1 \end{cases}$
12. $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \\ 3\sqrt{x} - 2\sqrt{y} = 1 \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{5}{\sqrt{x}} + \dfrac{7}{\sqrt{y}} = 2 \\ \dfrac{10}{\sqrt{x}} + \dfrac{21}{\sqrt{y}} = -1 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x^4 - x^2y^2 - 2y^4 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 9 \end{cases}$

15. Considérese el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 16 \\ x = c, \quad \text{en donde } c \text{ es una constante} \end{cases}$$

(a) La gráfica de una ecuación tal como $x = c$ se llama a veces familia de líneas, puesto que hay una línea única para cada número real c, pero todas las líneas tienen una característica en común. Escójanse algunos números reales para c y grafíquense los elementos. (Por ejemplo, si $c = 3$, la ecuación de la línea es $x = 3$.) ¿Cuál es la característica común a esta familia de líneas?
(b) Graficar $x^2 + 4x^2 = 16$ sobre el mismo sistema coordenado que se haya usado en la parte (a).
(c) Resolver el sistema algebraicamente y determinar para qué valores de c el sistema tiene
 (1) dos soluciones reales iguales.
 (2) dos soluciones reales distintas.
 (3) soluciones no reales.
(d) Dar una interpretación gráfica de cada una de las tres situaciones algebraicas descritas en la parte (c).

16. Seguir las instrucciones del Ejercicio 15 para el sistema

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 16 \\ y = x + c \end{cases}$$

17. Seguir las instrucciones del Ejercicio 15 para el sistema

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 16 \\ y = cx \end{cases}$$

18. (a) Graficar los círculos $x^2 + y^2 = 25$ y $x^2 + y^2 = 9$.
(b) Describir algebraicamente el conjunto de puntos que quedan dentro del círculo $x^2 + y^2 = 25$.
(c) Describir algebraicamente el conjunto de puntos que quedan fuera del círculo $x^2 + y^2 = 9$.
(d) Describir algebraicamente el conjunto de puntos que quedan en el anillo entre los dos círculos.

19. Dibujar la gráfica de cada una de las desigualdades siguientes.

(a) $x^2 + 4y^2 \leq 16$ (c) $xy > 4$
(b) $y \leq 4x^2$ (d) $y > x^2 + 2x$

20. Dibujar la gráfica de cada uno de los sistemas de desigualdades siguientes.

(a) $\begin{cases} y > 4x^2 \\ x + y < 4 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x^2 + y^2 < 16 \\ y > 0 \\ x < 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 16 \\ |y| < 2 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x^2 + y^2 < 16 \\ x^2 + 4y^2 > 16 \end{cases}$

21. El área de un rectángulo es 480 m^2 y el perímetro es 94 m. Hallar las dimensiones del rectángulo.

22. El área del piso de un cuarto es de 140 m^2. Si cada dimensión se aumenta en 1 m, el área aumenta en 25 m^2. Hallar las dimensiones.

23. Si se aumentan el largo y el ancho de un cuarto en 1 m, el área del piso aumentaría en 25 m^2. Si se le disminuye 1 m, el área disminuiría 23 m^2. Hallar el área del piso del cuarto.

24. Un entero menor que 100 es 12 unidades mayor que el quíntuplo de la suma de sus dígitos. El cuadrado de la suma de sus dígitos es 39 unidades menor que el triple del entero consecutivo siguiente. Hallar el entero.

25. El perímetro de un triángulo rectángulo es de 30 cm y su área es de 30 cm^2. Hallar los tres lados.

26. La suma de las circunferencias de dos pasteles circulares es de 22π cm. El mayor contiene 11π cm^2 más de pastel. ¿Cuáles son los diámetros de los dos pasteles?

27. Un triángulo isósceles tiene un perímetro de 50 m. La altura desde la base (el lado no igual) es de 15 m. Hallar la base y los lados iguales.

28. Francisco condujo su carro durante 30 km a cierta velocidad. Después la aumentó en 20 km por hora y así continuó durante otros 30 km. El viaje total lo realizó en $1\frac{1}{4}$ horas. ¿A que velocidad iba al principio?

29. Una máquina produce 20 000 objetos en un cierto lapso. Un modelo más reciente puede producir 500 objetos más por hora y produciría los 20 000 en 2 horas menos. ¿Cuántos objetos por hora puede producir el nuevo modelo?

30. Nótese que $(2 + 3i)^2 = (4 - 9) + 12i = -5 + 12i$. Según esto, el número complejo $2 + 3i$ es una raíz cuadrada de $-5 + 12i$. En general, para encontrar una raíz cuadrada de un número complejo $a + bi$, debemos encontrar dos números reales, x e y, tales que

$$(x + yi)^2 = a + bi$$

Puesto que $(x + y)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$, debe resultar evidente que x e y deben ser soluciones de un sistema de ecuaciones cuadráticas. Aprovechar esta idea para encontrar las raíces cuadradas de cada uno de los números complejos siguientes.

(a) $8+6i$ (c) $2i$

(b) $-2-2i\sqrt{3}$ (d) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

31. Nótese que el número real $x+y\sqrt{a}$, $a \in N$, $x, y \in Q$, se comporta muy similarmente al número complejo $x+yi$. Por ejemplo,

$$(x+y\sqrt{a})+(u+v\sqrt{a})=(x+u)+(y+v)\sqrt{a}$$

$$(x+y\sqrt{a})(x-y\sqrt{a})=x^2-ay^2$$

$$(x+y\sqrt{a})^2=(x^2+y^2a)+2xy\sqrt{a}$$

(a) Efectuar las operaciones indicadas:

(1) $(5+3\sqrt{2})+(7-5\sqrt{2})-(3+2\sqrt{2})$

(2) $(3-2\sqrt{3})(3+2\sqrt{3})$

(3) $(5+3\sqrt{5})^2$

(b) Hacer ver que el recíproco de $x+y\sqrt{a}$ es

$$\frac{x-y\sqrt{a}}{x^2-ay^2}.$$

(c) Usar un método similar al que se describe en el Ejercicio 30, para encontrar las raíces cuadradas de cada uno de los números reales que siguen.

(1) $3-2\sqrt{2}$

(2) $29+12\sqrt{5}$

(3) $\frac{7}{12}+\frac{1}{3}\sqrt{3}$

Algebra de matrices y determinantes 11

11-1 MATRICES

Una matriz real es un conjunto ordenado de números reales arreglados en renglones y columnas en forma de rectángulo. Es costumbre presentar un arreglo tal de números entre grandes paréntesis (también se usan frecuentemente corchetes, [ ]).

Ejemplo (a)

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 5 \\ 1 & -\frac{3}{4} & \pi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

Una matriz se puede clasificar de acuerdo con sus dimensiones, es decir, cuántos renglones y cuántas columnas tiene. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 5 \\ 1 & -\frac{3}{4} & \pi \end{pmatrix}$$

tiene dos renglones y tres columnas, por lo que se llama matriz 2×3. Por otra parte,

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 3 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$$

es una matriz 3×2. Un par ordenado $\left(\frac{3}{2}, -8\right)$ es una matriz 1×2. Cualquier matriz con el mismo número de renglones que de columnas se llama *matriz cuadrada*.

Usualmente se emplean letras mayúsculas para representar las matrices y letras minúsculas para sus elementos. A veces se utilizan subíndices.

Ejemplo (b)

$$K = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Nótese que en la matriz A se utilizan dos subíndices para cada elemento, los cuales dan sus números de renglón y de columna. Así, a_{ij} es el elemento en el renglón i, columna j. Obsérvese que, por ejemplo, a_{23} es el elemento del segundo renglón y tercera columna.

El estudio de las matrices se presenta en forma muy natural en relación con los sistemas de ecuaciones. Por ejemplo, los coeficientes de x y y en el sistema

$$\begin{cases} x - 3y = 8 \\ 5x + 2y = -9 \end{cases}$$

forman la matriz $2 \times 2 \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, los términos independientes forman la matriz $2 \times 1 \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \end{pmatrix}$, y resolver el sistema equivale a buscar los elementos x, y de la matriz 2×1 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Resulta entonces muy útil pensar en la solución de un sistema tal en forma similar a la solución de una ecuación con una incógnita. Para resolver $4x = 5$, multiplicamos ambos lados por el inverso multiplicativo de 4 para tener la x despejada en un lado. Del mismo modo podemos pensar en el sistema anterior en su forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \end{pmatrix}$$

y «multiplicar» ambos lados por el «inverso multiplicativo» de $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ para tener $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ despejada en un lado. Como ya se puede ver, si vamos a hacer esto es necesario que primero desarrollemos las reglas para las operaciones en el conjunto de las matrices.

Para complementar este análisis sobre las matrices se recomienda leer el muy ameno libro *The Mathematics of Matrices*, de Philip J. Davis, Ginn (Blaisdell), Boston, 1965.

11-2 IGUALDAD DE MATRICES

Vamos a usar la letra M para representar al conjunto de las matrices. Por ejemplo, $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \in M$; $\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M$, etc.

Definición de igualdad de matrices Si A y B son dos matrices en M, entonces $A = B$ significa que

1. A y B tienen las mismas dimensiones;
2. todo elemento de A es el mismo número real que el correspondiente elemento de B en el mismo renglón y la misma columna.

Ejemplo (a) $$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -8 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -8 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Ejemplo (b) $$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -8 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -8 \\ 5 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Ejemplo (c) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$ si, y solo si, $x = 7$ y $y = 6$.

A partir de esta definición es fácil ver que las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva de la igualdad siguen siendo válidas.

Ejemplo (d) Demostrar que la propiedad de simetría de la igualdad es válida para las matrices 2×2.

Solución:

Dado que: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, y que $A = B$.

Demostrar que $B = A$.

Demostración: Puesto que $A = B$, debemos tener que $a = e$, $b = f$, $c = g$ y $d = h$. (¿Por qué?) De ahí que por la propiedad de simetría de la igualdad de los números reales, $e = a$, $f = b$, $g = c$ y $h = d$. Por tanto, $B = A$, por la definición de igualdad de matrices.

11-3 SUMA DE MATRICES

Definición de la suma de dos matrices Si A y B son dos matrices que tienen las mismas dimensiones, entonces $A + B$ es una matriz en la que cada elemento es la suma de los elementos del mismo renglón y columna de A y B.

Ejemplo (a)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -6 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & -6 \\ 0 & 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+5 & 3+0 & 5+(-6) \\ 1+0 & -6+8 & 0+1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 7 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Notemos que la suma de dos matrices que tengan dimensiones diferentes no está definida. Según eso, si un subconjunto de M ha de ser *cerrado* ante la suma, sus matrices deben tener las mismas dimensiones.

Notemos que si la suma anterior se hubiese hecho en el orden inverso, el resultado hubiese sido el mismo:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -6 \\ 0 & 8 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+2 & 0+3 & -6+5 \\ 0+1 & 8+(-6) & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

De esto se deduce que es fácil demostrar que la suma de matrices es *conmutativa*, es decir, que $A + B = B + A$.

Es conveniente que nos preguntemos ahora si se cumplen algunos otros de los postulados de campo para M, ante la suma.

- ¿Es asociativa la suma?
- ¿Hay una identidad aditiva? ¿Qué matriz hay que sumar a $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ para obtener $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$?
- ¿Hay un inverso aditivo? ¿Qué matriz hay que sumar a $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ para obtener la matriz identidad aditiva?

Las respuestas a estas preguntas llegan rápidamente y se pueden demostrar con facilidad. (Las demostraciones son similares a las del Capítulo 8.)

- La suma es asociativa.
- La matriz identidad aditiva para el subconjunto de matrices $m \times n$ es la matriz $m \times n$ cuyos elementos son todos ceros.
- Para una matriz $m \times n$, A, la matriz inversa aditiva, $-A$ es la matriz $m \times n$ formada por los elementos negativos de los elementos correspondientes de A.

Ejemplo (b) Hallar la matriz inversa aditiva de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & \sqrt{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Solución: La inversa aditiva de A es

$$-A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

ya que

$$A + (-A) = \begin{pmatrix} 1 & -4 & \sqrt{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 & -\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+(-1) & -4+4 & \sqrt{3}+(-\sqrt{3}) \\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} & 0+0 & \frac{1}{3}+(-\frac{1}{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y esta es la matriz identidad aditiva para las matrices 2×3.

Resulta ahora fácil definir la resta de matrices.

Definición Si $A, B \in M$ y si A y B tienen las mismas dimensiones, entonces $A - B = A + (-B)$.

Ejemplo (c)

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5+(-2) & 3+(-5) \\ -8+(-3) & 4+(-7) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5-2 & 3-5 \\ -8-3 & 4-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -11 & -3 \end{pmatrix}$$

Es evidente que la resta se puede efectuar restando los elementos correspondientes.

11-4 MULTIPLICACION ESCALAR

Parece muy natural usar la notación $2A$ para representar $A + A$. Entonces podemos escribir

$$2\begin{pmatrix} r & s & t \\ u & v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s & t \\ u & v & w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r & s & t \\ u & v & w \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r+r & s+s & t+t \\ u+u & v+v & w+w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r & 2s & 2t \\ 2u & 2v & 2w \end{pmatrix}$$

De modo que construyamos la definición siguiente para la multiplicación de una matriz por un número real (llamado «escalar» para contrastarlo con «matriz»).

Definición de multiplicación escalar Si $k \in R$ y $A \in M$, entonces kA es una matriz en la que cada elemento es el producto de k y el elemento de A en el mismo renglón y la misma columna. Por tanto, $Ak = kA$.

Ejemplo (a)

$$\sqrt{2}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ \sqrt{2}\sqrt{2} & \sqrt{2}\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ 2 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Ejemplo (b)

$$(x-2)\begin{pmatrix} x+2 & 0 \\ 1 & x-2 \\ \dfrac{1}{x-2} & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2-4 & 0 \\ x-2 & (x-2)^2 \\ 1 & 3x-6 \end{pmatrix}$$

11-1 Ejercicios

1. Hallar x tal que

$$\begin{pmatrix} 2 & x & \sqrt{2} \\ 3 & \frac{1}{2} & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & \sqrt{2} \\ \frac{9}{3} & \frac{2}{4} & -3 \end{pmatrix}$$

2. ¿Cuáles de las matrices siguientes son iguales?

$$A = \begin{pmatrix} 8 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 8 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 2^3 & 0 \\ -2^{-1} & 5^0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 8+0 \\ -\frac{1}{2}+1 \end{pmatrix}$$

3. Hallar u y v tales que

$$\begin{pmatrix} 3 & u \\ v & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2v-7 \\ u-1 & 4 \end{pmatrix}$$

4. Hallar s y t tales que

$$\begin{pmatrix} 3s+2t \\ s+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \end{pmatrix}$$

5. Demostrar que no existen números reales x e y tales que

$$\begin{pmatrix} x+y & 2x+y \\ x-y & 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Efectuar las operaciones indicadas con las matrices y simplificar en los Ejercicios del 6 al 17.

6. $\begin{pmatrix} 3 & 8 & -1 \\ -5 & -7 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -7 & -4 \\ -6 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 7 & \frac{5}{2} \\ -8 & -\frac{15}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & \frac{3}{4} \\ \frac{13}{2} & -\frac{7}{4} \end{pmatrix}$

8. $(2 \ \ 3 \ \ 4) + (-7 \ \ -8 \ \ -9)$

9. $4\begin{pmatrix} 8 & -3 & -9 \\ 6 & -5 & -12 \end{pmatrix}$

10. $-5\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 2 & -8 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

11. $2\begin{pmatrix} 3 & -\frac{1}{2} & 2 & \sqrt{5} \\ 1 & 6 & \frac{2}{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix} - 8\begin{pmatrix} 4 & \frac{2}{3} & 9 & 3\sqrt{5} \\ 7 & -\frac{15}{8} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{5} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & \sqrt{\frac{2}{5}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sqrt{18} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{48} & \sqrt{\frac{5}{2}} \end{pmatrix}$

13. $2x\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ \frac{1}{x} \end{pmatrix} + (x-1)\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ \frac{-2}{x-1} \end{pmatrix}$

14. $x^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} \frac{x^2}{x^2-9} & \frac{1}{x-3} \\ \frac{6}{x^2-9} & \frac{1}{(x-3)^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{6x+9}{x^2-9} & \frac{1}{x+3} \\ \frac{1}{x+3} & \frac{1}{x^2-9} \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{x} & \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{1-x} & \frac{1}{1-x} & \frac{-1}{1-x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{x} & \frac{x-1}{x^2} \\ \frac{1}{x-1} & \frac{1}{x^2-1} & 1+x \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} \sqrt{x^2+4} & \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}} \\ \sqrt{4-x^2} & \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{4x^2+16} & \sqrt{x^2+4} \\ \dfrac{-4}{\sqrt{4-x^2}} & \dfrac{-\sqrt{4-x^2}}{4-x^2} \end{pmatrix}$

18. Dadas las matrices 2×2 $A = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix}$, demostrar que $C = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}$.

(a) $A + B = B + A$
(b) $(A + B) + C = A + (B + C)$
(c) Si $h, k \in R$, entonces $h(kA) = (hk)A$.
(d) Si $k \in R$, entonces $k(A + B) = kA + kB$.
(e) Si $A = B$ y $B = C$, entonces $A = C$.
(f) Si $A = B$, entonces $A + C = B + C$.
(g) Si $A = B$, y $k \in R$, entonces $kA = kB$.

19. Nombrar cada una de las propiedades expresadas en el Ejercicio 18. (Por ejemplo, el Ejercicio 18 (a) expresa la *propiedad conmutativa de la suma de matrices.*)

Resolver cada una de las ecuaciones siguientes. Suponer que se cumplen las propiedades de la igualdad y de la suma y multiplicación escalar para todas las matrices. (Véase el Ejercicio 18.)

20. Hallar la matriz X tal que

$$3X + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 1 & 13 \end{pmatrix}$$

21. Hallar la matriz X tal que

$$5\left[\begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix} + X\right] = 2X$$

22. Hallar la matriz A tal que

$$\frac{15}{16}A - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{32}{3} \end{pmatrix} = \frac{5}{12}A + I$$

en donde $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

11-5 MULTIPLICACION DE MATRICES

Mencionamos antes que deseamos representar el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x - 3y = 8 \\ 5x + 2y = -9 \end{cases}$ mediante la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \end{pmatrix}$$

en donde aparece el *producto* de dos *matrices* a la izquierda. Si este producto ha de ser una matriz igual a $\begin{pmatrix} 8 \\ -9 \end{pmatrix}$, entonces, según la definición de igualdad de matrices, debe ser la matriz 2×1 $\begin{pmatrix} 1x - 3y \\ 5x + 2y \end{pmatrix}$. Es decir, que

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x - 3y \\ 5x + 2y \end{pmatrix}$$

Aprovecharemos esta idea para dar la definición general.

Definición de multiplicación de matrices Si A es una matriz $m \times n$ y B es una matriz $n \times p$, entonces el producto AB es la matriz $m \times p$ cuyos elementos se obtienen en la forma siguiente: para evaluar el elemento del renglón i, columna j, se multiplican los elementos del renglón i de A por los respectivos elementos de la columna j de B y se suman los productos.

Ejemplo (a)

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a + 4d & 3b + 4e & 3c + 4f \\ 5a + 6d & 5b + 6e & 5c + 6f \end{pmatrix}$$

Observemos que, por ejemplo, el elemento del primer renglón tercera columna del producto se encuentra usando los elementos del primer renglón de la primera matriz y los de la tercera columna de la segunda matriz.

Ejemplo (b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 0 \\ 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 4+3\cdot 1+5\cdot 8+2\cdot 2 & 2\cdot 7+3\cdot 0+5\cdot 1+2\cdot 3 \\ 0\cdot 4+1\cdot 1+6\cdot 8+8\cdot 2 & 0\cdot 7+1\cdot 0+6\cdot 1+8\cdot 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 55 & 25 \\ 65 & 30 \end{pmatrix}.$$

Es importante notar que el número de columnas de la primera matriz debe ser igual al de renglones de la segunda matriz —de otro modo, el producto no está definido—. Por tanto, el conjunto de *todas* las matrices *no es cerrado* ante la multiplicación.

Otro resultado de esta definición es que la *multiplicación no es conmutativa.* En general, $AB \neq BA$.

El estudiante debe comprobar por sí mismo que, sin embargo, la *multiplicación sí es asociativa* y que hay matrices *identidad multiplicativa.* [Véanse los Ejercicios 21 (b) y 20 (a).]

La identidad multiplicativa por la izquierda para el subconjunto de matrices $m \times n$ es la matriz cuadrada $m \times m$

$$I_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

cuyos elementos son todos 0, excepto los que se encuentran en la *diagonal principal* (la diagonal que corre de la esquina superior izquierda hasta la inferior derecha), que son todos 1.

¿Cuál es la matriz identidad multiplicativa por la derecha para el subconjunto de matrices $m \times n$?

Ejemplo (c) Demostrar que si $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & 7 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$ se multiplica por la derecha por $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, el producto es A misma.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & 7 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 1+6\cdot 0 & 5\cdot 0+6\cdot 1 \\ -3\cdot 1+7\cdot 0 & -3\cdot 0+7\cdot 1 \\ 2\cdot 1+(-8)\cdot 0 & 2\cdot 0+(-8)\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & 7 \\ 2 & -8 \end{pmatrix} = A$$

Usaremos I (sin subíndice) para representar $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Casi todas las propiedades de la igualdad, familiares al estudiante, deben comprobarse para las matrices. La mayor diferencia se debe a la falta de conmutatividad en la multiplicación. De ahí que sea posible multiplicar ambos lados de una ecuación matricial por la misma matriz solo si ambas multiplicaciones se hacen en el mismo orden. Según eso, podemos escribir: Si $A = B$, entonces $AC = BC$; pero no: Si $A = B$, entonces $AC = CB$.

11-6 MATRIZ INVERSA MULTIPLICATIVA

Solo las matrices cuadradas pueden tener inversas multiplicativas.

Ejemplo (a) Hallar la inversa multiplicativa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$.

Solución: Sea $A^{-1} = \begin{pmatrix} u & x \\ v & y \end{pmatrix}$. la inversa multiplicativa de A. Deseamos entonces encontrar valores para u, v, x y y. Primero debemos tener $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u & x \\ v & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Por qué?

Así, pues, $\begin{pmatrix} 2u + 3v & 2x + 3y \\ 6u + 10v & 6x + 10y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Por qué?

Esto nos da los sistemas

$$\begin{cases} 2u + 3v = 1 \\ 6u + 10v = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 6x + 10y = 1 \end{cases}$$

de donde obtenemos $u = 5$, $v = -3$, $x = -\frac{3}{2}$ y $y = 1$. Luego, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{3}{2} \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. El lector debe comprobar esto verificando que $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Siguiendo el mismo proceso con la matriz general 2×2, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, podemos demostrar:

Teorema 11-1 Si $ad \neq bc$, entonces la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tiene como inversa multiplicativa a la matriz

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{d}{ad - bc} & \dfrac{-b}{ad - bc} \\[2ex] \dfrac{-c}{ad - bc} & \dfrac{a}{ad - bc} \end{pmatrix}$$

Demostración: **(Véase el Ejercicio 28, página 288.)**

Ejemplo (b) Resolver el sistema $\begin{cases} x - 3y = 8 \\ 5x + 2y = -9 \end{cases}$

Solución: Escribimos la ecuación matricial $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \end{pmatrix}$ y la interpretamos como $AZ = B$, en donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando ambos lados por A^{-1}:

$A^{-1}(AZ) = A^{-1}B$	(¿Por qué?)
$(A^{-1}A)Z = A^{-1}B$	(¿Por qué?)
$IZ = A^{-1}B$	(¿Por qué?)
$Z = A^{-1}B$	(¿Por qué?)

Según la fórmula del Teorema 11-1, podemos computar A^{-1}.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{17} & \dfrac{3}{17} \\[2ex] \dfrac{-5}{17} & \dfrac{1}{17} \end{pmatrix}$$

Luego

$$Z=\begin{pmatrix}\frac{2}{17} & \frac{3}{17}\\ \frac{-5}{17} & \frac{1}{17}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\ -9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{17}\cdot 8+\frac{3}{17}\cdot(-9)\\ \frac{-5}{17}\cdot 8+\frac{1}{17}\cdot(-9)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{-11}{17}\\ \frac{-49}{17}\end{pmatrix}$$

De modo que $x=\frac{-11}{17}$, $y=\frac{-49}{17}$.

11-2 Ejercicios

Efectuar las operaciones indicadas.

1. $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\\ 6 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\\ 3 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5\\ 5 & -3\end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix}-3 & 0 & 9\\ 4 & -6 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 7 & 0 & -9 & -1\\ 0 & 7 & -4 & -1\end{pmatrix}$

4. $(a \quad b \quad c)\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 8\\ -6 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix}5 & 8\\ -6 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix}13 & 8\\ 8 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & -8\\ -8 & 13\end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 5\\ 8 & 13 & 21\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix}3\\ -5\\ 7\\ -9\end{pmatrix}(2 \quad -4 \quad 6 \quad 8)$

10. (a) $\left[\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 6 & -2\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -1\end{pmatrix}$

    (b) $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 6 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -1\end{pmatrix}\right]$

11. Usar dos métodos para escribir una matriz simple igual a la siguiente y comprobar que el resultado es el mismo en cada caso.

$$\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 7 & 4 & -9\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\\ 7 & 8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & -3\\ -5 & -4\\ -7 & -8\end{pmatrix}\right]$$

12. Dar un contraejemplo de que $AB = BA$, empleando matrices 2×2.

13. Dar un contraejemplo de que $AB = BA$, usando una matriz 2×3 y una 3×2.

14. Dar un contraejemplo de que «si $A = B$, entonces $AC = CB$» usando matrices 2×2 para A y B y una matriz 2×3 para C.

En los Ejercicios 15 y 16, expresar la matriz columna dada, como el producto de dos matrices. Por ejemplo, $\begin{pmatrix}2x+3y\\ 4x+5y\end{pmatrix}$ **se puede escribir como** $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix}3x+4y+5z\\ 2x+y-z\\ 3x+7y-4z\end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix}2x\\ 3y\\ 6z\end{pmatrix}$

17. Encontrar A^{-1} si $A=\begin{pmatrix}55 & 13\\ 13 & 3\end{pmatrix}$. Usar el Teorema 11-1.

18. Encontrar A^{-1} si $A=\begin{pmatrix}-8 & 21\\ 21 & -55\end{pmatrix}$. Usar el Teorema 11-1.

19. Usar el método del Ejemplo (a), Sección 11-6 para encontrar A^{-1}, en donde

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$$

20. Si $A=\begin{pmatrix}m & n\\ p & q\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $O=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, y

$K=\begin{pmatrix}k & 0\\ 0 & k\end{pmatrix}$ (en donde $k \in R$), demostrar que

(a) $AI = IA = A$
(b) $A \cdot O = O$
(c) $kA = KA$
(d) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

21. Dadas las matrices 2×2 $A=\begin{pmatrix} m & n \\ p & q\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} s & t \\ u & v\end{pmatrix}$, demostrar que $C=\begin{pmatrix} w & x \\ y & z\end{pmatrix}$.

(a) $(kA)B = k(AB)$, en donde $k \in R$
(b) $(AB)C = A(BC)$
(c) $A(B + C) = AB + AC$
(d) $(B + C)A = BA + CA$
(e) Si $A = B$, entonces $AC = BC$.

22. Nombrar cada una de las propiedades expresadas en el Ejercicio 21. (Por ejemplo, el Ejercicio 21 (a) expresa la *propiedad asociativa de las multiplicaciones escalar y matricial.*

23. Resolver para X: $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4\end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 7 \\ 4 & 8 & -3\end{pmatrix}$.

(*Sugerencia*: Multiplicar ambos lados por la inversa multiplicativa del coeficiente de X.)

24. Resolver para A:
$$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 1 & -1\end{pmatrix}\left[A - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2\end{pmatrix} A$$

25. Resolver para Z la ecuación matricial $AZ = B$, en donde $A = \begin{pmatrix} 55 & 13 \\ 13 & 3\end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}$, y $B = \begin{pmatrix} 8 \\ 5\end{pmatrix}$ multiplicando ambos lados por A^{-1}. (Véase el Ejemplo (b), Sección 11-6.)

26. Resolver el sistema $\begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ -2x + 2y = -5\end{cases}$ usando el método del Ejemplo (b), Sección 11-6.

27. Aplicar el método del Ejemplo (b), Sección 11-6, para resolver el sistema
$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 8 \\ 2x + y + 3z = 5 \\ 3x + 4y + 5z = -3\end{cases}$$
(*Sugerencia*: Véase el Ejercicio 19 para A^{-1}.)

28. Derivar la fórmula para A^{-1} dada en el Teorema 11-1. Usar el método indicado en el Ejemplo (a), Sección 11-6. Sean
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} u & x \\ v & y\end{pmatrix}$$

29. Sea $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

(a) Hallar Q^2, Q^3, Q^4 y Q^5.
(b) Demostrar que $Q^3 + Q^4 = Q^5$.

11-7 DETERMINANTES

Un *determinante* es un número real asociado con una matriz cuadrada mediante una función llamada *función determinante*. Usualmente representamos la función determinante por det. Su dominio es el conjunto de las matrices cuadradas y su imagen es R, el conjunto de los números reales. Así, pues, $\det = \{(A, y) \mid y = \det(A)$, A es una matriz cuadrada, $y \in R\}$. He aquí algunos ejemplos de pares ordenados de la función determinante:

$$\left(\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -12 & 6\end{pmatrix}, 6\right), \quad \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 5\end{pmatrix}, 11\right), \quad ((-8), -8)$$

Por tanto, 6 es el determinante de $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -12 & 6\end{pmatrix}$, o $\det\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -12 & 6\end{pmatrix} = 6$.

Otra notación para $\det(A)$ es $|A|$. Según eso,

$$\det \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -12 & 6\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -12 & 6\end{vmatrix} = 6$$

Una matriz $n \times n$ se llama matriz de orden n y su determinante, determinante de orden n. Definiremos $\det(A)$ como sigue, si A es una matriz de primero o de segundo orden:

Definición El determinante de una matriz 1×1, (a), es a misma. El determinante de una matriz 2×2, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$, es $ad - bc$.

Ejemplo (a) $\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -12 & 6\end{vmatrix} = 7 \cdot 6 - (-3)(-12) = 42 - 36 = 6.$

Ejemplo (b) $|-8| = -8$ (en este caso $|\ |$ no significa valor absoluto).

La definición del determinante de una matriz de orden superior se dará en las Secciones 11-9 y 11-10.

Hay algunas propiedades importantes de los determinantes. Las demostraremos para determinantes de segundo orden, utilizando la definición.

Teorema Si A' es una matriz cuyos renglones son las columnas de A, entonces $\det(A') = \det(A)$.

Demostración (Para determinantes de segundo orden): Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; entonces $A' = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. $\det(A') = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - cb = ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \det(A)$

Teorema Si B es una matriz que se obtiene al multiplicar por $k \in R$ los elementos de uno de los renglones (o columnas) de A, entonces $\det(B) = k \cdot \det(A)$.

Demostración (para determinantes de segundo orden): Sean $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} ka & kb \\ c & d \end{pmatrix}$. Entonces

$$\begin{aligned} \det(B) &= kad - kbc && \text{(¿Por qué?)} \\ &= k(ad - bc) && \text{(¿Por qué?)} \\ &= k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} && \text{(¿Por qué?)} \\ &= k \cdot \det(A) && \text{(¿Por qué?)} \end{aligned}$$

La demostración es similar si es otro el renglón, u otra la columna, que está multiplicado (a) por k.

Ejemplo (c) Hacer ver que 12 es factor de $\begin{vmatrix} 72 & 137 \\ 84 & 915 \end{vmatrix}$

Solución: $\begin{vmatrix} 72 & 137 \\ 84 & 915 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 \cdot 6 & 137 \\ 12 \cdot 7 & 915 \end{vmatrix} = 12 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 137 \\ 7 & 915 \end{vmatrix}$.

Cuando los elementos de un renglón de una matriz están todos multiplicados por el mismo número $k \in R$, podemos decir que hemos multiplicado el renglón por dicho número. Se dice, también, que el nuevo renglón es múltiplo del original.

Teorema Si B es una matriz que se obtiene remplazando un renglón (o una columna) de B por la suma de él más un múltiplo de otro renglón (o columna), entonces $\det(B) = \det(A)$.

Demostración (para determinantes de segundo orden): Sean $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c + ka & d + kb \end{pmatrix}$. Entonces

$$\begin{aligned} \det(B) &= a(d + kb) - b(c + ka) \\ &= ad + akb - bc - bka \\ &= ad - bc \\ &= \det(A) \end{aligned}$$

Ejemplo (d) Demostrar que $\begin{vmatrix} 65 & 3 \\ 64 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -10 \\ 64 & 13 \end{vmatrix}$.

Solución: Multiplicamos el segundo renglón por -1 y lo sumamos al primero:

$$\begin{vmatrix} 65 & 3 \\ 64 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 65 + (-1)64 & 3 + (-1)13 \\ 64 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -10 \\ 64 & 13 \end{vmatrix}$$

11-8 REGLA DE CRAMER

Usaremos algunos de los anteriores teoremas para derivar una fórmula para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, por determinantes. Sean

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad \text{y} \quad D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Entonces

$$xD = x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1x & b_1 \\ a_2x & b_2 \end{vmatrix} \qquad \text{(¿Por qué?)}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1x + b_1y & b_1 \\ a_2x + b_2y & b_2 \end{vmatrix} \qquad \text{(¿Por qué?)}$$

$$= \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad \text{(¿Por qué?)}$$

Similarmente,

$$yD = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \qquad \text{(el estudiante debe llegar a esto)}$$

Por tanto,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{D} \quad \text{y} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{D} \quad \text{si } D \neq 0$$

Este resultado, conocido como la regla de Cramer, era ya conocido por los chinos allá por el siglo trece.

Teorema 11-2 Regla de Cramer (para determinantes de segundo orden)

si $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, entonces la solución de $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ es

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{D}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{D}$$

Ejemplo Resolver para x y y: $\begin{cases} 5x - 3y = 7 \\ 6x + 9y = 12 \end{cases}$

Solución:

$$D = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 45 + 18 = 63$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 12 & 9 \end{vmatrix}}{63} = \frac{63 + 36}{63} = \frac{11}{7}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 12 \end{vmatrix}}{63} = \frac{60 - 42}{63} = \frac{2}{7}$$

Nótese que para encontrar x, el determinante del numerador se obtiene remplazando en D los coeficientes de x por las constantes. Similarmente para y.

11-3 Ejercicios

En los Ejercicios del 1 al 8, hallar el valor de cada uno de los determinantes dados:

1. $\det(A)$, en donde $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 8 & -5\end{pmatrix}$

2. $\det\begin{pmatrix}3 & 8\\ 7 & -9\end{pmatrix}$

3. $\begin{vmatrix}7 & -6\\ 4 & -3\end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix}-5 & -\frac{3}{2}\\ \frac{4}{9} & -\frac{5}{8}\end{vmatrix}$

5. $\det(B)$, en donde $B=(4)$

6. $\det\ (-12)$

7. $\begin{vmatrix}a-x & a\\ a & a+x\end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix}\frac{7}{x-5} & \frac{2}{x-5}\\ \frac{1}{15x} & \frac{5}{6x}\end{vmatrix}$

Demostrar los teoremas de los Ejercicios del 9 al 14, para determinantes de matrices de segundo orden.

9. **Teorema** Si dos renglones (o columnas) de una matriz son idénticos, entonces su determinante es 0.

10. **Teorema** Si un renglón (o una columna) de una matriz es múltiplo de otro renglón (o columna), entonces su determinante es 0.

11. **Teorema** Si un renglón (o una columna) de una matriz está formado exclusivamente por ceros, entonces su determinante es 0.

12. **Teorema** Si B es una matriz que se obtiene intercambiando dos de los renglones (o columnas) de A, entonces $\det(B) = -\det(A)$.

13. **Teorema** Si I es la matriz identidad multiplicativa, entonces $\det(I) = 1$.

14. $\det(A^{-1})=\dfrac{1}{\det(A)}$

15. Dar un contraejemplo para rechazar la proposición:
si $\det(A) = \det(B)$, entonces $A = B$ 291

16. Dar un contraejemplo para rechazar la proposición:
$\det(kA) = k \cdot \det(A)$

17. Dar un contraejemplo para rechazar la proposición:
$\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$

18. Demostrar que $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & e\\ c & f\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & b+e\\ c & d+f\end{vmatrix}$.

Resolver para x y y los sistemas dados en los Ejercicios del 19 al 24. Utilizar la regla de Cramer.

19. $\begin{cases}3x-4y=8\\ 5x+7y=6\end{cases}$

20. $\begin{cases}\frac{2}{3}x-\frac{5}{8}y=\frac{5}{6}\\ \frac{1}{8}x+\frac{7}{12}y=-\frac{2}{3}\end{cases}$

21. $\begin{cases}x\sqrt{5}-y=\sqrt{5}\\ 2x\sqrt{5}+y\sqrt{5}=1\end{cases}$

22. $\begin{cases}x\sqrt{3}-5y=2+\sqrt{3}\\ 2x\sqrt{3}+4y=-1-\sqrt{3}\end{cases}$

23. $\begin{cases}x+ky=1\\ k^2x+y=1\end{cases}$

24. $\begin{cases}ax+by=a\\ bx+ay=a\end{cases}$

11-9 DETERMINANTES DE TERCER ORDEN

No es posible dar una fórmula sencilla para definir un determinante de orden n, de modo que definiremos primeramente el determinante de tercer orden como una ilustración.

Definición

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix}a_2 & c_2\\ a_3 & c_3\end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}$$

Observemos que cada término contiene el producto de un elemento del primer renglón y un determinante de segundo orden llamado su *menor*. El menor de un elemento es el determinante de la matriz que queda de eliminar el renglón y la columna en que aparece el citado elemento.

Ejemplo (a) En la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -4 & 0 & -6 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ hallar el menor de 5, el elemento del tercer renglón y segunda columna.

Solución: Eliminemos el tercer renglón y la segunda columna:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -4 & 0 & -6 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Luego, el menor de 5 es $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & -6 \end{vmatrix} = -14.$

Ejemplo (b) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -4 & 0 & -6 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, hallar $\det(A)$.

Solución:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -4 & 0 & -6 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -4 & -6 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (30) - 3 \cdot (-4) + (-2) \cdot (-20) = 82$$

Las propiedades de los determinantes enunciadas en la Sección 11-7 deben ser demostradas también para los determinantes de tercer orden.

Como ejemplo de la forma en que esto se puede hacer, demostraremos el teorema siguiente usando las propiedades ya conocidas de los *determinantes de segundo orden*.

Teorema Si B es una matriz que se obtiene de multiplicar por $k \in R$ los elementos de uno de los renglones (o columnas) de A, entonces $\det(B) = k \cdot \det(A)$.

Demostración: Sean

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} a_1 & kb_1 & c_1 \\ a_2 & kb_2 & c_2 \\ a_3 & kb_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\det(B) = a_1 \begin{vmatrix} kb_2 & c_2 \\ kb_3 & c_3 \end{vmatrix} - kb_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & kb_2 \\ a_3 & kb_3 \end{vmatrix}$$

$$= ka_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - kb_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + kc_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \qquad \text{(¿Por qué?)}$$

$$= k\left[a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \right]$$

$$= k \cdot \det(A)$$

La demostración es similar si cualquier otro renglón o columna es el multiplicado por k.

11-10 DETERMINANTES DE ORDEN n

Al hablar acerca de la matriz A usamos a_{ij} para representar al elemento del renglón i, columna j. Así, por ejemplo, a_{23} es el elemento del segundo renglón, tercera columna.

El menor de un elemento a_{ij} de una matriz cuadrada lo denotaremos por M_{ij}.

Ejemplo (a) En la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & -6 & 7 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ hallar a_{23} y M_{23}.

Solución: a_{23} es el elemento colocado en el segundo renglón y tercera columna. Luego, $a_{23} = 7$,

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 3 \cdot 3 = -9$$

El *cofactor* de a_{ij} es $(-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ y lo denotaremos por C_{ij}.

Ejemplo (b) Dado el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & -6 & 7 \\ 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$, hallar C_{23}.

Solución: $C_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-9) = 9.$

Puesto que la expresión $(-1)^{i+j}$ siempre es 1 o -1, dependiendo de la posición de a_{ij}, los signos asociados con los cofactores se pueden leer del «tablero» de + y − que forman dichos signos:

$$\begin{matrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \end{matrix}$$

Definición del determinante de orden n Si A es una matriz $n \times n$, entonces $\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} + \cdots + a_{1n}C_{1n}$.

Ejemplo (c) Hallar $\det(A)$ si

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -7 & 8 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\det(A) = 3\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} + (-7)\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-16) - 4(0) + (-7)(16) - 8(-16)$$

$$= -32$$

Observemos cómo se alternan los signos de los términos, debido al patrón de «tablero» determinado por $(-1)^{i+j}$. Dado que cada término es un producto de un elemento del primer renglón y su menor, con signo, este cálculo del determinante se llama *desarrollo por los menores del primer renglón.*

Las más importantes propiedades de los determinantes se pueden demostrar a partir de las anteriores definiciones. Ya hemos demostrado algunas para determinantes de segundo orden y hemos indicado cómo se pueden construir las demostraciones para órdenes superiores, a partir de las propiedades ya conocidas para determinantes de órdenes inferiores. Le quedan al estudiante algunas otras demostraciones. (Por ejemplo, véanse los Ejercicios del 17 al 25, página 296.)

Teorema 11-3 Propiedades de los determinantes

Las propiedades siguientes valen para toda matriz de orden n y para sus determinantes.

1. Si A' es una matriz cuyos renglones son las columnas de A, entonces $\det(A') = \det(A)$.
2. Si B es una matriz que se obtiene de multiplicar por $k \in R$ los elementos de uno de los renglones (o columnas) de A, entonces $\det(B) = k \cdot \det(A)$.
3. Si B es una matriz que se obtiene remplazando un renglón (o columna) de A por la suma de él y un múltiplo de otro renglón (o columna), entonces $\det(B) = \det(A)$.
4. Si B es una matriz que se obtiene al intercambiar dos de los renglones (o columnas) de A, entonces $\det(B) = -\det(A)$.
5. Si un renglón (o columna) de una matriz es un múltiplo de otro renglón (o columna), entonces el determinante de la matriz es 0.
6. Si todos los elementos de un renglón (o columna) de una matriz son 0, entonces su determinante es 0.
7. El determinante de una matriz se puede desarrollar por los menores de cualquier renglón (o columna). (Esta propiedad es una consecuencia de la primera y cuarta propiedades.)

Ejemplo (d) Desarrollar det(A) del Ejemplo (c) por menores de la segunda columna.
***Solución*:**

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -7 & 8 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -4\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & -7 & 8 \\ -1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= -4(0) + 4(-8) - 2(0) + 1(0) \quad = -32$$

¿Qué habría sucedido si hubiésemos desarrollado este determinante por menores del segundo renglón? Solo habríamos tenido que calcular un determinante de tercer orden, puesto que todos los elementos del segundo renglón, excepto uno, son 0.

Si no hay ceros en un determinante, podemos «generarlos» sumando múltiplos apropiados de un renglón (o columna), a otro (a).

Ejemplo (e) Simplificar los cálculos de $\det\begin{pmatrix} -8 & 6 & 13 \\ -4 & 8 & 33 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$**, generando ceros en todos los elementos de un renglón o de una columna, excepto en uno.**
***Solución*:**

$$\begin{vmatrix} -8 & 6 & 13 \\ -4 & 8 & 33 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 6 & 13 \\ 4 & 8 & 33 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

Sumamos la segunda columna a la primera (propiedad 3, Teorema 11-3)

$$= \begin{vmatrix} -2 & 6 & -5 \\ 4 & 8 & 9 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Sumamos (-3) veces la segunda columna a la tercera (propiedad 3, Teorema 11-3)

$$= 0\begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix}$$

Desarrollamos por menores del tercer renglón

$$= 2$$

No importa cuáles sean los elementos representados por los asteriscos, puesto que los coeficientes de sus determinantes son 0.

Es fácil demostrar la regla de Cramer para sistemas de n ecuaciones con n incógnitas. Su uso se muestra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo (f) Resolver para x, y y z:

$$\begin{cases} 3x + y + z = 6 \\ x + y - z = 0 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases}$$

Solución: Tenemos que $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2$. Entonces

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{D}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}}{D}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{D}$$

$$x = \frac{-4}{-2} = 2, \quad y = \frac{2}{-2} = -1, \quad z = \frac{-2}{-2} = 1$$

La solución es $(2, -1, 1)$.

11-4 Ejercicios

1. Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 7 & -1 & 8 \end{pmatrix}$, hallar

   (a) a_{32} (e) C_{32}
   (b) a_{22} (f) C_{22}
   (c) M_{32} (g) $\det(A)$
   (d) M_{22}

Evaluar los determinantes dados en los Ejercicios del 2 al 6.

2. $\det(B)$, en donde $B = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 9 \\ 6 & -5 & 4 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -8 & -1 & 7 \\ -6 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 7 & -1 \\ -1 & -2 & 6 & 6 \\ 0 & 6 & -2 & 0 \end{vmatrix}$

7. Mediante el uso de la propiedad 3, Teorema 11-3, hallar un determinante equivalente al siguiente en el que los elementos de la tercera columna, excepto uno, sean ceros.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 7 & 3 & 5 & 8 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \\ -6 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Mediante la propiedad 3, Teorema 11-3, generar ceros para todos los elementos, excepto uno, de un renglón o una columna de los determinantes siguientes, y después evaluarlos.

8. $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 3 & 2 & 6 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 6 & -1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 7 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & 0 \\ 0 & 1 & x & x^2 \\ x^2 & 0 & 1 & x \\ x & x^2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Usar la regla de Cramer para resolver los sistemas siguientes.

11. $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 1 \\ 5x + 2y - z = 3 \\ 6x - 7y = 9 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x+4y-6z=2 \\ 7x-3y+8z=-5 \\ 2x+4y-9z=6 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x-y+2u-3v=5 \\ 2x+3y-u-v=15 \\ x+5y+4v=11 \\ 5x+7u-2v=0 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 5x-3y+2u-3v=0 \\ 6x-5y=8 \\ 7y+7v=10 \\ 4y-5u+6v=-3 \end{cases}$

15. Resolver para x:

$$\begin{vmatrix} x-3 & 0 & 1 \\ 1 & x-3 & 0 \\ 0 & 1 & x-3 \end{vmatrix}=0$$

16. Resolver para x y comprobar:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & 3 \\ x^2 & 2^2 & 3^2 \end{vmatrix}=0$$

En los Ejercicios del 17 al 25, dar las demostraciones que se indican para determinantes de tercer orden. Supóngase que ya se sabe que las propiedades 1 a 7 del Teorema 11-3, página 294, son válidas para determinantes de segundo orden. Igualmente, supóngase que todas las propiedades que preceden a la que se va a demostrar valen para los determinantes de tercer orden. (Véase la demostración de la propiedad 2, página 292.)

17. Demostrar la propiedad 1.
18. Demostrar la propiedad 2, si el primer renglón se multiplica por k.
19. Demostrar la propiedad 3, para la suma de un múltiplo del renglón 2 al renglón 3. (*Sugerencia*: Usar el hecho dado en el Ejercicio 18 de los Ejercicios 11-3.)
20. Demostrar la propiedad 4, intercambiando los renglones 2 y 3.
21. Demostrar la propiedad 5.
22. Demostrar la propiedad 6.
23. Demostrar la propiedad 7, para desarrollo por menores de la segunda columna.
24. Demostrar la regla de Cramer. (*Sugerencia*: Véase la derivación de la regla de Cramer para determinantes de segundo orden.)
25. Demostrar que $\begin{vmatrix} a_1+d & b_1+e & c_1+f \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} d & e & f \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

26. Hacer ver que el lector puede demostrar la propiedad 4 del Teorema 11-3, para un determinante de orden n usando las propiedades 3 y 2.
27. Resolver para x y y usando la regla de Cramer:

$$\begin{cases} ax+(a+d)y=a+2d \\ (a+3d)x+(a+4d)y=a+5d \end{cases}$$

28. Cada elemento del conjunto $S=\{112, 518, 322\}$ es divisible entre 14. El determinante de orden 3 que se forma asociando cada número de S con un diferente renglón y cada cifra con una columna definida,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 8 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}=14$$

también es divisible entre 14. Hacer ver que esto es una generalización del resultado de que cualquier factor común de n enteros arbitrarios, cada uno de n dígitos, también es factor del determinante de orden n análogamente construido. (Propuesto por L. P. Zukowski, *American Mathematical Monthly*, enero 1968.)

12 Polinomios y funciones polinomiales

12-1 POLINOMIOS

El tema de este capítulo lo constituyen expresiones de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

en donde los coeficientes $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_2, a_1, a_0$ son elementos de R y $a_n \neq 0$.

Recordemos que en el Capítulo 4 definimos el *grado* de un término como el exponente de x en dicho término. El primer término se llamaba *término inicial*, su coeficiente era el *coeficiente inicial* y su grado, el *grado de la expresión*. El término que no contenía x, decíamos que era de grado 0 y se llamaba *término independiente* o *término constante*.

Si $x \in R$, una expresión tal define una *función polinomial real* sobre los reales.

Si x es un indeterminado, la expresión es una *forma polinomial* sobre los reales o simplemente, un *polinomio real*.

Recordemos que decir que el símbolo x es un indeterminado, significa que no está remplazando a ningún número real, sino que sirve más bien como un sustituyente, para que en las operaciones con los polinomios, las sumas y productos de coeficientes queden asignadas a sus lugares apropiados.

Se puede lograr la misma meta sin usar un símbolo para un indeterminado, definiendo un polinomio simplemente en términos de sus coeficientes. Las operaciones de suma y multiplicación en el conjunto de los polinomios pueden, según eso, quedar definidas en términos de los coeficientes solos. Así, pues, en lugar de escribir $x^2 - 3x - 4$, podemos poner $(1 \; -3 \; -4)$. De este modo, una matriz renglón que contenga tres elementos representa un polinomio de segundo grado.

Este tratamiento nos permite tener una mejor visión interior de la estructura del sistema de polinomios, puesto que libera nuestro pensamiento de la dependencia de experiencias previas con las potencias de x. En segundo lugar, es precisamente en esta forma como se guardan los polinomios en la memoria de un computador electrónico y son usados en computación.

Ejemplo (a) Escribir $x^3 - 9x$ como un conjunto ordenado de números reales.

Solución: Interpretamos los términos faltantes como términos con coeficiente 0: $x^3 - 9x = x^3 + 0x^2 - 9x + 0$. Entonces, el polinomio es $(1 \quad 0 \quad -9 \quad 0)$.

Similarmente, podemos interpretar a x como $1x + 0$ y ponerla como $(1 \; 0)$. Esto debe abrirnos los ojos: Revela que x es simplemente un símbolo de un elemento en particular del conjunto de los polinomios.

También podemos escribir $x^2 = (1\ 0\ 0)$, $x^3 = (1\ 0\ 0\ 0)$, etc. Constantes tales como -5 se pueden ver como polinomios de grado cero. Por ejemplo, -5 se puede poner como una matriz renglón de un solo elemento: (-5).

Estas ideas nos motivan a escribir:

Definición Un *polinomio de grado n* (en donde $n \in W$), es un conjunto ordenado de $n + 1$ números reales:

$$(a_n\ \ a_{n-1}\ \ a_{n-2}\ \ \cdots\ \ a_2\ \ a_1\ \ a_0), \qquad a_n \neq 0$$

La matriz (0) es un *polinomio sin grado*.

Hay que construir una definición especial para (0) a causa del requisito de que a_n no sea cero en un polinomio de grado n.

A los elementos de la matriz los llamaremos *términos* del polinomio y los identificaremos por sus grados. Por ejemplo, en $(1\ \ -3\ \ -4)$, 1 es el término de segundo grado, -3 es el de primer grado y -4 es el de grado cero o término independiente.

Cuando decimos que dos polinomios son el *mismo* polinomio, es porque tenemos en mente la idea siguiente:

Definición de igualdad Dos polinomios p y q son *iguales* si, y solo si, son del mismo grado y cada elemento de q es el mismo número real que el correspondiente elemento de q. Entonces escribimos $p = q$.

Esta es esencialmente la misma definición que teníamos para la igualdad en el conjunto de las matrices. Según eso, las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva de la igualdad continuarán siendo válidas.

12-2 OPERACIONES CON POLINOMIOS

En los capítulos anteriores sumábamos expresiones polinomiales sumando para ello los coeficientes de términos semejantes. Sin embargo, recordemos que si un término inicial en una suma tiene coeficiente 0, el término se omite.

Ejemplo (a) Sumar $-5x^2 + 8x - 4$ y $5x^2 + 7x + 3$.

Solución:

$$\begin{array}{r} -5x^2 + 8x - 4 \\ 5x^2 + 7x + 3 \\ \hline 15x - 1 \end{array}$$

Aprovecharemos estas ideas para definir la suma en el sistema de polinomios.

Definición de la suma Si p y q son polinomios, entonces $p + q$ es el polinomio que se obtiene en la forma siguiente:

1. Se suman los términos correspondientes. Aquellos términos en los que el polinomio de mayor grado no tiene términos correspondientes en el otro polinomio, permanecen sin cambio en $p + q$.
2. Se omiten los ceros que aparecen a la izquierda del primer término no nulo, excepto en el caso en que todos los términos sean 0, pues entonces se queda el 0 en el lugar de grado cero.

Ejemplo (b) Hallar la suma de $(3\ \ -5\ \ -4\ \ 2) + (8\ \ 4\ \ 5)$.

Solución:

$$\begin{aligned} (3\ \ -5\ \ -4\ \ 2) + (8\ \ 4\ \ 5) &= (3\ \ -5+8\ \ -4+4\ \ 2+5) \\ &= (3\ \ 3\ \ 0\ \ 7) \end{aligned} \qquad \text{o} \qquad \begin{array}{rrrr} 3 & -5 & -4 & 2 \\ & 8 & 4 & 5 \\ \hline 3 & 3 & 0 & 7 \end{array}$$

Ejemplo (c)

$(-5 \quad 8 \quad -4) + (5 \quad 7 \quad 3) = (8 + 7 \quad -4 + 3) = (15 \quad -1)$ — Ya que $-5 + 5 = 0$, no hay término de segundo grado

Ejemplo (d)

$(-5 \quad 8 \quad 4) + (5 \quad -8 \quad -4) = (0)$ — Puesto que la suma de todos los elementos correspondientes es 0, solo queda 0 en el lugar de grado cero

La multiplicación también debe ser definida de modo que sea consistente con el procedimiento analizado en el Capítulo 4 para multiplicar expresiones.

Definición de la multiplicación

1. Sean p y q polinomios no nulos:

   $p = (a_m \quad a_{m-1} \quad \cdots \quad a_2 \quad a_1 \quad a_0)$, $q = (b_n \quad b_{n-1} \quad \cdots \quad b_2 \quad b_1 \quad b_0)$

   Entonces, $p \cdot q$ es el polinomio cuyos términos se obtienen como sigue: el término de grado k es la suma de todos los productos posibles $a_i b_j$ cuyos subíndices sumen k, esto es, tales que $i + j = k$, en donde $i, j \in W$ y $i \leq m, j \leq n$.
2. Si p o q son (0), entonces $p \cdot q = (0)$.

Ejemplo (e) **Sean $p = (a_2 \quad a_1 \quad a_0)$ y $q = (b_3 \quad b_2 \quad b_1 \quad b_0)$. Hallar el término de tercer grado de $p \cdot q$.**

Solución: Escribimos $a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_0 b_3$, puesto que esta es la suma de todos los productos $a_i b_j$ tales que $i + j = 3$ e $i \leq 2, j \leq 3$. Es decir, estos son todos los productos posibles cuyos subíndices suman 3.

Ejemplo (f) **Sean $p = (1 \quad -3 \quad 4)$ y $q = (2 \quad 5 \quad -7 \quad -1)$. Hallar $p \cdot q$.**

Solución: Sea c_k el término de grado k del producto. Entonces

$$c_0 = a_0 b_0 = 4 \cdot (-1) = -4$$
$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = 4 \cdot (-7) + (-3)(-1) = -25$$
$$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 4 \cdot 5 + (-3)(-7) + 1 \cdot (-1) = 40$$
$$c_3 = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 = 4 \cdot 2 + (-3) \cdot 5 + 1 \cdot (-7) = -14$$
$$c_4 = a_1 b_3 + a_2 b_2 = (-3) \cdot 2 + 1 \cdot 5 = -1$$
$$c_5 = a_2 b_3 = 1 \cdot 2 = 2$$

Por tanto, $p \cdot q = (2 \quad -1 \quad -14 \quad 40 \quad -25 \quad -4)$.

La multiplicación se puede arreglar de manera conveniente como se muestra en seguida. Nótese su similitud con el procedimiento para multiplicar enteros no negativos.

		2	5	−7	−1
			1	−3	4
		8	20	−28	−4
	−6	−15	21	3	
2	5	−7	−1		
2	−1	−14	40	−25	−4

Una consecuencia inmediata de la definición de multiplicación es que el producto de dos polinomios de grados m y n, respectivamente, tiene grado $m + n$. Nótese que, por ejemplo, el producto anterior de polinomios de segundo y tercer grados tiene grado 5.

No vamos a examinar en detalle la estructura del sistema de polinomios. El estudiante debe convencerse, sin embargo, de que

1. se cumplen todas las propiedades de campo para la suma y la multiplicación excepto la propiedad del inverso multiplicativo;
2. se cumple la ley de la cancelación de la multiplicación.

Un sistema con estas propiedades se llama *dominio entero* o *dominio de integridad.*

Notemos que si multiplicamos el polinomio de grado n, $p = (a_n \quad a_{n-1} \quad a_{n-2} \quad \cdots \quad a_2 \quad a_1 \quad a_0)$ por el polinomio de grado 0, (-5), obtenemos $(-5a_n \quad -5a_{n-1} \quad -5a_{n-2} \quad \cdots \quad -5a_2 \quad -5a_1 \quad -5a_0)$. Es conveniente interpretar esto como el producto escalar de $-5 \in R$ y p. Según eso, $-5p = (-5) \cdot p$. Se puede utilizar una idea similar para sumar un polinomio de grado cero.

Definición de operaciones escalares Si $k \in R$ y p es un polinomio, entonces $kp = (k) \cdot p$ y $p + k = p + (k)$.

Ahora bien, si vemos a x como el polinomio particular $(1 \quad 0)$, entonces cuando escribimos $x^2 + 7x + 8$, queremos decir $(1 \quad 0) \cdot (1 \quad 0) + (7) \cdot (1 \quad 0) + (8)$ y, según las definiciones de suma y multiplicación,

$$
\begin{aligned}
x^2 + 7x + 8 &= (1 \quad 0) \cdot (1 \quad 0) + 7(1 \quad 0) + (8) \\
&= (1 \quad 0 \quad 0) + (7 \quad 0) + (8) \\
&= (1 \quad 7 \quad 8)
\end{aligned}
$$

Así, pues, hay una relación directa entre las dos formas de representar los polinomios.

En un análisis posterior regresaremos a la práctica común de escribir los polinomios como potencias de x, entendiendo siempre que $x = (1 \quad 0)$, a menos que se especifique otra cosa.

12-1 Ejercicios

1. Dado el polinomio $5x^4 - 4x^2 + x - 3$, hallar
   (a) el grado
   (b) el término inicial
   (c) el coeficiente inicial
   (d) a_4
   (e) a_3
   (f) a_0

Clasificar los polinomios dados en los Ejercicios del 2 al 8, según que sean polinomios sobre los enteros no negativos (W), los enteros (I), los racionales (Q) o los reales (R), escribiendo las letras que correspondan. Si se trata de un polinomio sobre más de un conjunto, poner cada letra que corresponda.

2. $5x^2 - 3x + 2$
3. $9x^2 + 4$
4. $(3 \quad -\sqrt{2} \quad 3)$
5. $(1 \quad -\frac{1}{2})$
6. -4
7. x^3
8. $4{,}3x^2 - 2x + \pi$
9. Escribir cada uno de los polinomios siguientes como una matriz de coeficientes.
   (a) $2x^2 + 6x - 5$
   (b) $x^2 - 3x$
   (c) $x + 7$
   (d) $27x^3 - 1$
   (e) $2x$
   (f) x^4
   (g) 0
   (h) 3
   (i) $\dfrac{x^2 - 3x + 4}{2}$
10. Escribir cada uno de los polinomios siguientes en la «forma x».
   (a) $(8 \quad -7 \quad -\frac{1}{2} \quad 4)$
   (b) $(6 \quad 0)$
   (c) $(1 \quad 0 \quad -9)$
   (d) (-8)
   (e) $(1 \quad 0 \quad 0)$
   (f) $(1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)$
11. Dar el grado de los polinomios siguientes.
   (a) $(2 \quad 0 \quad 8)$
   (b) $(\frac{3}{8} \quad -\frac{1}{3} \quad 0 \quad 7)$
   (c) (4)
   (d) $(89 \quad -5)$
   (e) (0)
   (f) $(1 \quad 0 \quad 5) + (-4 \quad 8)$
12. Dar el grado de los polinomios siguientes.
   (a) $(-8 \quad 0 \quad 4) + (8 \quad -4 \quad 0)$
   (b) $(6 \quad 1 \quad 9 \quad 0) + (-5 \quad 4 \quad 3)$
   (c) $(1 \quad 0) \cdot (9 \quad 5 \quad 2)$
   (d) $(4 \quad -3 \quad -2) + (-4 \quad 3 \quad 2)$

(e) $(0)\cdot(4 \quad 9 \quad -6)$
(f) $(6 \quad -8 \quad 7)\cdot(9 \quad 7 \quad -5 \quad 2)$

13. ¿Cuáles de los polinomios siguientes son iguales?
   (a) $x^2 - 3x + 6$, en donde $x = (1 \quad 0)$
   (b) $(1 \quad -3 \quad 6)$
   (c) $(-1 \quad 3 \quad -6)$
   (d) $(0 \quad 1 \quad -3 \quad 6)$
   (e) $y^2 - 3y + 6$, en donde $y = (1 \quad 0)$
   (f) $x^2 - 3x + 6$, en donde $x = 7$

14. Comentar si $(0 \quad 1 \quad -3 \quad 6)$ está definido como un polinomio o no.

Efectuar las siguientes operaciones con polinomios. Hacer las multiplicaciones verticalmente, siguiendo el Ejemplo (f) de la página 299.

15. $(4 \quad -8 \quad 3 \quad 7) + (7 \quad 3 \quad -2)$
16. $(1 \quad 3 \quad -5 \quad 6) + (-1 \quad -3 \quad 0 \quad -6)$
17. $(-2 \quad 3 \quad 0 \quad -\frac{1}{2}) + (2 \quad -3 \quad 0 \quad \frac{1}{2})$
18. $[(5 \quad 8 \quad 3) + (6 \quad -4 \quad -3)] + (5 \quad 2 \quad 0 \quad -5)$
19. $(5 \quad 8 \quad 3) + [(6 \quad -4 \quad -3) + (5 \quad 2 \quad 0 \quad -5)]$
20. $(a_2 \quad a_1 \quad a_0)\cdot(b_3 \quad b_2 \quad b_1 \quad b_0)$
21. $(5 \quad -3 \quad 2)\cdot(8 \quad -5 \quad 3 \quad -2)$
22. $(1 \quad -5)\cdot(1 \quad 5)$
23. $(2 \quad 1)\cdot(1 \quad -3)$
24. $(1 \quad 1)\cdot(1 \quad -1 \quad 1)$
25. $(1 \quad -3 \quad 5)\cdot(1 \quad 3 \quad -5)$

12-3 ALGORITMO DE LA DIVISION DE POLINOMIOS

¿Existe algún entero no negativo q, tal que $7819 = 83 \cdot q$? La respuesta se puede determinar mediante el procedimiento familiar de la división, llamado «algoritmo de la división»:*

$$\begin{array}{r} 94 \\ 83\overline{)7819} \\ \underline{747} \\ 349 \\ \underline{332} \\ 17 \end{array}$$

Dado que el residuo es 17, la respuesta es no. Sin embargo, el algoritmo nos muestra que $7819 = 83 \cdot 94 + 17$; es decir, que 7819 se puede expresar como el producto de 83 por otro entero no negativo más un número *menor que* 83.

En general, si p y d son enteros no negativos, entonces el algoritmo de la división nos permite escribir

$$p = qd + r, \qquad \text{en donde } q,\ r \in W \qquad \text{y} \qquad r < d$$

Nos podemos hacer una pregunta similar respecto a los polinomios: ¿Podemos encontrar un polinomio q, tal que $4x^3 + 17x^2 + 8x - 5 = (x + 3)\cdot q$?

Si es así, q tiene que ser un polinomio de segundo grado con término inicial $4x^2$, para que obtengamos $4x^3$ como término inicial del producto. Pero $4x^2(x+3)$ da $4x^3 + 12x^2$ en vez de $4x^3 + 17x^2$. Con esto en mente, podemos poner

$$\begin{aligned} 4x^3 + 17x^2 + 8x - 5 &= 4x^3 + 12x^2 + 5x^2 + 8x - 5 \\ &= 4x^2(x+3) + 5x^2 + 8x - 5 \end{aligned}$$

En este caso el residuo $5x^2 + 8x - 5$ es de grado 2.

Ahora el problema se convierte en: ¿Podemos expresar $5x^2 + 8x - 5$ como un múltiplo de $x + 3$? Notamos que $5x(x + 3)$ sería $5x^2 + 15x$ en lugar de $5x^2 + 8x$. De modo que ponemos

$$\begin{aligned} 4x^3 + 17x^2 + 8x - 5 &= 4x^2(x+3) + 5x^2 + 15x - 7x - 5 \\ &= 4x^2(x+3) + 5x(x+3) - 7x - 5 \end{aligned}$$

Ahora el residuo $-7x - 5$ es de grado 1.

* La palabra «algoritmo», en el sentido en que se usa aquí, significa «procedimiento». Viene del nombre del escritor árabe al-Khowârizmî, quien alrededor del 825 a. de J. C., escribió un libro explicando el uso de los numerales indo-arábigos.

¿Podemos expresar $-7x - 5$ en términos de $x + 3$? El producto $-7(x + 3)$ sería $-7x - 21$ en lugar de $-7x - 5$. Por tanto, podemos poner

$$\begin{aligned} 4x^3 + 17x^2 + 8x - 5 &= 4x^2(x + 3) + 5x(x + 3) - 7x - 21 + 16 \\ &= 4x^2(x + 3) + 5x(x + 3) - 7(x + 3) + 16 \end{aligned}$$

en donde el residuo 16 es de grado 0.

Finalmente, entonces, $4x^3 + 17x^2 + 8x - 5 = (x + 3)(4x^2 + 5x - 7) + 16$. Dado que 16 es un residuo que no es un múltiplo posible de $x + 3$, la respuesta a la pregunta es: No, no hay un polinomio q tal que $4x^3 + 17x^2 + 8x - 5 = (x + 3) \cdot q$. Sin embargo, sí *podemos* expresar $4x^3 + 17x^2 + 8x - 5$ como el producto de $x + 3$ y otro polinomio, más la constante 16 (que se puede interpretar como un polinomio de grado 0).

El procedimiento anterior ilustra el importante teorema que sigue.

Teorema 12-1 Algoritmo de la división

Si p y d son dos polinomios y $d \neq (0)$, entonces existen dos polinomios únicos, q y r, tales que

$$p = q \cdot d + r$$

en donde r tiene grado menor que d o bien $r = (0)$.

La demostración se puede hacer de manera muy similar a la ilustración precedente, pero no la hemos de dar aquí.

Si dividimos ambos lados de $p = q \cdot d + r$, entre d, podemos expresarlo como una división:

$$\frac{p}{d} = q + \frac{r}{d}$$

A causa de esto, p se llama *dividendo*, d *divisor*, q *cociente* y r *residuo o resto*. Recordemos que un cociente tal $\frac{p}{q}$, se llama forma racional.

El procedimiento ilustrado antes se puede arreglar más brevemente en la forma

$$\begin{array}{r@{}l} & \;4x^2 + 5x - 7 \\ x + 3 & \overline{)4x^3 + 17x^2 + 8x - 5} \\ & \underline{4x^3 + 12x^2} \\ & \qquad\quad 5x^2 + 8x \\ & \qquad\quad \underline{5x^2 + 15x} \\ & \qquad\qquad\quad -7x - 5 \\ & \qquad\qquad\quad \underline{-7x - 21} \\ & \qquad\qquad\qquad\quad 16 \end{array}$$

Esto se puede resumir como sigue:

1. Arreglar los términos del dividendo y del divisor en potencias descendentes del indeterminado, dejando espacios para los términos faltantes.
2. Obtener el primer término del cociente dividiendo el término inicial del dividendo entre el término inicial del divisor.
3. Multiplicar el divisor por este término del cociente y restar el producto del dividendo.
4. Usar el residuo de esta resta, junto con los términos no utilizados del divi-

dendo, como nuevo dividendo y seguir los pasos 2 a 4 repetidamente, obteniendo cada vez un nuevo término del cociente.

5. Cuando el residuo tenga grado menor que el del divisor (o que sea 0), el proceso ha terminado.

Ejemplo (a) Expresar $x^4 + x^3 + 2x + 15$ como el producto de $2x^2 - 6x + 4$ y otro polinomio, más un residuo de grado menor que 2.

Solución:

$$
\begin{array}{r|l}
 & \tfrac{1}{2}x^2 + 2x + 5 \\
\hline
2x^2 - 6x + 4 & x^4 + x^3 \qquad\qquad + 2x + 15 \\
 & x^4 - 3x^3 + 2x^2 \\
\hline
 & \quad 4x^3 - 2x^2 + 2x \\
 & \quad 4x^3 - 12x^2 + 8x \\
\hline
 & \qquad 10x^2 - 6x + 15 \\
 & \qquad 10x^2 - 30x + 20 \\
\hline
 & \qquad\qquad 24x - 5
\end{array}
$$

Luego, $x^4 + x^3 + 2x + 15 = (\tfrac{1}{2}x^2 + 2x + 5)(2x^2 - 6x + 4) + 24x - 5$.

El trabajo se puede hacer más rápidamente usando la forma de coeficientes de los polinomios:

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & \tfrac{1}{2} & 2 & 5 & & \\
\hline
2 \quad -6 \quad 4 & 1 & 1 & 0 & 2 & 15 \\
 & 1 & -3 & 2 & & \\
\hline
 & & 4 & -2 & 2 & \\
 & & 4 & -12 & 8 & \\
\hline
 & & & 10 & -6 & 15 \\
 & & & 10 & -30 & 20 \\
\hline
 & & & & 24 & -5
\end{array}
$$

Luego, $(1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 2 \;\; 15) = (\tfrac{1}{2} \;\; 2 \;\; 5) \cdot (2 \;\; -6 \;\; 4) + (24 \;\; -5)$.

12-2 Ejercicios

En los Ejercicios del 1 al 4, usar el algoritmo de la división, poniendo los polinomios en términos de las potencias de x y no como matrices de coeficientes.

1. Expresar $x^3 - 4x^2 + 4x - 1$ como el producto de $x - 1$ y otro polinomio.
2. Expresar $6x^4 - 5x^3 + 11x^2 + 15x - 4$ como el producto de $3x^2 + 2x - 1$ y otro polinomio, más un residuo de grado 1.
3. Expresar $5x - 4x^2 - 7 + 6x^3$ como el producto de $x - 2$ y otro polinomio, más un residuo constante.
4. Expresar $x^3 - 20x^2 + 5x - 7 + 6x^4$ como el producto de $-3x + 1 + 2x^2$ y otro polinomio, más un residuo de grado 1.

En los Ejercicios del 5 al 10, usar el algoritmo de la división, expresando los polinomios como matrices de coeficientes y no en términos de las potencias de x. En cada caso, hallar q y r (en donde el grado de r sea menor que el de d o bien que $r = 0$), tales que $p = qd + r$.

5. $p = (10 \;\; 3 \;\; 7 \;\; 14 \;\; -6)$, $d = (2 \;\; -1 \;\; 3)$
6. $p = (2 \;\; 3 \;\; 4 \;\; 5 \;\; -3)$, $d = (2 \;\; 2)$
7. $p = 3x^5 + 11x^4 - 15x^2 + 7x + 9$, $d = x^2 + 2x - 1$
8. $p = x^4 - 2x + 1$, $d = x + 1$
9. $p = a^6 + 4a^2 - 3a^4 - 1$, $d = a^3 - 3a^2 + 3a - 1$; $a = (1 \;\; 0)$
10. $p = 32t^5 + 1$, $d = 2t + 1$; $t = (1 \;\; 0)$

En los Ejercicios del 11 al 14, expresar la respuesta de la división en la forma cociente + $\dfrac{\text{residuo}}{\text{divisor}}$. Usar el algoritmo de la división, ya sea con las potencias de x o con matrices de coeficientes.

11. $(x^6 - 2x^3 + 1) \div (x^2 - 3x + 2)$
12. $(x^5 + 3ax^4 - 7a^2x^3 + 7a^3x^2 - 4a^4x + a^5) \div (2x^2 - ax + a^2)$, $a \in R$
13. $(64x^6 - 16a^3x^3 + a^6) \div (4x^2 - 4ax + a^2)$, $a \in R$
14. $(x^4 + x^3y - 8x^2y^2 + 20xy^3 - 15y^4) \div (x^2 + 3xy - 5y^2)$, $y \in R$

12-4 FUNCIONES POLINOMIALES

Si $x \in R$, entonces $x^2 - 3x - 4$ es un número real. Por ejemplo, si $x = 5$, entonces $x^2 - 3x - 4$ es el número real $5^2 - 3 \cdot 5 - 4$, o sea 6. Por tanto, $x^2 - 3x - 4$ expresa la regla para evaluar los segundos elementos de los pares ordenados de la función

$$f = \{(x,\ y) \mid y = x^2 - 3x - 4,\ x \in R\}$$

Escribimos $f(x) = x^2 - 3x - 4$, $f(5) = 6$, etc., como en el Capítulo 6. La función f se llama función polinomial de segundo grado, puesto que $(1 \quad -3 \quad -4)$ es un polinomio de segundo grado.

De este modo, cada polinomio de grado n sobre los reales define una función polinomial real de grado n. Se puede hacer ver que hay una correspondencia uno a uno entre la totalidad de polinomios sobre los reales y la totalidad de funciones polinomiales y que esta correspondencia se conserva para sumas y productos. Por tanto, ambos conjuntos son isomorfos ante dichas operaciones.*

Por ejemplo, si $p = (1 \quad -3 \quad -4)$ corresponde a la función f definida por $f(x) = x^2 - 3x - 4$, para toda $x \in R$ y si $q = (-8 \quad -6)$ corresponde a la función g definida por $g(x) = -8x - 6$, para toda $x \in R$, entonces $p + q$ corresponde a la función $f + g$ definida por $y = f(x) + g(x)$ para toda $x \in R$ y $p \cdot q$ corresponde a la función fg definida por $y = f(x) \cdot g(x)$, para toda $x \in R$.

A causa de esta correspondencia, podemos llevar el algoritmo de la división al conjunto de las funciones polinomiales reales.

Ejemplo Sea

$$f = \{(x, y) \mid y = 3x^3 - 2x + 7\}$$
$$h = \{(x, y) \mid y = x^2 - x + 1\} \qquad \text{para toda } x \in R$$

Encontrar dos funciones g y r tales que $f(8) = g(8)h(8) + r(8)$, en donde r tenga grado 1 o menor (o $r = 0$).

Solución: Dividamos los polinomios correspondientes,

$$\begin{array}{rrr|rrrr}
 & & & 3 & 3 & & \\
\hline
1 & -1 & 1 & 3 & 0 & -2 & 7 \\
 & & & 3 & -3 & 3 & \\
\hline
 & & & & 3 & -5 & 7 \\
 & & & & 3 & -3 & 3 \\
\hline
 & & & & & -2 & 4
\end{array}$$

mediante el algoritmo de la división obtenemos:

$$(3 \quad 0 \quad -2 \quad 7) = (3 \quad 3) \cdot (1 \quad -1 \quad 1) + (-2 \quad 4)$$

Según eso,

$$g = \{(x, y) \mid y = 3x + 3\}$$

y

$$r = \{(x, y) \mid y = -2x + 4\}$$

son tales que

$$f(x) = g(x)h(x) + r(x) \qquad \text{para toda } x \in R$$

En particular,

$$f(8) = g(8)h(8) + r(8)$$

* Por esta razón a veces se usa la notación $p(x) = x^2 - 3x - 4$.

Comprobación: Sustituimos $x = 8$ y tenemos que

$f(8) = 1527, \quad h(8) = 57, \quad g(8) = 27, \quad r(8) = -12$

De modo que $g(8)h(8) + r(8) = 27 \cdot 57 + (-12) = 1539 - 12 = 1527.$

12-5 EL TEOREMA DEL RESIDUO Y EL TEOREMA DEL FACTOR

Recordemos que un *cero* de una función f es un número a tal que $f(a) = 0$. También decimos que a es una *raíz* de la ecuación $f(x) = 0$.

Durante siglos, los problemas de encontrar los ceros de una función polinomial dada (o las raíces de una ecuación polinomial) han preocupado a las mentes más agudas de los matemáticos en cada rincón del mundo civilizado. Dos importantes herramientas empleadas para trabajar en este problema son el teorema del residuo y el teorema del factor.

Teorema 12-2 Teorema del residuo

Si f es una función polinomial real y si $a \in R$, entonces $f(a)$ es igual al residuo de dividir $f(x)$ entre $x - a$.

Demostración: El uso del algoritmo de la división permite expresar $f(x)$ en la forma $f(x) = g(x)(x - a) + r$, en donde r es un residuo constante que no contiene x, ya que $x - a$ es de grado 1. Por tanto,

$$\begin{aligned} f(a) &= g(a)(a - a) + r \\ &= g(a) \cdot 0 + r \\ &= r \end{aligned}$$

Ejemplo (a) Si $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 5x + 1$, hallar $f(2)$ en dos formas diferentes.

Solución 1: De acuerdo con la definición de la notación funcional,

$$\begin{aligned} f(2) &= 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 1 \\ &= 2 \cdot 8 - 3 \cdot 4 - 5 \cdot 2 + 1 \\ &= -5 \end{aligned}$$

Solución 2: Según el teorema del residuo

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2 + x - 3 \\ \hline x - 2 & 2x^3 - 3x^2 - 5x + 1 \\ & \underline{2x^3 - 4x^2} \\ & \quad\quad x^2 - 5x \\ & \quad\quad \underline{x^2 - 2x} \\ & \quad\quad\quad -3x + 1 \\ & \quad\quad\quad \underline{-3x + 6} \\ & \quad\quad\quad\quad -5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 2 & 1 & -3 & \\ \hline 1 \quad -2 & 2 & -3 & -5 & 1 \\ & \underline{2} & \underline{-4} & & \\ & & 1 & -5 & \\ & & \underline{1} & \underline{-2} & \\ & & & -3 & 1 \\ & & & \underline{-3} & \underline{6} \\ & & & & -5 \end{array}$$

El residuo es -5; luego, por el teorema del residuo, $f(2) = -5$.

En el ejemplo anterior, el primer método puede resultar más fácil. Notemos, sin embargo, que la división, usando solo los coeficientes, es muy simple.

¿Qué habría sucedido si $f(a)$ fuese 0? ¿Cuál habría sido el residuo? Este importante análisis es el tema del teorema del factor.

Teorema 12-3 Teorema del factor

Si f es una función polinomial real y si $f(a) = 0$, en donde $a \in R$, entonces $x - a$ es factor de $f(x)$.

Demostración**: Podemos poner $f(x) = g(x)(x - a) + r$, en donde r es una constante. Pero $r = f(a)$. Por tanto, $f(x) = g(x)(x - a) + f(a)$. Dado que $f(a) = 0$, tenemos que $f(x) = g(x)(x - a)$, de donde vemos que $x - a$ es un factor.**

Ejemplo (b) Demostrar que $x + 3$ es un factor de $f(x) = x^3 + 5x^2 + 8x + 6$.

***Solución*:**

$$\begin{aligned} f(-3) &= (-3)^3 + 5(-3)^2 + 8(-3) + 6 \\ &= -27 + 45 - 24 + 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto, por el teorema del factor, $x - (-3)$ o sea $x + 3$ es un factor de $f(x)$.

Teorema 12-4 Converso del teorema del factor

Si f es una función polinomial real y si $x - a$ es un factor de $f(x)$, entonces $f(a) = 0$.

La demostración le queda al estudiante (véase el Ejercicio 13 que sigue).

12-3 Ejercicios

1. Si $p = (1 \quad -5 \quad 7)$ y $q = (9 \quad -4)$, hallar
   (a) $p + q$ (b) $p \cdot q$
2. Escribir los pares ordenados que son elementos de
   (a) $f = \{(x, y) \mid y = x^2 - 5x + 7, x \in N \text{ y } x \leq 5\}$
   (b) $g = \{(x, y) \mid y = 9x - 4, x \in N \text{ y } x \leq 5\}$

Los Ejercicios 3, 4 y 5 se refieren a p, q, f y g como están definidos en los Ejercicios 1 y 2.

3. Usar los resultados del Ejercicio 2 para escribir los elementos de
   (a) $f + g = \{(x, y) \mid y = f(x) + g(x), x \in N$ y $x \leq 5\}$. [*Sugerencia*: Por ejemplo, si $(1, 3) \in f$ y $(1, 5) \in g$, entonces $(1, 3 + 5) = (1, 8) \in (f + g)$.]
   (b) $f \cdot g = \{(x, y) \mid y = f(x) \cdot g(x), x \in N$ y $x \leq 5\}$.
4. Usar el hecho de que $f + g$ corresponde a $p + q$, para dar los pares ordenados que son elementos de $f + g$. [*Sugerencia*: $p + q = (1 \quad 4 \quad 3)$, de modo que $(f + g)(x) = x^2 + 4x + 3$, por lo que si $x = 1$, entonces $y = 1^2 + 4 \cdot 1 + 3 = 8$.]
5. Usar el hecho de que $f \cdot g$ corresponde a $p \cdot q$, para escribir la totalidad de pares ordenados que son elementos de $f \cdot g$.
6. Si $f(x) = 3x^3 - 4x^2 - 9x + 7$, hallar $f(3)$ en dos formas distintas. [*Sugerencia*: Véase el Ejemplo (a).]
7. Si $g(x) = 18x^7 - 6x^4 + 3$, hallar $g(-1)$ en dos formas.
8. Usar el teorema del factor para hacer ver que $x - 3$ es un factor de $8x^3 - 25x^2 + 12x - 27$.
9. Usar el teorema del factor para hacer ver que $(1 \quad 2)$ es un factor de $(-3 \quad 0 \quad 8 \quad 0 \quad 16)$.
10. Usar el teorema del factor para encontrar el valor real que debe tener k para que $x - 4$ sea un factor de $9x^4 - 35x^3 + kx^2 + kx - 4$.
11. Usar el teorema del factor para encontrar el valor de k para que $x - 1$ sea un factor de $x^{10} - kx^7 - x^6 + 7$.
12. Usar el teorema del factor para hacer ver que $x - a$ es un factor de $x^n - a^n$, en donde $a > 0$, $a \in R$, $n \in N$.
13. Demostrar el Teorema 12-4, inverso del teorema del factor.
14. Usar el inverso del teorema del factor para hacer ver que 2 es un cero de f, en donde $f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - 2x^2 - 2x + 4$
15. Usar el teorema del factor y su inverso para hacer ver que $x + a$ es un factor de $x + a$ si, y solo si, n es impar; $a > 0$, $a \in R$, $n \in N$.
16. Usar el teorema del factor para decidir si $x - \sqrt{2}$, $x + \sqrt{2}$, $x - \sqrt{3}$, $x + \sqrt{3}$ son factores de los polinomios.
    (a) $3x^3 + 2x^2 - 6x - 4$
    (b) $x^4 + 5x^3 + x^2 - 15x - 12$
    (c) $2x^3 + 9x^2 - 4x + 6$
    (d) $2x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x - 2$
17. (a) Supóngase que
    $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + 6$
    define una función polinomial y que $r \in I$ es un cero de f. Por tanto,
    $$f(r) = a_n r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_2 r^2 + a_1 r + 6 = 0$$
    y trasponiendo el 6 y factorizando nos queda
    $$r(a_n r^{n-1} + a_{n-1}r^{n-2} + \cdots + a_2 r + a_1) = -6$$
    Nótese que ambos factores a la izquierda son enteros y que su producto es -6. ¿Cuáles son los únicos enteros posibles para r? Explicarlo.

(b) Usar los resultados de la idea de la parte (a) para hallar todos los ceros enteros de f si $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 6$.

(c) Usar el resultado de la idea de la parte (a) para encontrar los ceros enteros de g, en donde $g(x) = 9x^3 - 46x^2 + 8x - 15$.

(d) Usar el resultado de la idea de la parte (a) para factorizar (1 −3 −1 5 2) en polinomios irreducibles sobre los enteros.

12-6 DIVISION SINTETICA

Al usar el teorema del residuo, a menudo es necesario dividir entre un polinomio de primer grado de la forma $x - a$. De ahí que podamos encontrar provechoso manipular el algoritmo de la división para este caso especial, con vistas a simplificarlo.

Como una ilustración, consideremos la división de $2x^3 - 3x^2 - 5x + 1$ entre $x - 2$, tal como se hizo en la Sección 12-5, usando solo los coeficientes.

Paso 1

```
          2    1   -3
1  -2 ) 2   -3   -5   1
        2   -4
             1   -5
             1   -2
                 -3   1
                 -3   6
                     -5
```

Paso 2

```
          2    1   -3
1  -2 ) 2   -3   -5   1
            -4
             1
                 -2
                 -3
                      6
                     -5
```

Paso 3

```
      2    1   -3
-2 ) 2   -3   -5   1
         -4   -2   6
          1   -3  -5
```

El paso 1 nos muestra cómo lo hicimos en el ejemplo.

En el paso 2 hemos omitido en el divisor los primeros términos de los productos obtenidos de multiplicar el nuevo término del cociente por x, puesto que éste siempre es igual al término de arriba. Tampoco hemos bajado el siguiente término del dividendo. Notemos, sin embargo, que se conservan los números esenciales para efectuar la división.

En el paso 3 hemos tomado ventaja de las omisiones, para comprimir el procedimiento completo en cuatro líneas, subiendo para ello los números esenciales a posiciones directamente bajo los términos del dividendo. También hemos omitido el primer término del divisor, ya que siempre ha de ser 1 cuando usemos este procedimiento especial.

Paso 4

```
-2 ) 2   -3   -5   1
         -4   -2   6
     2    1   -3  -5
```

Paso 5

```
2 ) 2   -3   -5   1
          4    2  -6
    2    1   -3  -5
```

Paso 6

```
2   -3   -5    1  |2
      4    2   -6
2    1   -3   -5
```

En el paso 4 hemos omitido escribir los términos del cociente en la línea que está arriba del dividendo, ya que (una vez bajado el primer término del dividendo) los mismos números están en la línea inferior.

En el paso 5 hemos cambiado el −2 del divisor por 2, dado que usaremos este procedimiento principalmente para evaluar $f(2)$. En consecuencia, ahora debemos *sumar* los términos abajo del dividendo *en vez de restarlos*.

Finalmente, en el paso 6, simplemente hemos movido el 2 al lado derecho.

En esta forma final, el procedimiento se conoce como *división sintética*. Notemos que los números del renglón inferior son los términos del cociente, excepto el último, que es el residuo o sea $f(2)$.

Ejemplo (a) Hallar el cociente y el residuo cuando $2x^3 + 5x^2 + 10x - 8$ se divide entre $x + 3$.

Solución: Escribamos primero los coeficientes del dividendo seguidos por el número clave del divisor: -3. Dejemos espacio bajo los coeficientes y después tracemos una línea. Bajemos el término inicial hasta debajo de la línea. Multipliquemos éste por -3, lo cual nos da -6:

2	5	10	-8	$\lfloor -3$
2				

2	5	10	-8	$\lfloor -3$
	-6			
2	-1			

y coloquémoslo sobre la línea y abajo del coeficiente siguiente, 5. Sumemos ahora -6 y 5 para obtener -1 abajo de la línea. Multipliquemos -1 por -3 lo cual da 3 y coloquémoslo sobre la línea y abajo del 10 y sumando, coloquemos el resultado, 13, abajo de la línea. Repitamos este procedimiento hasta que se hayan usado todos los coeficientes:

2	5	10	-8	$\lfloor -3$
	-6	3		
2	-1	13		

2	5	10	-8	$\lfloor -3$
	-6	3	-39	
2	-1	13	-47	

El cociente es $2x^2 - x + 13$ y el residuo es -47.

Ejemplo (b) Si $f(x) = 5x^4 + 21x^3 - x + 17$, hallar $f(-4)$.

Solución:

5	21	0	-1	17	$\lfloor -4$
	-20	-4	16	-60	
5	1	-4	15	-43	

Luego, $f(-4) = -43$.

Ejemplo (c) Demostrar que $x - 3$ es un factor de $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 8x - 15$ y encontrar el otro factor.

Solución:

2	-7	8	-15	$\lfloor 3$
	6	-3	15	
2	-1	5	0	

El residuo es 0, de modo que $x - 3$ es un factor de $f(x)$. El otro factor es $2x^2 - x + 5$.

12-7 FUNCIONES POLINOMIALES DE UNA VARIABLE COMPLEJA

Consideremos el polinomio $(2 + 3i)x - 5x + 7i$, en donde x es un indeterminado. Un polinomio tal, cuyos coeficientes se toman del conjunto de los números complejos C, se llama *polinomio sobre los números complejos* o *polinomio complejo*. En la forma de coeficientes, se puede escribir como $(2 + 3i \quad -5 \quad 7i)$. Observemos que un polinomio sobre los reales es simplemente un caso especial de un polinomio sobre los complejos, ya que cada número real es también un número complejo.

De manera similar, una función polinomial f que corresponde a un polinomio complejo, se llama *función polinomial de una variable compleja* si su *dominio* es C, el conjunto de los números complejos. Por ejemplo,

$f = \{(x, y) | y = (2 + 3i)x^2 - 5x + 7i, \ x \in C\}$

es una función polinomial de una variable compleja. También lo es

$g = \{(x, y) | y = 9x^3 - x, \ x \in C\}$

Los teoremas de este capítulo, concernientes a polinomios reales y a funciones polinomiales reales, pueden ser fácilmente extendidos a polinomios complejos y funciones polinomiales de variable compleja. Esto lo aceptaremos sin demostración.

¿Siempre tiene un cero una función polinomial? Evidentemente, algunas funciones polinomiales reales sobre los reales no tienen ceros *reales*. Por ejemplo, la función f tal que $f(x) = x^2 + 1$ no tiene ceros reales. Sin embargo, sí tiene *ceros complejos*: i y $-i$. ¿Podrá existir otra función polinomial de variable compleja, quizá más complicada, que no tenga ni siquiera ceros complejos? Por ejemplo, quizá la función f tal que

$$f(x) = x^5 + (i+3)x^4 + \sqrt{7}\,ix^2 - \sqrt{5+\sqrt{2}}\,ix - 1$$

no tenga ni un cero $r \in C$.

La pregunta es respondida de manera muy simple por el importante teorema que demostró por primera vez el gran matemático Carl Friedrich Gauss, en 1799, a la edad de veintidós años.*

Teorema fundamental del álgebra Si f es una función polinomial de una variable compleja de grado $n \geq 1$, entonces f tiene por lo menos un cero en C.

La demostración es muy difícil para ser dada a este nivel.

Según este teorema, la función polinomial f dada por

$$f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - 2x^2 - 2x + 4$$

tiene por lo menos un cero en C. Afortunadamente, podemos factorizarla por agrupación para obtener

$$f(x) = (x-2)(x^4 + x^2 - 2)$$

A partir de esto, vemos que 2 es un cero de f. ¿Es 2 el único cero de f? Quizá no. Si $x^4 + x^2 - 2 = 0$ tiene una raíz, ésta también será un cero de f.

Pero el teorema fundamental del álgebra nos dice que la función definida por $y = x^4 + x^2 - 2$ tiene por lo menos un cero. Mediante el método de prueba y error y usando la división sintética, encontramos que 1 es un cero y que $x^4 + x^2 - 2 = (x-1)(x^3 + x^2 + 2x + 2)$. Por tanto,

$$f(x) = (x-2)(x-1)(x^3 + x^2 + 2x + 2)$$

Ahora bien, el teorema fundamental del álgebra nos asegura que la función definida por $y = x^3 + x^2 + 2x + 2$ tiene por lo menos un cero. Factorizamos por agrupación y nos queda $x^3 + x^2 + 2x + 2 = (x+1)(x^2+2)$. De donde

$$f(x) = (x-2)(x-1)(x+1)(x^2+2)$$

Finalmente, podemos poner $x^2 + 2 = (x - i\sqrt{2})(x + i\sqrt{2})$, por lo que

$$f(x) = (x-2)(x-1)(x+1)(x-i\sqrt{2})(x+i\sqrt{2})$$

de donde resulta que f tiene los ceros $2,\ 1,\ -1,\ i\sqrt{2},\ -i\sqrt{2}$.

Observemos que cada vez que encontrábamos un cero obteníamos una nueva función polinomial de grado 1 menos que la última (aquélla se llama *función reducida* o *degradada*). De ahí que eventualmente, tras de encontrar cinco ceros de f, la función degradada sea de grado 0, que es solo una constante y que no contiene x (en nuestro ejemplo es 1). Esto significa que f tiene exactamente cinco ceros y ni uno más. Esta idea se puede enunciar así:

Teorema 12-5 Si f es una función polinomial de una variable compleja y de grado $n \geq 1$, entonces f tiene exactamente n ceros (algunos de los cuales pueden ser iguales).

Se puede construir una demostración empleando la inducción matemática, siguiendo los lineamientos dados en el ejemplo. Sin embargo, aquí no lo haremos así.

* Véase *Men of Mathematics*, de Eric Temple Bell, Simon and Schuster, Nueva York, 1937, en donde se encontrará un fascinante boceto histórico de este genial joven, considerado ahora como uno de los tres más grandes matemáticos de todos los tiempos.

Debemos notar que algunos de estos n ceros pueden no ser distintos. Por ejemplo, si $f(x) = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)(x - 3)$, entonces el cero 3, se presenta dos veces; a causa de esto decimos que 3 es un *cero doble* de f o que es un *cero de multiplicidad* 2. También decimos que 3 es una *raíz doble* de la ecuación $x^2 - 6x + 9 = 0$.

Definición Sea $m \in N$. Si $(x - a)^m$ es un factor de $f(x)$, pero $(x - a)^{m+1}$ no lo es, entonces decimos que a es un *cero de multiplicidad m* de f o una *raíz de multiplicidad m* de $f(x) = 0$.

12-8 CEROS RACIONALES DE UNA FUNCION POLINOMIAL SOBRE LOS ENTEROS

Aunque encontrar los ceros de una función polinomial sobre los reales puede constituir todo un problema, algo se facilita en el caso de una función polinomial *sobre los enteros*, mediante el teorema siguiente, referente a *ceros racionales*.

Teorema 12-6 Sea $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, en donde todos los coeficientes son enteros. Si $\frac{s}{t}$, en donde $s, t \in I$, es una fracción en sus términos más simples, y si $\frac{s}{t}$ es un cero de f, entonces s es un factor de a_0 y t es un factor de a_n.

Ejemplo (a) Sea $f(x) = 20x^2 - 14x - 24 = 2(2x - 3)(5x + 4)$. Vemos que f tiene como ceros a $\frac{3}{2}$ y $-\frac{4}{5}$ que son fracciones en su forma más simple. Notemos que 3 es un factor de -24 y 2 es un factor de 20; igualmente, -4 es un factor de -24 y 5 es un factor de 20.

Demostración: Supongamos que $\frac{s}{t}$ es un cero de f, de modo que

$$f\left(\frac{s}{t}\right) = a_n\left(\frac{s}{t}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{s}{t}\right)^{n-1} + a_{n-2}\left(\frac{s}{t}\right)^{n-2} + \cdots + a_2\left(\frac{s}{t}\right)^2 + a_1\frac{s}{t} + a_0 = 0$$

Entonces, podemos poner

$$a_n \cdot \frac{s^n}{t^n} + a_{n-1} \cdot \frac{s^{n-1}}{t^{n-1}} + a_{n-2} \cdot \frac{s^{n-2}}{t^{n-2}} + \cdots + a_2\frac{s^2}{t^2} + a_1 \cdot \frac{s}{t} + a_0 = 0$$

Multiplicando ambos lados por t^n, nos da

$$a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1}t + a_{n-2}s^{n-2}t^2 + \cdots + a_2 s^2t^{n-2} + a_1st^{n-1} + a_0 t^n = 0$$

Sumando $-a_0t^n$ a ambos lados y factorizando s a la izquierda, obtenemos

$$s(a_n s^{n-1} + a_{n-1}s^{n-2}t + a_{n-2}s^{n-3}t^2 + \cdots + a_2 st^{n-2} + a_1t^{n-1}) = -a_0 t^n$$

Como s es un factor de la expresión de la izquierda, debe serlo también de la expresión de la derecha.

Sin embargo, s no puede ser un factor de t^n, ya que $\frac{s}{t}$, por hipótesis, está en sus términos más simples. Por tanto, s debe ser un factor de a_0.

Similarmente, sumando $-a_ns^n$ a ambos lados y factorizando t a la izquierda, podemos hacer ver que t es un factor de a_n.

Ejemplo (b) Si $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 9x - 10$, hallar todos los ceros racionales de f.
Solución: Las posibilidades para s son los factores de -10: ± 1, ± 2, ± 5 y ± 10. Las posibilidades para t son los factores de 3: ± 1 y ± 3. Luego, las posibles raíces racionales $\frac{s}{t}$, son ± 1,

± 2, ± 5, ± 10, $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{2}{3}$, $\pm\frac{5}{3}$ y $\pm\frac{10}{3}$, que obtenemos considerando todas las posibilidades de numeradores y denominadores.

Debemos probar cada una mediante la división sintética. Tomándolas en el orden en que están enlistadas, pronto encontraríamos que -2 es un cero:

3	4	−6	−9	−10	$\lfloor -2$
	−6	4	4	10	
3	−2	−2	−5	0	

De ahí que $f(x) = (x + 2)(3x^3 - 2x^2 - 2x - 5)$. En consecuencia, ahora necesitamos encontrar las raíces de $3x^3 - 2x^2 - 2x - 5 = 0$. En este caso, las posibilidades para s son ± 1 y ± 5 y las posibilidades para t son ± 1 y ± 3, de modo que las posibles raíces racionales $\frac{s}{t}$ son ± 1, ± 5, $\pm\frac{1}{3}$ y $\pm\frac{5}{3}$. Como ya hemos probado ± 1 como ceros de f, al tomar las posibilidades en el orden enlistado, empezaríamos con 5. Finalmente encontramos que $\frac{5}{3}$ es un cero de f.

3	−2	−2	−5	$\lfloor \frac{5}{3}$
	5	5	5	
3	3	3	0	

La ecuación degradada que queda ahora, $3x^2 + 3x + 3 = 0$, se puede resolver mediante la fórmula cuadrática. Las raíces son $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ que no son racionales. Por tanto, los ceros racionales de f son -2 y $\frac{5}{3}$. La totalidad de ceros de f es $\left\{-2, \frac{5}{3}, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right\}$.

12-4 Ejercicios

Usar la división sintética para obtener el cociente y el residuo en cada uno de los Ejercicios del 1 al 4.

1. $(5x^3 - 4x^2 + 8x - 6) \div (x - 3)$
2. $(3x^4 - x^2 + 5x - 7) \div (x + 2)$
3. $(32x^5 - 1) \div (x - \frac{1}{2})$
4. $\left(\frac{1}{9}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 5x - 3\right) \div \left(x - \frac{2}{3}\right)$

En los Ejercicios del 5 al 8, usar la división sintética para encontrar

5. $f(3)$ si $f(x) = x^3 - 8x^2 + 3x - 9$
6. $g(-1)$ si $g(x) = 9x^4 + 3x^2 - 5$
7. $F(\frac{1}{2})$ si $F(x) = 4x^5 - 6x^4 - 3x^2 - 7x + 9$
8. $h(\sqrt{2})$ si $h(x) = \sqrt{2}x^4 - 6x^3 + 3\sqrt{2}x^2 - 5x - \sqrt{2}$
9. Demostrar que (1 7) es un factor de (2 14 3 16 −35) y hallar el otro factor.
10. Hallar k tal que (1 −3) sea un factor de (5 −15 k 4 −4).
11. Hallar $f(1 + i)$ si $f(z) = z^3 - z^2 + 3$.
12. Hallar $g(1 + i\sqrt{3})$ si $g(z) = z^4 + 8z$.
13. Si $f(x) = 6x^5 - 4x^4 - 9x^2 + 2x + 5$, ¿cuáles son los posibles ceros racionales de f?
14. ¿Cuáles son las *posibles* raíces racionales de $15x^4 + x^3 - 8x + 12 = 0$?
15. Hallar los ceros racionales de f, en donde $f(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$.
16. Hallar los ceros racionales de g, en donde $g(x) = 2x^4 - 7x^3 + x^2 + 7x - 3$.
17. Factorizar (6 1 2 5 −2) completamente sobre los enteros.
18. Factorizar (6 1 2 5 −2) completamente sobre los complejos.
19. Hallar todas las raíces racionales de $2x^3 + x^2 - 18x - 20 = 0$.
20. Hallar todas las raíces racionales de $2x^4 - 9x^3 + 15x^2 - 11x + 3 = 0$.
21. Hallar una función polinomial sobre los enteros, cuyos ceros sean 3, −4 y 5.
22. Dar un polinomio sobre los enteros cuya función polinomial correspondiente tenga los ceros $\frac{1}{2}$, -1, 0 y $\frac{2}{3}$.
23. Dar un polinomio sobre los enteros cuya función polinomial correspondiente tenga los ceros $\frac{1}{2}$, -1, $-\sqrt{2}$ y otro cero más que el estudiante debe seleccionar.
24. Usar el Teorema 12-6 para demostrar que $\sqrt{2}$ es irracional. (*Sugerencia*: Considérese la ecuación $x^2 - 2 = 0$.)

Funciones logarítmicas y exponenciales 13

13-1 FUNCIONES EXPONENCIALES Y SUS GRAFICAS

Si se invierten $1000 a una tasa de interés de 5 % anual, el monto del interés ganado al fin del primer año es (1000)(0,05) pesos y el total de la inversión es

$$1000 + 1000(0{,}05) = 1000(1 + 0{,}05) \text{ pesos}$$

Supóngase que este total se reinvierte a la misma tasa durante un segundo año. Al final de 2 años, el valor de la inversión original ha aumentado a

$$\begin{aligned} 1000(1 + 0{,}05) + 1000(1 + 0{,}05)(0{,}05) &= 1000(1 + 0{,}05)(1 + 0{,}05) \\ &= 1000(1 + 0{,}05)^2 \text{ pesos} \end{aligned}$$

al continuar este proceso, observamos que t años después de que se hizo la inversión original, el valor total V estaría dado por la fórmula

$$V = 1000(1{,}05)^t$$

Nótese que en esta ecuación, la variable t aparece como exponente. Por esta razón a esta ecuación la llamamos *ecuación exponencial*.

Consideremos ahora, por un momento, la ecuación exponencial

$$y = 2^x$$

Según lo estudiado en el Capítulo 5, sabemos que

Si $x = -1$, entonces $y = 2^{-1} = \dfrac{1}{2}$

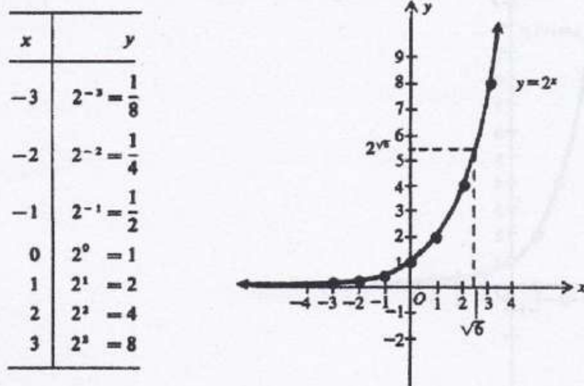
Si $x = 0$, entonces $y = 2^0 = 1$

Si $x = \dfrac{3}{2}$, entonces $y = 2^{3/2} = 2\sqrt{2}$

De hecho, sabemos que si x es cualquier número racional, entonces existe 2^x que es un número real positivo. Sin embargo, si x es un número irracional tal como $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$ o π, entonces 2^x no está definido.

Podemos preguntarnos si es posible entender la definición de 2^x de modo que tengan significado símbolos como $2^{\sqrt{2}}$, $2^{\sqrt{6}}$ y 2^{π}. ¡Es ciertamente posible! De hecho, se puede hacer ver que hay solo una forma de definir esas potencias de modo que las leyes básicas de los exponentes continúen siendo válidas. Además, esta definición es tal que la gráfica de cualquier ecuación exponencial es una curva sin «quebraduras» ni «agujeros».

Aunque la discusión completa de los exponentes irracionales corresponde a un curso de matemática superior, podemos ganar una buena dosis de comprensión de la idea estudiando la gráfica de una ecuación exponencial tal como $y = 2^x$. Como de costumbre, empezaremos por graficar un número representativo de puntos (x, y) cuyas coordenadas satisfagan nuestra ecuación.



x	y
-3	$2^{-3} = \frac{1}{8}$
-2	$2^{-2} = \frac{1}{4}$
-1	$2^{-1} = \frac{1}{2}$
0	$2^0 = 1$
1	$2^1 = 2$
2	$2^2 = 4$
3	$2^3 = 8$

Estos puntos parecen quedar sobre la curva suave mostrada en la figura. En realidad, si tomásemos más valores racionales para x y graficásemos los puntos correspondientes sobre la figura, pronto descubriríamos *que todos los puntos* están en la curva. Observemos cuidadosamente que mientras continuemos restringiendo nuestra elección de valores de x a solo números racionales, la gráfica de $y = 2^x$ nunca será la curva suave de la figura, sino que mostrará un número infinito de «agujeros», correspondientes cada uno a un valor irracional de x. Así, pues, para satisfacer el requisito de que la gráfica de esta ecuación sea continua, supongamos por cada x real, racional o irracional, 2^x es la coordenada y del correspondiente punto de la curva.

Con esta hipótesis es claro que para cada número real x existe uno, y solo uno, número real y tal que $y = 2^x$. Vemos entonces que la ecuación $y = 2^x$ define una función $f = \{(x, y) | y = 2^x\}$ cuyo dominio es el conjunto de números reales R. Esta función se llama *función exponencial de base* 2.

De manera semejante, podemos concluir que toda ecuación de la forma $y = b^x$, en donde $b > 0$, define una función sobre R.

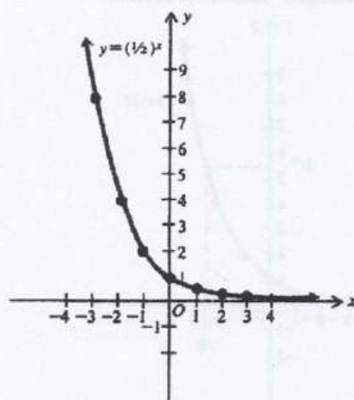
Si $b > 1$, la gráfica de cualquier función de la forma $\{(x, y) | y = b^x\}$ se parecerá mucho a la gráfica de $y = 2^x$. Si estudiamos esta gráfica vemos que es posible convenir en aceptar la lista de propiedades siguientes que se pueden demostrar para cada una de tales funciones.

- La imagen de la función es el conjunto de números reales positivos. Es decir, que para cada $x \in R$, $b^x > 0$.
- Si $x = 0$, entonces $b^x = 1$; si $x > 0$, entonces $b^x > 1$, y si $x < 0$, entonces $0 < b^x < 1$.
- A medida que x crece, crece también b^x. Luego, si $r, s \in R$, $s > r$, entonces $x^s > x^r$.

Si $0 < b < 1$, la gráfica de una función de la forma $\{(x, y) | y = b^x\}$ tendrá una apariencia distinta. Sin embargo, cada una de esas funciones tendrá la forma general

de la gráfica de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. De nuevo, estudiando esta curva en particular es posible llegar a una lista de propiedades válidas para todas las funciones pertenecientes a esta categoría general.

x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$ o y
-3	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$
-2	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$
-1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$
0	$\left(\frac{1}{2}\right)^{0} = 1$
1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \frac{1}{2}$
2	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \frac{1}{4}$
3	$\left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \frac{1}{8}$

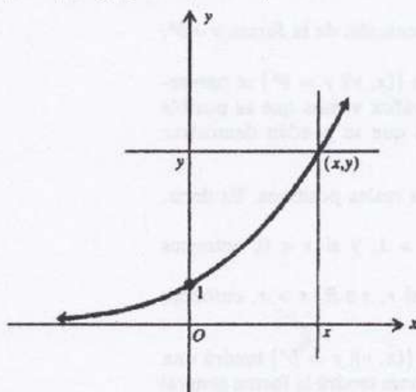


- La imagen de la función es el conjunto de números reales positivos.
- Si $x = 0$, $b^x = 1$; si $x > 0$, entonces $0 < b^x < 1$, y si $x < 0$, entonces $b^x > 1$.
- Al crecer x, decrece b^x. Luego, si $r, s \in R$ y si $s > r$, entonces $x^s < x^r$.

Finalmente, si $b = 1$, entonces $b^x = 1^x = 1$, para toda $x \in R$. Para excluir de nuestro análisis este caso trivial, definiremos la función exponencial del modo siguiente.

Definición Sea b cualquier número real positivo distinto de 1. Entonces una función f se llama *función exponencial de base b* si, y solo si,

$f = \{(x, y) | y = b^x, x \in R\}$



Si hacemos la gráfica de una función exponencial típica, de inmediato salta a la vista otra propiedad muy importante de dicha curva: toda recta paralela al eje x y por encima de él, corta a la curva en exactamente un punto. Esto significa que si b es un número real dado, tal que $b > 0$ y $b \neq 1$, entonces para cada número real positivo y existe un solo número real x, tal que $y = b^x$.

Notemos que esto es precisamente lo opuesto a nuestra hipótesis previa de que para cada número real x existe un solo número real positivo y, tal que $y = b^x$.

De estas dos hipótesis básicas resulta que

$$b^u = b^v \quad \text{si, y solo si,} \quad u = v$$

Ejemplo (a) Encontrar la ecuación $2^x = 16$.

Solución: Puesto que

$$2^x = 16 \leftrightarrow 2^x = 2^4$$
$$\leftrightarrow x = 4$$

el conjunto solución es $\{4\}$.

Ejemplo (b) La gráfica de cierta función exponencial contiene al punto $\left(\frac{3}{2}, 8\right)$. ¿Cuál es la base de f?

Solución: Puesto que f es una función exponencial sabemos que $f(x) = b^x$ además sabemos que

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = b^{3/2} = 8$$

Así, pues, dado que $8 = 4^{3/2}$, tenemos que

$$b^{3/2} = 8 \leftrightarrow b^{3/2} = 4^{3/2}$$

de donde sigue que

$$b = 4$$

13-1 Ejercicios

En los Ejercicios del 1 al 9, usar las leyes de los exponentes para encontrar el valor numérico simple por cada una de las expresiones dadas.

1. $(2^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$
2. $3^{2+\pi} \cdot 3^{-\pi}$
3. $9^{\sqrt{3}} \cdot 3^{2-2\sqrt{3}}$
4. $(2^{-3/\pi})^{-\pi}$
5. $\dfrac{2^{3\sqrt{3}}}{4^{1+\sqrt{3}}}$
6. $(4^{\sqrt{3}/2})^{\sqrt{3}}$
7. $(2^{\sqrt{12}})^{\sqrt{3}}$
8. $\dfrac{8^{\sqrt{3}/3}}{2^{\sqrt{3}}}$
9. $\dfrac{16^{\sqrt{5}}}{4^{\sqrt{20}}}$

10. Una función g cuyo dominio es el conjunto $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ está definida por $g(x) = 4^{-x}$.
    (a) Escribir g como un conjunto de pares ordenados.
    (b) Escribir los elementos que pertenecen a la imagen de g.
11. Si h es una función cuyo dominio es $D = \left\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}$ y $h(x) = 64^x$, expresar h como un conjunto de pares ordenados.

Trazar una gráfica para cada una de las funciones exponenciales dadas en los Ejercicios del 12 al 17. En algunos casos, se encontrará conveniente usar escalas distintas en cada eje.

12. $\{(x, y) \mid y = 3^x\}$
13. $\{(x, y)) \mid y = 3^{-x}\}$

14. $\left\{(x, y) \mid y = \left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}$

15. $\{(x, y) \mid y = 2^{x/2}\}$

16. $\{(x, y)) \mid y = (\sqrt{2})^x\}$

17. $\{(x, y) \mid y = 10^x\}$

Hallar el conjunto solución de cada una de las ecuaciones dadas en los Ejercicios del 18 al 26.

18. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 16$

19. $10^x = 0{,}001$

20. $4^{-x} = 16$

21. $5^{3x} = 25^{x+3}$

22. $8^x = 16^{4x-8}$

23. $8^x = 16$

24. $27^x = 9$

25. $25^x = 5^{x^2-3}$

26. $4^{x^2} = 2^{8x-8}$

Hallar el conjunto solución de cada una de las desigualdades dadas en los Ejercicios del 27 al 33.

27. $2^x > 8$. (*Sugerencia*: Nótese que $2^x > 8$ es equivalente a $2^x > 2^3$. En seguida, considérese la gráfica de $y = 2^x$.)

28. $3^x < 27$

29. $2^x \leq \frac{1}{16}$

30. $5^x > 0$

31. $3^{3x} \geq 27$

32. $5^{3x} > 25^{2x-3}$

33. $3^x < 0$

34. **Hacer ver que para cada $x \in R$, 2^x se duplica cuando x aumenta en 1.**

En los Ejercicios del 35 al 40, hallar la base de una función exponencial cuya gráfica incluya los puntos dados.

35. $(1, 6)$

36. $(3, 27)$

37. $\left(-2, \frac{1}{100}\right)$

38. $\left(\frac{3}{2}, 27\right)$

39. $\left(2, \frac{1}{4}\right)$

40. $\left(-2, \frac{1}{4}\right)$

13-2 LOGARITMOS

En la Sección 13-1 convinimos en aceptar el hecho de que si b era un número positivo distinto de 1 y si N era cualquier número positivo dado, entonces existía un número real único L, tal que

$$N = b^L$$

Se dice que el número L es el *logaritmo de N de base b* y lo escribimos

$$L = \log_b N$$

Esta definición se puede enunciar en forma un poco más concisa como sigue:

Definición Si N y b son números positivos y si $b \neq 1$, entonces

$\log_b N = L$ si, y solo si, $N = b^L$

Según esto, notamos que el concepto de un exponente y el de un logaritmo son simplemente dos formas diferentes de ver exactamente la misma cosa. Las dos ecuaciones $N = b^L$ y $\log_b N = L$ son equivalentes y podemos cambiar de una a otra para obtener la forma que nos resulte más conveniente a nuestro propósito.

Ejemplo (a) $2^4 = 16$ y, por tanto, $\log_2 16 = 4$.

Ejemplo (b) $8^{-2/3} = \frac{1}{4}$ y, por tanto, $\log_8 \frac{1}{4} = -\frac{2}{3}$.

Ejemplo (c) $7^1 = 7$ y, por tanto, $\log_7 7 = 1$.

Ejemplo (d) Hallar $\log_2 \frac{1}{8}$.

Solución: Si hacemos $L = \log_2 \frac{1}{8}$, entonces $2^L = \frac{1}{8}$. Ya que $2^{-3} = \frac{1}{8}$, tenemos

$$2^L = 2^{-3}$$

y, por tanto, $L = -3$. De ahí que

$$\log_2 \frac{1}{8} = -3$$

Ejemplo (e) Hallar $\log_8 16$.

Solución: Primero, hagamos $L = \log_8 16$. Entonces, $8^L = 16$. Dado que $8 = 2^3$ y que $16 = 2^4$, tenemos que

$$(2^3)^L = 2^4 \quad \text{o} \quad 2^{3L} = 2^4$$

De ahí que

$$3L = 4 \quad \text{o} \quad L = \frac{4}{3}$$

Por tanto,

$$\log_8 16 = \frac{4}{3}$$

Ejemplo (f) Si $\log_9 x = -\frac{1}{2}$, hallar x.

Solución: Dado que $\log_9 x = -\frac{1}{2}$ es equivalente a $x = 9^{-1/2}$, se sigue inmediatamente que

$$x = \frac{1}{9^{1/2}} = \frac{1}{3}.$$

Ejemplo (g) Si $\log_x 8 = \frac{3}{2}$, hallar x.

Solución:

$$\log_x 8 = \frac{3}{2} \leftrightarrow x^{3/2} = 8$$
$$\leftrightarrow (x^{3/2})^{2/3} = 8^{2/3}$$
$$\leftrightarrow x = (\sqrt[3]{8})^2$$
$$\leftrightarrow x = 4$$

Las propiedades siguientes de los logaritmos son una consecuencia inmediata de la definición.

$\log_b 1 = 0$ ya que $b^0 = 1$
$\log_b b = 1$ ya que $b^1 = b$

y para toda $n \in R$,

$\log_b b^n = n$ ya que $b^n = b^n$

Puesto que $L = \log_b N$ si, y solo si, $b^L = N$ y dado que L es un número real único, también se tiene que

$$b^{\log_b N} = N$$

13-3 FUNCIONES LOGARITMICAS Y SUS GRAFICAS

Consideremos la ecuación logarítmica

$$y = \log_b x$$

Si b es un número positivo dado distinto de 1, sabemos que esta ecuación asocia un número real único y, con cada real positivo x. De ahí que la ecuación defina una función que se puede expresar

$$\{(x, y) | y = \log_b x\}$$

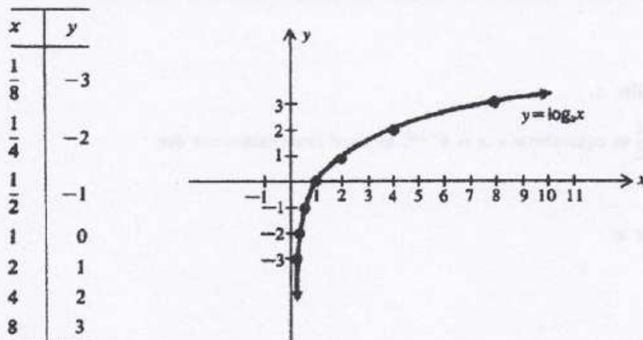
Definición Si b es un número positivo diferente de 1, entonces la función $\{(x, y) | y = \log_b x, x > 0\}$ es una *función logarítmica de base b.*

Notemos con cuidado que el dominio de cualquier función logarítmica es el conjunto de los números reales positivos. ¿Cuál es la imagen de una función tal? Esta pregunta se puede responder mejor examinando su gráfica.

Puesto que $\{(x, y) | y = \log_b x\} = \{(x, y) | x = b^y\}$, podemos obtener la gráfica de la ecuación $y = \log_b x$, trazando la gráfica de la ecuación exponencial $x = b^y$. Notemos que la variable independiente en esta última ecuación es la y. Por tanto, para trazar su gráfica empezamos por seleccionar valores para y y por determinar los valores correspondientes de x. Después, como de costumbre, graficamos los puntos (x, y) y los unimos con una curva suave.

La gráfica de la función logarítmica de base 2 aparece en la figura.

x	y
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3



Aunque esta curva es la gráfica de una función logarítmica en particular, su forma general y sus características son típicas de la gráfica de cualquier función logarítmica que tenga base mayor que 1. Así, por ejemplo, ilustra el hecho de que

- La imagen de una función logarítmica de base $b > 1$ es la totalidad de números reales.
- Si $0 < x < 1$, entonces $\log_b x < 0$; si $x = 1$, entonces $\log_b x = 0$, y si $x > 1$, entonces $\log_b x > 0$.
- Si r y s son números reales positivos, entonces $\log_b r < \log_b s$ si, y solo si, $r < s$.
- Cualquier línea paralela al eje x corta a la curva en uno y solo un punto. En consecuencia, si $\log_b r = \log_b s$, debemos concluir que $r = s$.

13-2 Ejercicios

En los Ejercicios del 1 al 10, dar la ecuación logarítmica que sea equivalente a cada una de las ecuaciones exponenciales dadas.

1. $10^3 = 1000$
2. $10^{-2} = 0{,}01$
3. $15^0 = 1$
4. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 16$
5. $(0{,}2)^3 = 0{,}008$
6. $\frac{1}{8} = 16^{-3/4}$
7. $b^x = y$

8. $10^x = y$
9. $x^{10} = y$
10. $y^x = 10$

En los Ejercicios del 11 al 20, dar la ecuación exponencial que sea equivalente a cada una de las ecuaciones logarítmicas dadas.

11. $\log_3 27 = 3$
12. $\log_{1/4} 4 = -1$
13. $\log_4 \frac{1}{4} = -1$
14. $\log_{10} 1000 = 3$
15. $\log_{10} 1 = 0$
16. $\log_2 \frac{1}{16} = -4$
17. $\log_{10} x = y$
18. $\log_x 10 = y$
19. $\log_x y = 10$
20. $\log_b N = x$

En los Ejercicios del 21 al 32, hallar el logaritmo dado.

21. $\log_2 16$
22. $\log_{10} 100$
23. $\log_3 81$
24. $\log_2 \frac{1}{32}$
25. $\log_9 3$
26. $\log_7 7$
27. $\log_{10} 1$
28. $\log_{10} \frac{1}{10}$
29. $\log_{10} 10^{\sqrt{3}}$
30. $\log_{1/b} b$
31. $\log_b \sqrt{b}$
32. $\log_{b^2} b^4$

En los Ejercicios del 33 al 50, hallar el conjunto solución de cada una de las ecuaciones dadas.

33. $\log_2 \left(\frac{1}{32}\right) = x$
34. $\log_{10} x = 3$
35. $\log_x 64 = 3$
36. $\log_3 81 = x$
37. $\log_x 9 = \frac{2}{3}$
38. $\log_{16} x = -\frac{3}{2}$
39. $\log_{10} 10^{3.3} = x$
40. $\log_{16} x = -\frac{3}{4}$
41. $\log_9 9^{-4} = x$
42. $\log_x \frac{1}{81} = -2$
43. $\log_x 256 = 2$
44. $\log_9 243 = x$
45. $\log_5 x = -2$
46. $\log_x 3 = \frac{1}{3}$
47. $x^{\log_x 9} = x$
48. $x^{\log_x x} = 2$
49. $3^{\log_3 x} = \frac{1}{4}$
50. $5^{\log_x 7} = 7$
51. Graficar la función cuya regla de correspondencia es $f(x) = \log_{1/2} x$.
52. Trazar las gráficas de $y = 3^x$ y de $y = \log_3 x$ sobre el mismo sistema coordenado.
53. ¿Qué relación hay entre las gráficas de $x = 10^y$ y $y = \log_{10} x$?
54. Trazar las gráficas de $y = \log_{1/2} x$ y $y = \log_2 \frac{1}{x}$ sobre dos sistemas coordenados. ¿Cómo se relacionan dichas gráficas?
55. Trazar la gráfica de $g = \{(x, y) \mid y = \log_{10} x, 1 \leq x \leq 10\}$. ¿Qué se puede decir acerca de la imagen de g?

13-4 LEYES FUNDAMENTALES DE LOS LOGARITMOS

Dado que $\log_b x = y$ si, y solo si, $b^y = x$, parece razonable esperar que las leyes básicas de los exponentes se puedan reenunciar en el lenguaje de los logaritmos. Que ése es el caso, se muestra con los tres teoremas siguientes.

Teorema 13-1 Para cualesquiera números reales positivos x, y y b, en donde $b \neq 1$.

$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$

***Demostración*: Sabemos que $\log_b x$ y $\log_b y$ son números reales únicos. Si hacemos $\log_b x = r$ y $\log_b y = s$, entonces, por la definición de logaritmos, tenemos**

$x = b^r \quad$ y $\quad y = b^s$

Luego,

$x \cdot y = b^r \cdot b^s = b^{r+s}$

De manera que usando de nuevo las definiciones de logaritmos, tenemos que

$\log_b xy = r + s$

y por sustitución,

$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$

Expresado en palabras, el Teorema 13-1 afirma que: *El logaritmo de un producto de dos números positivos es la suma de los logaritmos de ambos números.*

Ejemplo (a) Si $\log_b 4 = 0{,}60$ y $\log_b 7 = 0{,}85$, hallar $\log_b 28$.

Solución:

$\log_b 28 = \log_b 4 \cdot 7 = \log_b 4 + \log_b 7 = 0{,}60 + 0{,}85 = 1{,}45$

Teorema 13-2 Para cualesquiera números reales positivos x y b, tales que $b \neq 1$ y para cada número real n,

$\log_b x^n = n \log_b x$

Demostración: **Si hacemos $\log_b x = r$, entonces**

$x = b^r$

Pero

$x^n = (b^r)^n = b^{nr}$

De donde, por la definición de logaritmo,

$\log_b x^n = nr$

Sustituyendo r por $\log_b x$, tenemos

$\log_b x^n = n \log_b x$

En palabras: *El logaritmo de la n-ésima potencia de un número positivo es n veces el logaritmo del número.*

Ejemplo (b) $\log_b 12^5 = 5 \log_b 12$.

Ejemplo (c) $\log_b \sqrt[3]{2} = \log_b 2^{1/3} = \frac{1}{3} \log_b 2$.

Ejemplo (d) Expresar el número siguiente como el logaritmo de un solo número:

$\frac{2}{3} \log_b 8 - \log_b 5$

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{2}{3} \log_b 8 - \log_b 5 &= \frac{2}{3} \log_b 8 + (-1) \log_b 5 \\ &= \log_b 8^{2/3} + \log_b 5^{-1} \\ &= \log_b (\sqrt[3]{8})^2 + \log_b \frac{1}{5} \\ &= \log_b 4 + \log_b \frac{1}{5} \\ &= \log_b \left(4 \cdot \frac{1}{5}\right) \\ &= \log_b \frac{4}{5}\end{aligned}$$

La tercera de las leyes básicas de los logaritmos se sigue directamente de los Teoremas 13-1 y 13-2. Su demostración, que hace uso de una idea utilizada en la solución del Ejemplo (d), queda como ejercicio.

Teorema 13-3 Para cualesquiera números reales positivos x, y y b, tales que $b \neq 1$,

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$

Notemos que en palabras, el Teorema 13-3 afirma que: *El logaritmo del cociente de dos números positivos es el logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.*

Ejemplo (e) Dado que $\log_b 2 = 0{,}69$ y $\log_b 3 = 1{,}10$, hallar $\log_b \frac{2}{9}$.

Solución:

$$\log_b \frac{2}{9} = \log_b 2 - \log_b 9 \qquad \text{Teorema: } \log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$

$$= \log_b 2 - \log_b 3^2$$

$$= \log_b 2 - 2\log_b 3 \qquad \text{Teorema: } \log_b x^n = n \log_b x$$

$$= 0{,}69 - 2(1{,}10)$$

$$= -1{,}51$$

Ejemplo (f) Si $3 \log_5 x - 2 \log_5 y = 1$, expresar x en términos de y.

Solución: Según el Teorema 13-2 tenemos

$$\log_5 x^3 - \log_5 y^2 = 1$$

y por tanto, según el Teorema 13-3,

$$\log_5 \frac{x^3}{y^2} = 1$$

De donde, de la definición de logaritmo

$$\frac{x^3}{y^2} = 5^1$$

de modo que

$$x^3 = 5y^2$$

Por tanto,

$$x = \sqrt[3]{5y^2}$$

13-3 Ejercicios

1. Demostrar el Teorema 13-3.

Hallar cada uno de los siguientes logaritmos, sabiendo que $\log_b 2 = 0{,}30$, $\log_b 3 = 0{,}48$ y $\log_b 5 = 0{,}70$.

2. $\log_b \sqrt[3]{2}$
3. $\log_b 6$
4. $\log_b \frac{3}{5}$
5. $\log_b \sqrt{10}$
6. $\log_b \frac{5}{9}$
7. $\log_b 1{,}5$
8. $\log_b \frac{\sqrt{15}}{3}$
9. $\log_b \frac{1}{5}$
10. $\log_b (\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{3})$
11. $\log_b \sqrt[4]{12}$

12. $\log_b 2b$

13. $\log_b \dfrac{b}{2}$

En los Ejercicios del 14 al 21, usar las leyes de los logaritmos para representar cada una de las expresiones dadas como un solo logaritmo con coeficiente 1.

14. $\log_b x + \log_b y$

15. $\log_b xy - 2 \log_b z$

16. $2 \log_b xy + \dfrac{1}{2} \log_b z$

17. $\dfrac{1}{2} (\log_b x + \log_b y)$

18. $\log_b (x^2 - 1) - \log_b (x + 1)$

19. $\log_b x - 2 \log_b y + \log_b xy^2$

20. $\log_b (x^2 - 3x + 2) - \log_b (x^2 - 4x + 4)$

21. $\dfrac{1}{4} \log_b y + \dfrac{3}{4} \log_b z$

En los Ejercicios del 22 al 30, hallar la representación numérica más simple de x.

22. $\log_3 54 - \log_3 2 = x$

23. $\log_8 2 + \log_8 4 = x$

24. $x = 2 \log_7 2 - \log_7 28$

25. $x = \log_2 \sqrt{0{,}25}$

26. $x = \log_5 50 + \log_5 2{,}5$

27. $7^{\log_7 5 + \log_7 2} = x$

28. $\log_b 3 + \log_b 2 = \log_b x$

29. $\log_b x = \log_b 3 - 2 \log_b 5$

30. $\log_b x = \log_b 2 - \log_b x$

31. Demostrar que para cada número real positivo N,

$$\log_b \frac{1}{N} = -\log_b N$$

En los Ejercicios del 32 al 37, resolver cada una de las ecuaciones dadas para x en términos de y. [*Sugerencia*: Véase el Ejemplo (f), página 321.]

32. $\log_3 x + \log_3 y = 0$

33. $\log_3 x - \log_3 y = 1$

34. $\log_2 y - 2 \log_2 x = 2$

35. $\log_7 x - \dfrac{1}{2} \log_7 y = 0$

36. $3 \log_5 y - \log_5 x = 1$

37. $\dfrac{1}{2} (\log_2 x + \log_2 y) = 1$

38. Demostrar que para toda $x \geq 1$

$$-\log_b (x - \sqrt{x^2 - 1}) = \log_b (x + \sqrt{x^2 - 1})$$

13-5 LOGARITMOS COMUNES

Hemos visto que cualquier número positivo diferente de 1 se puede usar como base de una función logarítmica. Sin embargo, en la mayoría de las aplicaciones elementales de los logaritmos, la base usual es el 10. Los logaritmos de base 10 se llaman *logaritmos comunes*.

Cuando se escribe el logaritmo común de un número, generalmente se omite el subíndice que denota la base. Por eso es que en este libro,

$\log N$ significa $\log_{10} N$

También encontraremos conveniente usar la palabra «logaritmo» o simplemente «log» en lugar de «logaritmo común».

A partir de la definición de logaritmo, resulta fácil ver que

$\log 10^r = r$ para todo número real r

Así, por ejemplo,

$$\log 1000 = \log 10^3 = 3$$
$$\log 10 = \log 10^1 = 1$$
$$\log 1 = \log 10^0 = 0$$
$$\log 0{,}1 = \log \frac{1}{10} = \log 10^{-1} = -1$$

etc.

Ahora, la pregunta natural es: ¿Cómo encontraremos el logaritmo de un número real positivo que no sea una potencia entera de 10? Como la evaluación de

tales logaritmos requiere el uso del cálculo, hemos de dirigirnos a una tabla, tal como la Tabla I de las páginas 349 y 350. Esta tabla, da aproximaciones decimales de cuatro cifras de los logaritmos de n, desde $n = 1{,}00$ hasta $n = 9{,}99$ con aumentos de 0,01. Parte de la Tabla I aparece reproducida a continuación. En ella (como

	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
→	23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
	24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962

en la mayoría de tales tablas) se han eliminado las comas decimales. Así, el elemento 22 que aquí aparece en la parte superior de la columna de encabezado n, debe interpretarse como el número 2,2; el número que aparece bajo él, será 2,3 y así sucesivamente. Puesto que $\log 1 = 0$ y $\log 10 = 1$, entonces si $1{,}00 \leq n \leq 9{,}99$, debe suceder que $0 \leq \log n < 1$.* Consecuentemente, cada elemento de las otras columnas se debe interpretar como una fracción decimal no negativa y debe escribirse con un punto decimal antes de su primer dígito.

Los ejemplos siguientes ilustran el uso de la Tabla I.

Ejemplo (a) Usar la Tabla I para calcular el valor aproximado de log 2,37.

Solución: Primero busquemos en la columna de la izquierda (la encabezada por n) hasta llegar a 23 (las primeras dos cifras de 2,37). Ahora vayamos a la columna encabezada por 7 (la tercera cifra de 2,37). El número deseado aparece en la línea en que está el 23 y en la columna en que está el 7. Este número es 3747, que debe interpretarse como 0,3747. Según eso

$\log 2{,}37 = 0{,}3747$

En algunos textos, el resultado del Ejemplo (a) se habría escrito

$\log 2{,}37 \approx 0{,}3747$ o $\log 2{,}37 \doteq 0{,}3747$

Los símbolos $\approx$ y $\doteq$ se leen «es aproximadamente igual a». En tanto que entendamos la naturaleza de aproximación de la representación decimal de los logaritmos, tal notación resulta innecesariamente complicada.

Ejemplo (b) Usar la Tabla I para encontrar log 2,4.

Solución: Interpretemos el 2,4 como 2,40. Entonces, el logaritmo de 2,4 se lee directamente a la derecha de 24 y abajo de 0.

$\log 2{,}4 = 0{,}3802$

Aunque la Tabla I cita solo los logaritmos de números entre 1 y 10, se puede usar para calcular aproximadamente el logaritmo de cualquier número positivo. Aquí es donde se notará la ventaja de usar la base 10.

La primera cosa que hay que observar es que cualquier número positivo se puede expresar en la *notación científica*. Para expresar un número positivo N en la notación científica, lo ponemos en la forma

$N = n \times 10^c$

En donde $1 \leq n < 10$ y c es un entero. Por ejemplo, cada uno de los números positivos siguientes aparece también expresado en la notación científica.

* Esto se sigue de que si $r < s$, entonces $\log_b r < \log_b s$.

Número dado	Notación científica
0,0000237	$2{,}37 \times 10^{-5}$
0,237	$2{,}37 \times 10^{-1}$
2 370 000	$2{,}37 \times 10^{6}$
23 700	$2{,}37 \times 10^{4}$
2,37	$2{,}37 \times 10^{0}$

Ahora bien, si un número positivo dado N está expresado en la notación científica

$N = n \times 10^c$, $\quad 1 \leq n < 10$ y c entero

entonces

$\log N = \log(n \times 10^c)$	$\log_b r = \log_b s \leftrightarrow r = s$
$\quad = \log n + \log 10^c$	Teorema: $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$
$\quad = \log n + c$	$\log 10^c = c$
$\quad = c + \log n$	Propiedad conmutativa de la suma

Puesto que n es un número entre 1 y 10, su logaritmo se puede hallar usando la Tabla I. Por tanto, todo lo que tenemos que hacer para encontrar $\log N$ es

- Expresar (o interpretar) N en notación científica, $n \times 10^c$.
- Aproximar el $\log n$ mediante la Tabla I (o una similar).
- Sumar el entero c a este último número.

Cuando $\log N$ está expresado en esa forma, el entero c (que puede ser positivo, negativo o cero) se llama *característica* del logaritmo. El decimal no negativo, $\log n$, se dice que es la *mantisa* de $\log N$.

Ejemplo (c) Usar la Tabla I para aproximar cada uno de los logaritmos siguientes: (1) 237 000, (2) 2370 y (3) 23,7.

Solución:

Número dado N	En notación científica $n \times 10^c$	Característica c	Mantisa $\log n$	$\log N$ $c + \log n$
(1) 237 000	$2{,}37 \times 10^5$	5	0,3747	5,3747
(2) 2370	$2{,}37 \times 10^3$	3	0,3747	3,3747
(3) 23,7	$2{,}37 \times 10^1$	1	0,3747	1,3747

Observemos que las mantisas de los logaritmos de los tres números del Ejemplo (c) son iguales y que los logaritmos difieren solo en sus características. En la práctica, la característica de $\log N$ se determina por inspección de N. Solo tenemos que contar el número de lugares que hay que mover la coma decimal de N para obtener un número entre 1 y 10. Ese entero es la característica de $\log N$. Es positivo si contamos hacia la izquierda y negativo si contamos hacia la derecha. Por ejemplo,

Si $N = 36\,500$, la característica de $\log N$ es 4
Si $N = 36{,}5$, la característica de $\log N$ es 1
Si $N = 3{,}65$, la característica de $\log N$ es 0
Si $N = 0{,}365$, la característica de $\log N$ es -1
Si $N = 0{,}00365$, la característica de $\log N$ es -3

Cuando la característica de log N es cero o es un número positivo, podemos representar log N como un solo número. Así, por ejemplo, si $\log N = 2 + 0{,}3747$, generalmente pondremos $\log N = 2{,}3747$. Si la característica es negativa, la situación es diferente. Por ejemplo,

$$\log 0{,}0237 = -2 + 0{,}3747$$

Si este logaritmo se expresa como un solo número, sería

$$\log 0{,}0237 = -2 + 0{,}3747 = -(2 - 0{,}3747) = -1{,}6253$$

Pero ya que $-1{,}6253 = -1 + (-0{,}6253)$, la parte decimal de este número es negativa y, por tanto, no es un elemento de nuestra tabla. Por esta razón, resultará más fácil si cada característica negativa se escribe como la diferencia de dos enteros positivos, uno de los cuales sea un múltiplo de 10. Según esto, como la característica -2 es igual a $8 - 10$,

$$\log 0{,}0237 = -2 + 0{,}3747 = 8{,}3747 - 10$$

También podíamos haberlo expresado

$$\begin{aligned}\log 0{,}0237 &= 18{,}3747 - 20\\ &= 28{,}3747 - 30\end{aligned}$$

y así sucesivamente. Similarmente,

$$\log 0{,}00000237 = -6 + 0{,}3747 = 4{,}3747 - 10$$

y

$$\log 0{,}00237 = -3 + 0{,}3747 = 7{,}3747 - 10$$

Al trabajar con logaritmos, a menudo es necesario encontrar el número que corresponde a un logaritmo dado. El procedimiento usado para resolver tales problemas es precisamente el inverso del que se siguió para encontrar un logaritmo.

Ejemplo (d) Si $\log N = 4{,}3674$, hallar N.

Solución: Primero buscamos el 0,3674 en el cuerpo de la tabla; es decir, buscamos el elemento 3674. Al encontrarlo, notamos que está en el renglón que tiene 23 a la izquierda y en la columna encabezada por 3. Esto nos dice que

$$\log 2{,}33 = 0{,}3674$$

De ahí que

$$\begin{aligned}\log N &= 4{,}3674 = 4 + 0{,}3674\\ &= \log 10^4 + \log 2{,}33\\ &= \log(10^4 + 2{,}33)\\ &= \log 23\,300\end{aligned}$$

y por tanto,

$$N = 23\,300$$

Una vez que se entiende el razonamiento descrito en la solución del Ejemplo (d), no es difícil resolver tales problemas por inspección.

Ejemplo (e) Si $\log N = 7{,}3892 - 10$, hallar N.

Solución: Ya que la característica de log N es -3, sabemos que $N = n \times 10^{-3}$, en donde $\log n = 0{,}3892$. La Tabla I nos dice que $n = 2{,}45$. Por tanto,

$$N = 2{,}45 \times 10^{-3} = 0{,}00245$$

En otras palabras, para encontrar N, primero usamos la Tabla I para encontrar el número cuyo logaritmo sea 0,3892. Este número es 2,45. Entonces como la característica del logaritmo dado es -3, la coma decimal de 2,45 se mueve tres lugares hacia la izquierda quedando

$N = 0{,}00245$

13-4 Ejercicios

Escribir cada uno de los números dados en los Ejercicios del 1 al 9, en la notación decimal ordinaria.

1. $3{,}33 \times 10^3$
2. $6{,}73 \times 10^{-2}$
3. $1{,}01 \times 10^{-4}$
4. $3{,}361 \times 10^3$
5. $7{,}14 \times 10^{-1}$
6. $6{,}37 \times 10^0$
7. $1{,}23 \times 10^6$
8. $1{,}231 \times 10^{-3}$
9. $1{,}234 \times 10^2$

En los Ejercicios del 10 al 24, expresar cada uno de los números dados en la notación científica y determinar las características de sus logaritmos comunes.

10. 3000
11. 0,003
12. 300
13. 67 000
14. 6,7
15. 0,067
16. 0,0186
17. 186 000
18. 1,573
19. 336,1
20. 0,00036
21. 0,0202
22. 120×10^{-4}
23. $0{,}001527 \times 10^6$
24. $0{,}0013 \times 10^{-3}$
25. Si $\log 4{,}02 = 0{,}6042$, hallar el log de cada uno de los números siguientes.
    (a) 402 (d) 0,00402
    (b) 40 200 (e) 0,00000402
    (c) 4,020 (f) 4 020 000
26. Si $\log 7{,}75 = 0{,}8893$, resolver para N cada una de las ecuaciones siguientes.
    (a) $\log N = 2{,}8893$
    (b) $\log N = 4{,}8893 - 10$
    (c) $\log N = 6{,}8893 - 10$
    (d) $\log N = 4{,}8893$
    (e) $\log N = 0{,}8893 - 2$
    (f) $\log N = -1{,}1107$

Usar la Tabla I para aproximar el logaritmo común de cada uno de los números dados en los Ejercicios del 27 al 38.

27. 1090
28. 63,7
29. 186 000
30. 0,175
31. 2,86
32. 9,87
33. 0,00647
34. 0,754
35. 61,5
36. 125
37. 5810
38. 0,00000718

Usar la Tabla I para resolver para N cada una de las ecuaciones siguientes.

39. $\log N = 0{,}8280$
40. $\log N = 0{,}5623$
41. $\log N = 1{,}6920$
42. $\log N = 3{,}9754$
43. $\log N = 9{,}7803 - 10$
44. $\log N = 6{,}9445 - 10$
45. $\log N = 0{,}1673 - 2$
46. $\log N = 17{,}3365 - 20$
47. $\log N = 29{,}7738 - 30$
48. $\log N = -1{,}3990$

13-6 INTERPOLACION

Cuando un número N está expresado en notación científica, en la forma $N = n \times 10^c$

el número de cifras de n se llama número de *cifras significativas* de N. Como ejemplo, si 1760 se expresa como $1{,}76 \times 10^3$, entonces se dice que 1760 tiene tres cifras significativas. Sin embargo, si escribimos $1760 = 1{,}760 \times 10^3$, entonces se considera que 1760 tiene cuatro cifras significativas. Similarmente, si deseamos indicar que 8000 tiene solo una cifra significativa, escribiremos $8000 = 8 \times 10^3$. Para

indicar que dicho número tiene cuatro cifras significativas pondríamos 8000 = 8,000 × 10^3.

Al efectuar cálculos aritméticos, con frecuencia encontramos conveniente (o aún necesario) «redondear» un número dado a un cierto número de cifras significativas. Por ejemplo, para redondear $N = n \times 10^c$ a tres cifras significativas, sustituimos n por el más cercano número de tres cifras. Si n queda exactamente a la mitad entre dos números, convendremos en remplazarlo por el mayor.

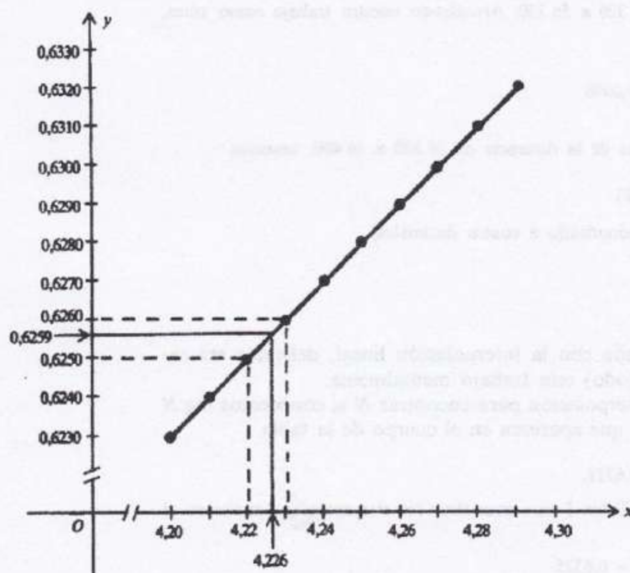
Ejemplo (a)

Dado el número N	N expresado como $n \times 10^c$	Número de cifras significativas de N	N redondeado a tres cifras significativas
206,7	$2{,}067 \times 10^2$	4	207
2655	$2{,}655 \times 10^3$	4	2660
0,0013046	$1{,}3046 \times 10^{-3}$	5	0,00130
8000	$8\,000 \times 10^3$	4	8000

En la Sección 13-5 veíamos cómo se podía usar la Tabla I para aproximar el logaritmo de cualquier número positivo de una, dos o tres cifras significativas. Con un poco más de esfuerzo, podemos usar la misma tabla para aproximar los logaritmos de números positivos de cuatro cifras significativas.

Si examinamos cuidadosamente los elementos de cualquier renglón de la Tabla I, no es difícil hacer un descubrimiento importante e interesante. Por ejemplo, consideremos el renglón que comienza con el 42.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325



¿Nota el lector que la diferencia entre cualesquiera dos elementos consecutivos de este renglón es aproximadamente la misma? Esto significa que si graficamos $y = \log x$, para x entre 4,20 y 4,29, la gráfica será, para fines prácticos, una línea recta.

Supongamos, ahora, que deseamos encontrar log 4,226. Nuestra gráfica nos sugiere que ya que 4,226 está a seis décimas de la distancia entre 4,22 y 4,23, entonces log 4,226 debe estar a seis décimas de la distancia entre log 4,22 y log 4,23. Mediante la Tabla I y acomodando nuestro trabajo de manera conveniente, tenemos

$$\left.\begin{array}{l} \log 4{,}22 \;\; = 0{,}6253 \\ \log 4{,}226 = \quad ? \\ \log 4{,}23 \;\; = 0{,}6263 \end{array}\right] \text{ Diferencia} = 0{,}0010$$

De ahí que

$$\begin{aligned} \log 4{,}226 &= \log 4{,}22 + \frac{6}{10}(0{,}0010) \\ &= 0{,}6253 + 0{,}0006 \\ &= 0{,}6259 \end{aligned}$$

Este proceso de aproximar el logaritmo de un número N que no aparece en nuestra tabla se llama *interpolación lineal.* Se basa en el hecho de que entre cualesquiera dos puntos suficientemente cercanos, la gráfica de $y = \log x$ es muy aproximadamente una recta. En general, cuando se usa este método para encontrar el log de un número de cuatro cifras significativas, el resultado será generalmente correcto hasta la cuarta cifra decimal. Para encontrar el log de un número de más de cuatro cifras significativas, primero lo redondeamos a cuatro cifras significativas y después interpolamos linealmente para encontrar el log del número redondeado.

Ejemplo (b) Hallar log 56 326.

Solución: Primero redondeamos 56 326 a 56 330. Arreglando nuestro trabajo como antes, tenemos

$$\left.\begin{array}{l} \log 56\,300 = 4{,}7505 \\ \log 56\,330 = \quad ? \\ \log 56\,400 = 4{,}7513 \end{array}\right] \text{ Diferencia} = 0{,}0008$$

Dado que 56 330 está a tres décimas de la distancia de 56 300 a 56 400, tenemos

$$\begin{aligned} \log 56\,330 &= \log 56\,300 + \frac{3}{10}(0{,}0008) \\ &= 4{,}7505 + 0{,}0002 \qquad \text{(redondeado a cuatro decimales)} \\ &= 4{,}7505 \end{aligned}$$

De ahí que
log 56 326 = 4,7507

Tras de habernos familiarizado con la interpolación lineal, debemos ser capaces de realizar todo (o casi todo) este trabajo mentalmente.

También podemos usar la interpolación para encontrar N si conocemos $\log N$ y su mantisa no es un elemento que aparezca en el cuerpo de la tabla.

Ejemplo (c) Hallar N si $\log N = 0{,}6318$.

Solución: Primero buscamos en la Tabla I para encontrar los elementos que encierran al 6318. Encontramos que

$\log 4{,}28 = 0{,}6314$ y $\log 4{,}29 = 0{,}6325$

Como log N está entre log 4,28 y log 4,29, sabemos que N está entre 4,28 y 4,29. Arreglando nuestro trabajo en forma tabular, ponemos

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\log 4{,}28 = 0{,}6314 \\ \log N \quad = 0{,}6318\end{array}\right] 0{,}0004 \\ \log 4{,}29 = 0{,}6325 \end{array}\right] 0{,}0011$$

con las diferencias indicadas en los logaritmos. Ahora, notemos que $\frac{0{,}0004}{0{,}0011} = \frac{4}{11}$. Por tanto, log N está a cuatro onceavos de la distancia desde log 4,28 hasta log 4,29. Deducimos, entonces, que N queda a cuatro onceavos de la distancia de 4,28 a 4,29. Luego, N debe valer aproximadamente 4,28 más $\frac{4}{11}$ de la diferencia entre 4,28 y 4,29. Por tanto,

$N = 4{,}28 + 0{,}004 = 4{,}284$ (con cuatro cifras significativas)

13-5 Ejercicios

En los Ejercicios del 1 al 15, usar el método de la interpolación lineal para encontrar los logaritmos de los números dados.

1. 2,564
2. 7,253
3. 1,093
4. 685,2
5. 346,8
6. 125 400
7. 0,1234
8. 0,8717
9. 0,09359
10. 2,002
11. 0,006751
12. 10,15
13. 1 063 000
14. 0,0005384
15. 33,61

En los Ejercicios del 16 al 30, hallar N, correcta hasta la cuarta cifra significativa.

16. $\log N = 0{,}5484$
17. $\log N = 0{,}6078$
18. $\log N = 0{,}2425$
19. $\log N = 1{,}7013$
20. $\log N = 9{,}7304 - 10$
21. $\log N = 8{,}4430 - 10$
22. $\log N = 3{,}6545$
23. $\log N = 4{,}8778$
24. $\log N = 4{,}9336 - 10$
25. $\log N = 0{,}0135$
26. $\log N = 2{,}9793$
27. $\log N = 7{,}8589 - 10$
28. $\log N = 2{,}7472 - 10$
29. $\log N = 0{,}9995$
30. $\log N = 6{,}9721 - 10$
31. Sabemos que $\log_2 4 = 2$ y que $\log_2 8 = 3$. Usar la interpolación lineal para encontrar $\log_2 6$. ¿Es demasiado pequeña o demasiado grande la respuesta?
32. Usar $\log 3 = 0{,}4771$ y $\log 4 = 0{,}6021$ para encontrar los logs de 3,2, 3,4, 3,6 y 3,8 empleando el método de la interpolación lineal. Comprobar los resultados con los elementos de la Tabla I. ¿Son demasiado grandes o demasiado pequeños los resultados?
33. Sea f una función definida por $f(x) = x^2$. Hallar $f(2)$ y $f(3)$ y utilizando esos valores y la interpolación lineal, aproximar $f(2{,}5)$. ¿Es este valor aproximado de $f(2{,}5)$ más pequeño o más grande que el valor verdadero de $f(2{,}5)$?

13-7 CALCULOS CON LOGARITMOS

Hubo un tiempo en que los logaritmos se estudiaban principalmente porque permitían simplificar largos y tediosos cálculos aritméticos. Actualmente, el uso cada vez más extendido de las calculadoras de escritorio y de otros dispositivos de cálculo, casi ha eliminado la necesidad de efectuar tales operaciones con lápiz y papel. Sin embargo, los cálculos logarítmicos básicos aún tienen algún valor práctico. Además, al resolver problemas de este tipo, se perfecciona la comprensión de la

función logarítmica, que, por otra parte, tiene muy amplias aplicaciones en las ciencias y en la matemática superior.

Ejemplo (a) Calcular $\frac{6,32 \times \sqrt{451}}{21,5}$ con tres cifras significativas.

Solución: Si hacemos

$$N = \frac{6,32 \times \sqrt{451}}{21,5}$$

entonces

$$\log N = \log 6,32 + \log \sqrt{451} - \log 21,5 \qquad \text{Teoremas 13-1 y 13-3}$$
$$= \log 6,32 + \frac{1}{2}\log 451 - \log 21,5 \qquad \text{Teorema 13-2}$$
$$= 0,8007 + \frac{1}{2}(2,6542) - 1,3324 \qquad \text{Mediante la Tabla I}$$
$$= 0,8007 + 1,3271 - 1,3324$$
$$= 0,7954$$

Ahora bien, puesto que se nos pide encontrar N con tres cifras significativas, no hay necesidad de interpolar. Simplemente buscamos en la tabla el número cuyo log sea el más cercano a 0,7954. Por tanto,

$$N = 6,24$$

Ejemplo (b) Usar la Tabla I para calcular $\sqrt[3]{\frac{71,25}{134,6}}$ con cuatro cifras significativas.

Solución: Primero hagamos

$$N = \sqrt[3]{\frac{71,25}{134,6}}$$

Entonces

$$\log N = \frac{1}{3}\log\frac{71,25}{134,6}$$
$$= \frac{1}{3}(\log 71,25 - \log 134,6)$$

Usando la Tabla I e interpolando, encontramos

$$\log 71,25 = 1,8528$$
$$\log 134,6 = 2,1290$$

Por tanto,

$$\log N = \frac{1}{3}(1,8528 - 2,1290)$$

Ahora, si restamos 2,1290 de 1,8528 obtendremos un número cuya parte fraccionaria es negativa. Luego, antes de restar, sumamos 10 − 10 a 1,8528 y ponemos

$$\log N = \frac{1}{3}[(11,8528 - 10) - (2,1290)]$$
$$= \frac{1}{3}(9,7238 - 10)$$

Al llegar a este punto notamos que $\frac{1}{3}$ de 10 no es un número natural. Para evitar esta dificultad, expresamos 9,7238 − 10 como 29,7238 − 30. Entonces, al dividir cada término entre 3, obtenemos log N expresado en su forma acostumbrada.

$$\log N = \frac{1}{3}(29,7238 - 30)$$
$$= 9,9079 - 10$$

Por tanto,

$N = 0{,}8090$

Observemos que la mantisa de log N estaba redondeada a cuatro decimales cuando dividimos entre 3. Esto se hizo a causa de que los elementos del cuerpo de la Tabla I están correctos solo a cuatro decimales. Notemos también que puesto que esta mantisa es uno de dichos elementos, no era necesario interpolar para encontrar N.

13-8 ECUACIONES LOGARITMICAS Y EXPONENCIALES

Las propiedades de las funciones logarítmicas se pueden aplicar a la determinación de los conjuntos solución de ciertos tipos de ecuaciones. Los ejemplos que siguen ilustran algunas de las técnicas que se pueden emplear.

Ejemplo (a) Resolver para x la ecuación: $3^x = 12$.

Solución: Dado que $r = s$ si, y solo si, $\log_b r = \log_b s$, la ecuación dada es equivalente a

$\log 3^x = \log 12$

De ahí que según el Teorema 13-2, tengamos

$x \log 3 = \log 12$

Dividiendo ambos lados entre log 3, obtenemos

$$x = \frac{\log 12}{\log 3}$$

De la Tabla I, leemos: $\log 12 = 1{,}0792$ y $\log 3 = 0{,}4771$. Por tanto,

$$x = \frac{1{,}0792}{0{,}4771}$$

Se puede encontrar una aproximación decimal de x, ya sea usando los logaritmos o mediante la división directa. En cualquier caso

$x = 2{,}26$ (con tres cifras significativas)

Ejemplo (b) Resolver para x: $x = \log_3 12$.

Solución: Primero escribiremos la ecuación en la forma exponencial:

$3^x = 12$

Pero esta ecuación es la del Ejemplo (a). Por tanto,

$$x = \frac{\log 12}{\log 3} = 2{,}26$$

Observemos que en el Ejemplo (b) se usaron los logaritmos comunes para encontrar una aproximación decimal del logaritmo de 12 de base 3. Este mismo método se puede aplicar para aproximar el logaritmo de cualquier número positivo en cualquier base b, $b > 0$, $b \neq 1$.

Ejemplo (c) Sin usar una tabla de logaritmos, resolver para x: $\log(x^2 - 3x) = 1$.

Solución: De la definición de logaritmo común, tenemos que

$$\begin{aligned} x^2 - 3x &= 10^1 \\ x^2 - 3x - 10 &= 0 \\ (x - 5)(x + 2) &= 0 \end{aligned}$$

de donde

$x = 5 \quad \text{o} \quad x = -2$

13-6 Ejercicios

En los Ejercicios del 1 al 16 usar la Tabla I para encontrar N, correcta a tres cifras significativas.

1. $N = (0{,}313)(64{,}5)$
2. $N = (0{,}00412)(17{,}5)(1450)$
3. $N = \dfrac{85{,}3}{10{,}6}$
4. $N = \dfrac{0{,}0035}{7260}$
5. $N = \dfrac{(17{,}3)(0{,}124)}{4270}$
6. $N = \dfrac{(185)(32{,}1)}{0{,}734}$
7. $N = (49{,}6)^3$
8. $N = (0{,}451)^{-2}$
9. $N = \dfrac{(54{,}3)(2{,}15)^3}{675}$
10. $N = \dfrac{(186\,000)(336)}{(4710)^2}$
11. $N = \sqrt[4]{0{,}000315}$
12. $N = \sqrt{0{,}124}$
13. $N = \sqrt[3]{51{,}6}$
14. $N = (3{,}14)^{-1/3}$
15. $N = \dfrac{\sqrt{476}}{(181\,000)(0{,}436)^2}$
16. $N = \sqrt[5]{\dfrac{624}{7{,}21}}$

En los Ejercicios del 17 al 22, usar la Tabla I y la interpolación apropiada para encontrar N, con cuatro cifras significativas correctas.

17. $N = \dfrac{(401{,}3)(6{,}415)}{3361}$
18. $N = \sqrt[3]{0{,}07142}$
19. $N = (1{,}076)^{20}$
20. $N = \sqrt{\dfrac{1{,}603}{81{,}24}}$
21. $N = \dfrac{(65{,}31)^2(1{,}082)}{1471}$
22. $N = \sqrt{(467{,}3)(38{,}03)}$
23. Hallar log(log 3).
24. Hallar log(log 7).
25. Como observábamos en la Sección 13-1, cuando un capital P se invierte a una tasa de interés anual de $r\,\%$, capitalizada anualmente, el monto A, al fin de n años, está dado por la fórmula

    $$A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$

    Si se invierten \$1000 a una tasa anual de 5 %, capitalizado anualmente, hallar el monto A (redondeado a los \$10 más cercanos)

    (a) después de 10 años (b) después de 20 años
26. **Usar la fórmula del Ejercicio 25 para determinar cuántos años se necesitan para que \$1000 invertidos al 5 % y capitalizados anualmente, se dupliquen.**
27. **Encontrar el volumen (correcto hasta tres cifras significativas) de una esfera cuyo radio es 21,6 centímetros. Usar**

    $$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ y } \pi = 3{,}14$$
28. **Hallar el radio (correcto hasta la tercera cifra significativa) de una esfera cuyo volumen es 816 centímetros cúbicos. Usar la fórmula y la aproximación de π dadas en el Ejercicio 27.**

En los Ejercicios del 29 al 32, resolver para x cada una de las ecuaciones dadas.

29. $10^x = 5$
30. $10^x = \dfrac{143}{231}$
31. $10^x = \sqrt{2}$
32. $10^x = \sqrt[3]{4}$

En los Ejercicios del 33 al 36, hallar cada uno de los logaritmos dados, con tres cifras significativas.

33. $\log_2 7$
34. $\log_5 10$
35. $\log_5 7$
36. $\log_9 4$

Hallar el conjunto solución de cada una de las ecuaciones dadas en los Ejercicios del 37 al 42. Aproximar las soluciones a tres cifras significativas.

37. $3^{2x-1} = 64$
38. $5^{3x-1} = 10$
39. $3^{1-x} = 2$
40. $10^{x^2} = 4$
41. $\log(x + 1) - \log x = 0{,}2122$
42. $\log(x - 1) - \log x = 1{,}4829$

Sin usar una tabla de logaritmos, hallar el conjunto solución de cada una de las ecuaciones siguientes.

43. $\log(x^2 - 1) - \log(x + 1) = 2$
44. $\log(x^2 - 4) - \log(x - 2) = 1$
45. $\log x = 1 + \log 3$
46. $\log x = \log(x - 4)$
47. $\log_2(x + 1) + \log_2(x - 1) = 3$
48. $(\log x)^2 = \log x$

14 Sucesiones: Un tipo especial de funciones

14-1 DEFINICION Y NOTACION

En cualquier aspecto de la matemática y en muchos campos de la ciencia, encontraremos que es básico el concepto de función. Este capítulo trata sobre un tipo especial de funciones —funciones cuyo dominio es N o un subconjunto estándar de N.

El problema siguiente, o una de sus numerosas variantes, nos es familiar a la mayoría, como una intrigante paradoja: ¿Cómo es posible abandonar un recinto cerrado si, para llegar a la salida, distante 32 metros, debemos recorrer primero la mitad de la distancia hasta ella, después la mitad de la distancia restante, y así sucesivamente?

Posiblemente nunca podamos responder a la pregunta de manera convincente, pero analicémosla del modo siguiente. Anotemos las distancias que restan tras de haber recorrido cada media distancia. Tendremos los siguientes datos (en metros):

1.	16	6.	$\frac{1}{2}$	11.	$\frac{1}{64}$
2.	8	7.	$\frac{1}{4}$	12.	$\frac{1}{128}$
3.	4	8.	$\frac{1}{8}$	13.	$\frac{1}{256}$
4.	2	9.	$\frac{1}{16}$	14.	...
5.	1	10.	$\frac{1}{32}$	15.	...

Notemos que a cada uno de los números naturales, empezando por el 1, le corresponde exactamente una distancia. Notemos también que los datos se pueden extender indefinidamente. Si representamos con n el número de veces que la distancia restante se ha bisectado y si $d(n)$ es la distancia asociada con él, podemos expresar la siguiente fórmula

$d(n) = 16(2)^{1-n}$, en donde $n \in N$

Esto define una función f cuyos elementos son los pares ordenados $(n, d(n))$.

$f = \{(1, 16), (2, 8), (3, 4), (4, 2), \ldots\}$

El dominio de f es N. La imagen es

$\{16, 8, 4, 2, \ldots\} = \{d(n) \mid n \in N, d(n) = 16(2)^{1-n}\}$

Una función tal se llama sucesión infinita.

Definición Una *sucesión* es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales o un subconjunto estándar de él. Si el dominio es N, se llama *sucesión infinita*; si en cambio es un subconjunto estándar de N, se llama *sucesión finita*.

Ejemplo (a) $a = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7), \ldots\}$. Esta es una sucesión infinita. $a(n) = 2n - 1$, $n \in N$.

Ejemplo (b) $b = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), (5, 10), (6, 12)\}$. Esta es una sucesión finita. $b(n) = 2n$, $n \in N$, $1 \leq n \leq 6$.

Ejemplo (c) $c = \{(1, 1), (2, 1), (3, 0{,}01), (4, 0{,}001), (5, 0{,}0001)\}$. $c(n) = \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$, $n \in N, 1 \leq n \leq 5$. Es finita.

Ejemplo (d) $d = \{(1, 3), (2, 9), (3, 27), (4, 81), \ldots\}$. $d(n) = 3^n$, $n \in N$. Es infinita.

Dado que el dominio de una sucesión siempre es N o un subconjunto estándar de N, una sucesión se puede describir adecuadamente enumerando los elementos de la imagen en el orden de los números naturales con los cuales se asocian. Por ejemplo, la sucesión

$a = \{(n, a(n)), \mid n \in N\}$

se puede escribir

$a(1), a(2), a(3), a(4), \ldots, a(n), \ldots$

Sin embargo, adoptaremos una notación más simple, utilizando subíndices. Sean

$a(1) = a_1, a(2) = a_2, a(3) = a_3, \ldots, a(n) = a_n, \ldots$

La sucesión, entonces, se denota por

$\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

a_1 se llama *primer término* de la sucesión; a_2, *segundo término*, y en general, para cualquier número natural n, a_n es el *término n-ésimo* de la sucesión.

En el Ejemplo (a), puesto que $a_n = 2n - 1$, ponemos

$\{a_n\} = \{2n - 1\} = 1, 3, 5, \ldots, 2n - 1, \ldots$

y leemos «a es la sucesión de números cuyo n-ésimo término es $2n - 1$».

Si deseamos expresar el término dieciséis de esta sucesión, sustituimos $n = 16$ en la fórmula $a_n = 2n - 1$, lo cual da $a_{16} = 2 \cdot 16 - 1 = 31$. Luego, 31 es el término dieciséis de la sucesión, es decir, que (16, 31) es un par ordenado de la función sucesión. Llamaremos indistintamente sucesión a

$\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \ldots$

o

$a = \{(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), \ldots\}$

Si usamos esta notación para los otros ejemplos antes dados, tenemos

Ejemplo (b) $\{b_n\} = \{2n\}$, en donde $n \in N$, $1 \leq n \leq 6$. b es la sucesión cuyo término n-ésimo es $2n$, $n < 7$. $\{b_n\} = 2, 4, 6, 8, 10, 12$.

Ejemplo (c) $\{c_n\} = \left\{\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}\right\}, n \in N, 1 \leq n \leq 5. \left\{\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}\right\} = 1, 0{,}1, 0{,}01, 0{,}001, 0{,}0001.$

Ejemplo (d) $\{d_n\} = \{3^n\}, n \in N. \{3^n\} = 3, 9, 27, 81, \ldots$

Debemos suponer que una sucesión es infinita a menos que el dominio sea un subconjunto estándar de N especificado.

Otro método para definir una sucesión es dar el primer término y una fórmula para el término $(n + 1)$ en términos del n-ésimo término. Tal tipo de fórmulas se llaman *fórmulas de recurrencia*. Por ejemplo, al principio de esta sección podíamos haber dicho: Sea $\{a_n\}$ una sucesión en la que $a_1 = 16$ y $a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n$. Teniendo en cuenta nuestro convenio sobre la notación, $a_1 = 16$ nos dice que 16 es el primer término de la sucesión. Dado que $a_1 = 16$ y que $a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n$, $a_2 = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8$, $a_3 = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$ y así sucesivamente.

$\{a_n\} = 16, 8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$

Ejemplo (e) Escribir cuatro términos de la sucesión cuyo primer término es 2 y en la que

$$a_{n+1} = \frac{(a_n)^2}{(a_n - 1)(a_n + 1)}$$

Solución: Sustituyamos $a_1 = 2$ en la anterior fórmula de recurrencia para obtener a_2, después, sustituyamos a_2 para obtener a_3 y así sucesivamente.

$a_1 = 2$

$$a_2 = \frac{(a_1)^2}{(a_1 - 1)(a_1 + 1)} = \frac{2^2}{(2 - 1)(2 + 1)} = \frac{4}{3}$$

$$a_3 = \frac{(a_2)^2}{(a_2 - 1)(a_2 + 1)} = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^2}{\left(\frac{4}{3} - 1\right)\left(\frac{4}{3} + 1\right)} = \frac{16}{7}$$

$$a_4 = \frac{(a_3)^2}{(a_3 - 1)(a_3 + 1)} = \frac{\left(\frac{16}{7}\right)^2}{\left(\frac{16}{7} - 1\right)\left(\frac{16}{7} + 1\right)} = \frac{256}{207}$$

Los primeros 4 términos son $2, \frac{4}{3}, \frac{16}{7}, \frac{256}{207}$.

14-2 SUMA DE TERMINOS CONSECUTIVOS DE UNA SUCESION

Con frecuencia es importante considerar la suma de un número finito de términos consecutivos de una sucesión.

Por ejemplo, supongamos que alguien ha recibido $5 en su primer cumpleaños con la promesa de que se le duplicará la cantidad en cada año subsecuente. Si esa persona ahorró todo el dinero así recibido, ¿cuánto tendrá en su decimotercero cumpleaños? Tenemos una sucesión $\{a_n\}$ definida así:

$a_1 = 5, a_2 = 5 \cdot 2, a_3 = 5 \cdot 2^2, \ldots, a_n = 5 \cdot 2^{n-1}, 1 \leq n \leq 30$:

$\{a_n\} = 5, 10, 20, 40, \ldots$

Podríamos haber deseado la suma de los primeros 30 términos; un problema aritmético bien definido, pero tedioso. En la Sección 14-4 desarrollaremos una fórmula para evaluar tal tipo de sumas. Por el momento, sin embargo, solo deseamos introducir una notación que permita escribir la suma sin usar los 30 términos. Emplearemos la letra griega sigma mayúscula, Σ, seguida de una fórmula para el término n-ésimo e indicaremos cuáles términos se han de sumar poniendo numerales arriba y abajo de la sigma mayúscula. Así, en nuestro ejemplo, la cantidad de dinero acumulada en los 30 años sería

$$\sum_{n=1}^{30} 5 \cdot 2^{n-1}$$

Esto representa la suma siguiente:

$$\sum_{n=1}^{30} 5 \cdot 2^{n-1} = 5 \cdot 2^0 + 5 \cdot 2^1 + 5 \cdot 2^2 + \cdots + 5 \cdot 2^{29}$$

Una expresión para la cantidad que recibiría la persona citada durante sus años veintes, se podría representar como

$$\sum_{n=20}^{29} 5 \cdot 2^{n-1} = 5 \cdot 2^{19} + 5 \cdot 2^{20} + \ldots + 5 \cdot 2^{28}$$

En general, si S_k es la suma de los primeros k términos de una sucesión cuyo n-ésimo término es a_n, tenemos

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$$

Ejemplo (a) Hallar la suma $\sum_{n=1}^{7} 3n$.

Solución: $\sum_{n=1}^{7} 3n = 3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18 + 21 = 84.$

Ejemplo (b) Dada la sucesión $\left\{\dfrac{n+1}{n(n+2)}\right\}$.

(1) Escribir los primeros cinco términos.
(2) Escribir una expresión para la suma de los primeros 10 términos, usando la notación sigma.
(3) Escribir dos expresiones para la suma de los términos octavo, noveno y décimo de la sucesión.

Solución:

(1) Los primeros cinco términos son

$$\frac{2}{1 \cdot 3}, \frac{3}{2 \cdot 4}, \frac{4}{3 \cdot 5}, \frac{5}{4 \cdot 6}, \frac{6}{5 \cdot 7} \quad \text{o} \quad \frac{2}{3}, \frac{3}{8}, \frac{4}{15}, \frac{5}{24}, \frac{6}{35}$$

(2) Sea S_{10} la suma de los primeros 10 términos:

$$S_{10} = \sum_{n=1}^{10} \frac{n+1}{n(n+2)}$$

(3) Obtenemos el octavo término cuando $n = 8$ y así sucesivamente. Por tanto, la suma de los términos octavo, noveno y décimo es

$$\sum_{n=8}^{10} \frac{n+1}{n(n+2)} = \frac{9}{8 \cdot 10} + \frac{10}{9 \cdot 11} + \frac{11}{10 \cdot 12}$$

14-1 Ejercicios

Expresar los primeros cinco términos de las sucesiones dadas en los Ejercicios del 1 al 8.

1. $\{2n^2+1\}$
2. $\{(-1)^{n+1}(2n-1)\}$
3. $\{n^3\}$
4. $\left\{\dfrac{1}{(2n+2)(2n+4)}\right\}$
5. $\{(-1)^n \cdot 5^n\}$
6. $\{n \cdot 3^{n-1}\}$
7. $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n{}^2 + 3$
8. $a_1 = 100, a_{n+1} = \dfrac{a_n - 2}{4}$

Listar los elementos del dominio y de la imagen de cada una de las sucesiones dadas en los Ejercicios del 9 al 15.

9. $\{3n-1\}$
10. $\{2^n\}$
11. 3, 0,3, 0,03, 0,003, 0,0003, 0,00003, 0,000003
12. $12, -18, 27, -\dfrac{81}{2}, \dfrac{243}{4}$
13. Los enteros consecutivos desde 14 hasta 52.
14. La sucesión cuyo primer término $a_1 = 7$ y en la que $a_{n+1} = n(n-1)a_n$.
15. $\dfrac{1}{32}, \dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}, 1$
16. Expresar los primeros cinco términos de las sucesiones dadas en los Ejercicios 9, 10, 13 y 14.
17. Hallar el término cincuenta de la sucesión $\{3n-1\}$.
18. Hallar el término diecisiete de la sucesión cuyo término quince es 15 y en la que $a_{n+1} = 5a_n$.

Hallar una fórmula para el término *n*-ésimo de las sucesiones cuyos primeros cuatro términos aparecen dados en los Ejercicios del 19 al 24.

19. 4, 8, 12, 16, ...
20. 2, 4, 8, 16, ...
21. $\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{5}, \ldots$
22. 2, 6, 10, 14, ...
23. $-1, 1, -1, 1, \ldots$
24. $\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{27}, -\dfrac{1}{81}, \ldots$

Expresar las sumas dadas en los Ejercicios del 25 al 30 en forma desarrollada, simplificando cada término.

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{6} \frac{n(n+1)}{2}$
26. $\displaystyle\sum_{i=0}^{5} \frac{i}{1+i}$
27. $\displaystyle\sum_{r=7}^{11} (3r-2)$
28. $\displaystyle\sum_{n=0}^{4} \frac{n}{(1+n)^n}$
29. $\displaystyle\sum_{n=0}^{4} \frac{(-1)^n}{3^n+1}$
30. $\displaystyle\sum_{j=1}^{10} (-1)^{j+1}(j^2-1)$

Usar la notación sigma para expresar las sumas dadas en los Ejercicios del 31 al 37.

31. $1\cdot 2 - 3\cdot 4 + 5\cdot 6 - 7\cdot 8$
32. $\dfrac{3}{5} + \dfrac{5}{7} + \dfrac{7}{9} + \dfrac{9}{11} + \cdots + \dfrac{57}{59}$
33. $1^2 + 2^3 + 3^4 + 4^5 + \cdots + 100^{101}$
34. $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + 100^2$
35. La suma de todos los números pares de dos cifras.
36. La suma de todos los múltiplos de 3 entre 70 y 170.
37. $2{,}5 + 0{,}013 + 0{,}00013 + 0{,}0000013 + \cdots + 0{,}0000000013$

14-3 SUCESIONES ARITMETICAS Y GEOMETRICAS

Dos tipos de sucesiones hay que son lo bastante importantes en la matemática elemental como para garantizar un estudio especial.

- La sucesión $\{a_n\}$, en la que $a_n - a_{n-1} = d$, para toda $n > 1$, se llama *sucesión aritmética* o *progresión aritmética*. d se llama *diferencia común*.
- La sucesión $\{a_n\}$, en la que $a_n = ra_{n-1}$, para toda $n > 1$, se llama *sucesión geométrica* o *progresión geométrica*. r se llama *razón común*.

Es cosa simple dar ejemplos. Tomemos dos números complejos cualesquiera, sea uno de ellos el primer término de la sucesión y el otro la diferencia común si se desea construir una progresión aritmética, o la razón común si lo que se desea es una progresión geométrica.

Supóngase que tomamos 5 y 2. Sea 5 el primer término a_1 y 2 la diferencia común d. La progresión aritmética es

5, 7, 9, 11, 13, . . .

La progresión geométrica con $a_1 = 5$, $r = 2$ es

5, 10, 20, 40, 80, 160, . . .

En general, si a_n es el n-ésimo término, d la diferencia común y r la razón común, podemos poner:

Progresión aritmética

$$\{a_n\} = a_1, \quad a_1 + d, \quad a_1 + 2d, \quad a_1 + 3d, \quad \ldots, \quad [a_1 + (n-1)d], \quad \ldots$$

en donde $d = a_n - a_{n-1}$ y $a_n = a_1 + (n-1)d$.

Progresión geométrica

$$\{a_n\} = a_1, \quad a_1 r, \quad a_1 r^2, \quad a_1 r^3, \quad \ldots, \quad a_1 r^{n-1}, \quad \ldots$$

en donde $r = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ y $a_n = a_1 r^{n-1}$.

Por tanto, tenemos fórmulas que comprenden el primer término, el n-ésimo término, n, y ya sea r o d. Podemos usarlas para encontrar cualquiera de las variables cuando se conocen las otras tres.

Ejemplo (a) **Dada la progresión aritmética cuyo primer término es 40 y cuya diferencia común es 0,5, hallar el término veinte.**

Solución: $a_1 = 40$, $d = 0{,}5$, $n = 20$. En una progresión aritmética, $a_n = a_1 + (n-1)d$. Por tanto,

$a_{20} = 40 + 19(0{,}5) = 40 + 9{,}5 = 49{,}5$

Ejemplo (b) **Dada la progresión aritmética cuyo undécimo término es 224 y cuyo primer término es 7, hallar la razón común y dar los primeros cinco términos de la sucesión.**

Solución: $a_n = 224$, $a_1 = 7$, $n = 11$. En una progresión geométrica, $a_n = a_1 r^{n-1}$. Sustituyendo obtenemos

$224 = 7 \cdot r^{10}$

$r^{10} = 32$

$r = \sqrt[10]{32} = \sqrt[10]{2^5} = \sqrt{2}$

Los primeros cinco términos son 7, $7\sqrt{2}$, 14, $14\sqrt{2}$ y 28.

Ejemplo (c) **Roberto, un joven de 20 años, desea ganar $20 000 al año para cuando tenga 30 años. Si acepta un empleo con un salario inicial de $8000 y se le promete un aumento anual de $360, ¿cuánto tiempo le tomará llegar a su meta?**

Solución:
Salario del primer año: $8000
Salario del segundo año: $8360, etc.

Cada año se *suman* $360 para obtener el salario del año siguiente. Tenemos entonces una progresión aritmética con $a_1 = \$8000$, $d = \$360$. Deseamos encontrar n tal que $a_n \geq 20\,000$.

$a_n = a_1 + (n-1)d$

Por tanto, necesitamos resolver la desigualdad siguiente

$$8000 + (n-1)(360) \geq 20\,000$$
$$8000 + 360n - 360 \geq 20\,000$$
$$360n \geq 12\,360$$
$$n \geq \frac{12\,360}{360} = 34\frac{1}{3}.$$

Puesto que $n \in N$, entonces $n \geq 35$. De ahí que ganará arriba de $20 000 a los 35 años de estar en el trabajo.

Ejemplo (d) Con lo anterior Roberto se siente abatido. ¿Cuál debe ser su aumento anual si es que ha de alcanzar los $20 000 en 10 años?

Solución: $a_1 = 8000$, $n = 10$, $a_n = 20\,000$; deseamos encontrar d.

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$20\,000 = 8000 + 9d$$
$$9d = 12\,000$$
$$d = 1333\frac{1}{3}$$

Necesitaría un aumento anual de por lo menos $\$1333\frac{1}{3}$.

Ejemplo (e) La población de una ciudad crece a razón del 10 % anual. Si la población actual es de 100 000, hallar la población esperada dentro de 10 años.

Solución: Por inducción, construyamos una fórmula que nos dé la población al final de cada año.

Primer año: $100\,000 + 0{,}1(100\,000) = 1{,}1(100\,000)$

Segundo año: $1{,}1(100\,000) + 0{,}1[1{,}1(100\,000)] = 1{,}1[1{,}1(100\,000)] = (1{,}1)^2(100\,000)$

Tercer año: $(1{,}1)^2(100\,000) + 0{,}1[(1{,}1)^2(100\,000)] = (1{,}1)^3(100\,000)$

Notamos que tenemos una progresión geométrica en la que $a_1 = 1{,}1(100\,000)$ y $r = 1{,}1$. El n-ésimo término representa la población dentro de n años a partir de hoy. Por tanto, la población en 10 años deberá ser:

$(1{,}1)^{10}(100\,000)$

Usamos logaritmos para evaluar este número en forma aproximada, lo cual da:

Población dentro de 10 años $= (1{,}1)^{10}(100\,000) = 259\,000$

14-2 Ejercicios

1. Cada una de las sucesiones siguientes es aritmética o geométrica. Marcarlas y dar la diferencia común o la razón común, según el caso. Dar también una fórmula para el término n-ésimo.

   (a) $-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \ldots$

   (b) $-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \ldots$

   (c) $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

   (d) $2, 4, 6, 8, \ldots$

   (e) $2, 4, 8, 16, \ldots$

2. Dar una fórmula para el término n-ésimo de cada una de las sucesiones siguientes. Marcar cada una según que sea aritmética, geométrica o ninguna de las dos.

   (a) $\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \frac{1}{36}, \ldots$

   (b) $25, -5, 1, -\frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \ldots$

   (c) $47, 44, 41, 38, \ldots$

   (d) Los múltiplos de 5

   (e) $1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$

   (f) $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, \ldots$

3. Dar los primeros cinco términos de una progresión aritmética si

(a) $a_1 = 11, d = 3$ (c) $a_1 = 5, d = \frac{3}{5}$

(b) $a_1 = 3, d = -\frac{3}{2}$ (d) $a_1 = x, d = y$

4. Dar los primeros cinco términos de una progresión geométrica si

(a) $a_1 = 11, r = 3$ (c) $a_1 = 5, r = \frac{3}{5}$

(b) $a_1 = 3, r = -\frac{3}{2}$ (d) $a_1 = x, r = y$

5. Dar los siguientes tres términos en cada una de las sucesiones geométricas siguientes.

(a) $4, 8, \ldots$ (c) $\frac{1}{x}, \frac{2}{x^2}, \ldots$

(b) $3, -9, \ldots$ (d) $i, -1, -i, \ldots$

6. Dar los siguientes tres términos en cada una de las sucesiones aritméticas siguientes.

(a) $4, 8, \ldots$ (d) $a + 4b, a + 7b, \ldots$
(b) $m, m - 3, \ldots$ (e) $1 + i, 1 + 2i, \ldots$
(c) $10, -2, \ldots$

7. ¿Qué término de la sucesión aritmética $-15, -13, -11, \ldots$ es 89?
8. El cuarto término de una progresión aritmética es 16 y el décimo término es 28. Hallar el término cincuenta.
9. La razón común de una sucesión aritmética es $\frac{1}{2}$. El término 13 es $\frac{1}{512}$. Dar los primeros cinco términos.
10. Hallar el término 50 de la progresión geométrica cuyos primeros tres términos son $-5, \frac{5}{2}, -\frac{5}{4}$. (Dejar la respuesta en forma exponencial.)
11. Dada la sucesión $\frac{1}{2}, x, \frac{9}{2}$,

(a) Determinar x de modo que la sucesión sea aritmética.

(b) Determinar x de modo que la sucesion sea geométrica.

12. Una pelota rebota un tercio de la distancia que ha caído. Si se deja caer desde una altura de 30 metros, ¿cuántas veces rebotará antes de que el rebote sea de 8 centímetros o menos?
13. ¿Cuántos múltiplos de 11 tienen tres cifras?
14. Cierta sustancia radiactiva tiene una vida media de 1800 años (la cantidad de materia se reduce a la mitad al cabo de 1800 años). Si actualmente se tienen 320 gramos, ¿cuánto quedará al cabo de 10 800 años?
15. Hallar una sucesión de cinco números, el primero de los cuales es 4 y el cuarto 24 si los primeros tres forman una sucesión aritmética y los últimos tres, una sucesión geométrica.
16. Un cultivo de bacterias se duplica cada 10 minutos. Si había cinco bacterias en el cultivo original, ¿cuántas habrá al término de 2 horas?
17. Si la población de una ciudad aumenta a razón de 20 % cada año, ¿durante qué año se duplicará la población?
18. Un químico tiene 100 centímetros cúbicos de alcohol. Extrae 5 centímetros cúbicos y los sustituye por agua, después, saca 5 centímetros cúbicos de la mezcla y los sustituye con agua y así sucesivamente. ¿Cuánto alcohol saca en la décimo segunda ocasión?
19. Supóngase que un benefactor depositó $100 en la cuenta de una persona el día en que ésta cumplió su primer año de edad.

(a) Si la cuenta ganaba interés a razón de 5 % capitalizado anualmente, ¿cuál será el monto de la cuenta (redondeado a diez centavos) el vigésimo cumpleaños de la persona?

(b) Si el interés se capitaliza semestralmente, ¿cuál será el monto de la cuenta (redondeado a pesos) el día del vigésimo primer cumpleaños?

14-4 LA SUMA DE UNA SUCESION ARITMETICA

Nuestro siguiente objetivo es encontrar fórmulas para la suma de una progresión aritmética y de una progresión geométrica. Para una sucesión aritmética cuyo primer término sea a_1 y cuya diferencia común sea d, la suma es

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + [a_1 + (n - 1)d]$$

Si a_n es el n-ésimo término, entonces $a_{n-1} = a_n - d$, $a_{n-2} = a_n - 2d$, etc. Podemos ahora escribir la misma suma en la forma siguiente:

$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots + [a_n - (n - 1)d]$$

Sumando las dos expresiones que tenemos para S_n, nos queda

$$2S_n = (a_1 + a_n) + [(a_1 + d) + (a_n - d)] + [(a_1 + 2d) + (a_n - 2d))]$$
$$+ \cdots + \{[a_1 + (n-1)d] + [a_n - (n-1)d]\}$$
$$= (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n)$$
$$= n(a_1 + a_n)$$

Luego,

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Dado que $a_n = a_1 + (n-1)d$, también podemos poner

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n[a_1 + a_1 + (n-1)d]}{2}$$
$$= \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2}$$

Ejemplo (a) Hallar la suma de todos los números naturales pares de dos cifras.

Solución: El menor número par de dos cifras es 10 y el mayor es 98, por lo que tenemos la sucesión aritmética

$10, 12, 14, \ldots, 98; \qquad a_1 = 10,\ d = 2,\ a_n = 98$

Para aplicar la fórmula de la suma

$$S = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

necesitamos conocer n. Sustituyéndola en la fórmula de a_n, obtenemos

$a_n = a_1 + (n-1)d$
$98 = 10 + (n-1)2$
$n = 45$

de ahí que

$$S = \frac{45(10 + 98)}{2} = 2430$$

Ejemplo (b) La suma de los primeros 12 términos de una progresión aritmética es 300 y el término quince es 59. Hallar la diferencia común d y el primer término a_1.

Solución: Mediante la fórmula $a_n = a_1 + (n-1)d$, tenemos

$a_{15} = a_1 + 14d$

o

$59 = a_1 + 14d$

Tenemos dos variables, a_1 y d, de modo que buscamos otra ecuación que también las contenga. No hemos usado el hecho de que $S_n = 300$. Escogemos la forma de la fórmula de la suma de una progresión aritmética, que contenga a a_1 y a d.

$$S_n = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2}$$

$$300 = \frac{12[2a_1 + 11d]}{2}$$

$12a_1 + 66d = 300$
$2a_1 + 11d = 50$

Ahora tenemos dos ecuaciones con a_1 y d y las resolvemos simultáneamente:

$$\begin{cases} a_1 + 14d = 59 \\ 2a_1 + 11d = 50 \end{cases}$$

Esto nos da $a_1 = 3$, $d = 4$.

14-5 LA SUMA DE UNA SUCESION GEOMETRICA

Sea S_n la suma de los primeros n términos de una sucesión geométrica cuyo primer término es a_1 y de razón común r:

$$S_n = a_1 + ra_1 + r^2a_1 + r^3a_1 + \cdots + r^{n-1}a_1$$

Supóngase que multiplicamos ambos lados de esta ecuación por r. Nos queda

$$rS_n = ra_1 + r^2a_1 + r^3a_1 + r^4a_1 + \cdots + r^na_1$$

Si ahora restamos rS_n de S_n, obtenemos

$$S_n - rS_n = a_1 + (ra_1 - ra_1) + (r^2a_1 - r^2a_1) + \cdots + (r^{n-1}a_1 - r^{n-1}a_1) - r^na_1$$

Factorizando la expresión de la izquierda y juntando los términos semejantes de la derecha, tenemos

$$(1 - r)S_n = a_1 - r^na_1$$

Resolviendo para S_n, queda

$$S_n = \frac{a_1 - r^na_1}{1 - r}$$

$$= \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}, \qquad r \neq 1$$

Puesto que $a_n = r^{n-1}a_1$, podemos derivar una fórmula equivalente con a_n. Podemos poner

$$S_n = \frac{a_1 - r(r^{n-1}a_1)}{1 - r}$$

$$= \frac{a_1 - ra_n}{1 - r}, \qquad r \neq 1$$

Para resolver los problemas de los Ejercicios 14-3, necesitaremos las fórmulas obtenidas en las secciones anteriores, además de las de esta sección. Las enunciaremos a continuación.

Progresión aritmética

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n[2a_1 + (n - 1)d]}{2}$$

Progresión geométrica

$$a_n = r^{n-1}a_1$$

$$S_n = \frac{a_1 - ra_n}{1 - r} = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}, \qquad r \neq 1$$

d diferencia común de términos consecutivos
r razón común de términos consecutivos
a_n término n-ésimo
S_n suma de n términos

Ejemplo (c) Completar los ejercicios de las páginas 335 y 336.

Solución: La cantidad de dinero recibida en 30 años es

$$S_{30} = \sum_{n=1}^{30} 5 \cdot 2^{n-1}$$

Esta es la suma de 30 términos de una progresión geométrica. $a_1 = 5$, $r = 2$, $n = 30$. Usamos la fórmula

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

$$S_{30} = \frac{5(1 - 2^{30})}{1 - 2} = 5(2^{30} - 1)$$

Mediante los logaritmos podemos encontrar una aproximación de 2^{30}. $2^{30} = 1\,070\,000\,000$. Por tanto, si el benefactor mantiene su promesa, al cabo de 30 años la persona tendrá más de 5 mil millones de pesos.

La cantidad de dinero que recibe la persona durante sus años veintes, es $\sum_{n=20}^{29} 5 \cdot 2^{n-1}$. En este caso tenemos de nuevo una progresión geométrica, de modo que usamos la misma fórmula para encontrar la suma. Sin embargo, tiene solo 10 términos y el primero es $5 \cdot 2^{19}$.

$$S_{10} = \frac{5 \cdot 2^{19}(1 - 2^{10})}{1 - 2} = 5(2^{29} - 2^{19})$$

De nuevo, usando logaritmos obtenemos una aproximación,

$$S_{10} = \$2\,680\,000\,000$$

14-3 Ejercicios

1. Hallar la suma de los primeros 100 números naturales.
2. Hallar la suma de los primeros 100 impares naturales.
3. Hallar la suma de todos los impares naturales menores que 100.
4. Dados los primeros tres términos de una progresión aritmética, 5, $\frac{21}{4}$, $\frac{11}{2}$; hallar el término 100 y la suma de los primeros 100 términos.
5. Dados los primeros tres términos de una sucesión geométrica, $-\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $-\frac{4}{3}$; hallar el séptimo término y la suma de los siete términos.
6. Hallar la suma de una progresión geométrica de 10 términos si el primero es 1 y la razón común es 0,1.
7. Hallar la suma de una progresión geométrica cuyo primer término es 100, cuya razón común es $\frac{1}{2}$ y cuyo último término es $\frac{25}{32}$.
8. El segundo término de una sucesión geométrica de números reales es 4 y el sexto término es 16. Hallar la suma de los primeros ocho términos.
9. La suma de una progresión geométrica es 2343, el primer término es 3 y el último es 1875; dar los primeros cinco términos de la sucesión.
10. ¿Cuántos enteros impares consecutivos, empezando por 13, se deben sumar para que la suma sea 640?
11. Hallar la suma de todos los múltiplos de 7 que quedan entre 500 y 600.
12. Dar una sucesión geométrica cuya suma sea 0,01313131313.
13. Mediante una progresión geométrica, dar una expresión para 4,215555.
14. Indicar si las expresiones siguientes representan sumas de sucesiones aritméticas o geométricas o ninguna de ambas. Hallar cada suma, usando la fórmula apropiada, si es que existe. Si no, desarrollar y sumar.

(a) $\sum_{j=1}^{6} 3^j$ (e) $\sum_{k=0}^{10} \frac{1}{2^k}$

(b) $\sum_{k=1}^{20} (3k - 1)$ (f) $\sum_{k=1}^{5} k(k + 1)$

(c) $\sum_{k=1}^{7} \frac{k - 1}{k + 1}$ (g) $\sum_{j=1}^{4} (-2)^j$

(d) $\sum_{j=1}^{6} (3 + 2^j)$

15. Hallar x si $\sum_{j=1}^{6} jx = 28.$

16. Hallar n si $\sum_{j=1}^{n} 3^j = 120.$

17. En un aserradero hay un montón triangular de troncos con 1 tronco en la hilera superior, 2 en la segunda y así sucesivamente. Si hay 630 troncos en el montón, ¿cuántos hay en la hilera inferior?

18. El Sr. Garza ganaba un salario de $8000 en 1945 y ha recibido un aumento de $240 cada año. ¿Cuánto estará ganando en 1974? ¿Cuál es su salario promedio en ese periodo?

19. El Sr. González compró un Valhalla Tiger en $3200. Dio $320 de pago inicial y convino en pagar el resto en 12 mensualidades de $240, más un 6 % de interés sobre saldos insolutos. Hallar el monto total del interés pagado.

20. El Sr. Pérez inició una cadena de cartas escribiendo a tres de sus amigos y rogándoles que cada uno enviase una copia a otras tres personas, quienes a su vez enviarían copias a otras tres personas y así sucesivamente. Si la cadena no se ha interrumpido cuando se envía el décimo juego de cartas, ¿cuánto se gastó en estampillas de 6 centavos para cada carta?

21. El Sr. Barrios invirtió $1000 al comienzo de cada año durante 25 años. Si la inversión brinda un 5 % de interés, capitalizado anualmente, ¿cuál es el monto total de la inversión al cabo de veinticinco años?

22. Se deja caer una pelota desde una altura de 24 metros. En cada rebote, asciende hasta la mitad de la altura desde la cual cayó. ¿Cuánto subirá en el sexto rebote y cuántos metros habrá recorrido al golpear en el suelo después del sexto rebote?

23. La suma de n términos de una progresión geométrica está dada por la fórmula

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

que también se puede expresar como

$$S_n = \frac{a_1}{1-r} - \frac{a_1}{1-r} \cdot r_n$$

Para cada sucesión en particular, $\frac{a_1}{1-r}$ es una constante; solo r^n varía al variar n. Si $|r| < 1$, $|r^n|$ decrece al crecer n, de modo que $\left|\frac{a_1}{1-r}\right| \cdot r^n$ se vuelve bastante pequeño para n suficientemente grande. En consecuencia, $\frac{a_1}{1-r}$ se puede usar como una aproximación de S_n cuando $|r| < 1$ y n es grande. Sean $a_1 = 2$ y $r = \frac{1}{2}$.

(a) Hallar $\frac{a_1}{1-r}$.

(b) Hallar S_5, S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10} sustituyendo los resultados de la parte (a) en la segunda fórmula de S_n dada antes.

(c) Mediante la fórmula $S_n = \frac{a_1}{1-r} - \frac{a_1}{1-r} \cdot r^n$, explicar por qué $S_n = \frac{a_1}{1-r}$ es una buena aproximación de S_n cuando n es grande y $|r| < 1$.

(d) Explicar por qué $S_n = \frac{a_1}{1-r}$ no es una buena aproximación de S_n cuando n es grande y $|r| > 1$.

Si $|r| < 1$, definimos la suma de una sucesión geométrica infinita como $S = \frac{a_1}{1-r}$ (véase el Ejercicio 23). Usar esta fórmula para resolver los Ejercicios 24, 25 y 26.

24. Hallar la suma de las sucesiones geométricas infinitas

(a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$ (c) $3, 1, \frac{1}{3}, \ldots$

(b) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$ (d) $10, 9, \frac{81}{10}, \ldots$

25. Considérese la sucesión geométrica $5, 1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \ldots$

(a) Hallar la suma S.

(b) Hallar la sucesión finita, con el menor número de términos, de modo que S sea una aproximación de S_n, con un error menor que 0,001.

26. Usar una sucesión geométrica infinita para representar las decimales repetidas que se dan a continuación. Aplicar la fórmula de la suma para encontrar la fracción equivalente, de la forma $\frac{a}{b}$, $a, b \in N$.

(a) 0,131313 . . . (c) 1,22222 . . .

(b) 0,243243 . . . (d) 3,0252525 . . .

27. «Este sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas», dijo el Gran Matemático, «tiene una propiedad peculiar».
«¡Santo cielo!», dijo el Pobre Tonto, «¿Cuál es?»
«Note usted», dijo el Gran Matemático, «que las constantes están en progresión aritmética».

«¡Resulta todo tan claro cuando usted lo explica!», dijo el Pobre Tonto. «¿Quiere usted decir algo así como $6x + 9y = 12$ y $15x + 18y = 21$?»
«Exactamente», dijo el Gran Matemático, sacándose la pipa de la boca. «En realidad el sistema tiene una solución única. ¿Puede usted encontrarla?»
«¡Santo cielo!», exclamó el Pobre Tonto, «estoy anonadado».
¿Lo está también el lector?
(Propuesto por U. Dudley y A. Lebow, *American Mathematical Monthly*, abril de 1962.)
(a) Resolver por determinantes el sistema sugerido por el Pobre Tonto.
(b) Generalizar la solución tomando como coeficientes cualesquiera seis números en progresión aritmética tales como a, $a + d$, $a + 2d$, ..., $a + 5d$.

14-5 LA SUMA DE UNA SUCESION GEOMETRICA

Apéndice
Un tratamiento alternativo de los exponentes fraccionarios*

EXPONENTES RACIONALES

Veíamos en las Secciones 5-1 y 5-2 cómo la multiplicación de potencias de la misma base correspondía a la suma de enteros; y cómo elevar una potencia a una potencia correspondida a la multiplicación de enteros. Igualmente, las recíprocas de las potencias correspondían a los inversos aditivos de los enteros que se usaban como exponentes. Nos preguntamos ahora si un *exponente fraccionario* puede tener un significado útil.

¿Cómo, por ejemplo, se debe definir $x^{1/q}$? Es claro que si se desea poder aplicar $(x^m)^n = x^{mn}$, entonces $x^{1/q}$ debe ser tal que

$(x^{1/q})^q = x^{(1/q)q} = x^1 = x$

Pero $(\sqrt[q]{x})^q = x$. Lo natural sería definir $x^{1/q}$ como $\sqrt[q]{x}$, si $\sqrt[q]{x}$ existe.

Definición $x^{1/q} = \sqrt[q]{x}$, $q \in N$, $x \in R$, $x \geq 0$ si q es par.

Ejemplo (a) $8^{1/3} = \sqrt[3]{8} = 2$.

Ejemplo (b) $81^{1/2} = \sqrt{81} = 9$.

Ejemplo (c) $(-4)^{1/2}$ no existe puesto que $\sqrt{-4}$ no existe.

Ahora bien, ¿qué podemos decir de $x^{p/q}$? Dado que $\frac{p}{q}$ es un número racional,

$\frac{p}{q} = \frac{1}{q} \cdot p = p \cdot \frac{1}{q}$. Por tanto, si $(x^m)^n = x^{mn}$ ha de valer, debemos tener

$x^{p/q} = (x^{1/q})^p$ y $x^{p/q} = (x^p)^{1/q}$. De donde

Definición $x^{p/q} = (\sqrt[q]{x})^p = \sqrt[q]{x^p}$, $x \in R$, $p \in I$, $q \in N$, con la condición de que si q es par, x debe ser positivo.

Ejemplo (d) $8^{2/3} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$.

Ejemplo (e) $(-16)^{3/4}$ no existe, ya que $(\sqrt[4]{-16})^3$ no existe.

Ejemplo (f) $(-27)^{4/3} = (\sqrt[3]{-27})^4 = (-3)^4 = 81$.

* Para usar en lugar de la Sección 5-4.

Ejemplo (g) $(-64)^{-2/3} = (\sqrt[3]{-64})^{-2} = (-4)^{-2} = \dfrac{1}{(-4)^2} = \dfrac{1}{16}$.

Debemos demostrar que las leyes de los exponentes valen para los exponentes fraccionarios ante la citada definición. Por ejemplo, tenemos:

Teorema $x^{p/q} \cdot x^{r/s} = x^{(p/q)+(r/s)}$, $q, s \in N$, $p, r \in I$, donde $x \geq 0$ si q o s es par.

Demostración:

$(x^{p/q} \cdot x^{r/s})^{qs} = (\sqrt[q]{x^p} \cdot \sqrt[s]{x^r})^{qs}$	Definición de exponente racional
$= (\sqrt[q]{x^p})^{qs} \cdot (\sqrt[s]{x^r})^{qs}$	$(xy)^m = x^m y^m,\ m \in I$
$= [(\sqrt[q]{x^p})^q]^s \cdot [(\sqrt[s]{x^r})^s]^q$	$(x^m)^n = x^{mn},\ m, n \in I$
$= [x^p]^s \cdot [x^r]^q$	Definición de $\sqrt[n]{x}$
$= x^{ps} \cdot x^{rq}$	$(x^m)^n = x^{mn},\ m, n \in I$
$= x^{ps+rq}$	$x^m \cdot x^n = x^{m+n},\ m, n \in I$

De donde

$x^{p/q} \cdot x^{r/s} = \sqrt[qs]{x^{ps+rq}}$	Definición de $\sqrt[n]{x}$
$= x^{(ps+rq)/qs}$	Definición de exponente racional
$= x^{(p/q)+(r/s)}$	Teorema: $\dfrac{w}{x} + \dfrac{y}{z} = \dfrac{wz + yx}{xz}$

Se pueden construir demostraciones semejantes para las otras leyes de los exponentes, pero las dejaremos como ejercicios.

Teorema Sean $u, v \in Q$, $x, y \in R$. Entonces las siguientes leyes de los exponentes se cumplen para todos los valores de las variables para los cuales las potencias estén definidas.

(a) $x^u \cdot x^v = x^{uv}$.

(b) $(x^u)^v = x^{uv}$.

(c) $\dfrac{x^u}{x^v} = x^{u-v}$.

(d) $(xy)^u = x^u y^u$.

(e) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^u = \dfrac{x^u}{y^u}$.

Generalmente, no es posible usar $\dfrac{xz}{yz} = \dfrac{x}{y}$ con exponentes fraccionarios cuando la base sea negativa. Esto es a causa de que al cambiar el numerador y el denominador, puede resultar que estemos tomando una raíz par de un número negativo o que cambiemos el signo del radicando.

Ejemplo (h) Demostrar que $(-25)^{1/2} \neq (-25)^{2/4}$.

Solución: $(-25)^{1/2} = \sqrt{-25}$, que no existe. $(-25)^{2/4} = \sqrt[4]{(-25)^2} = \sqrt[4]{625} = 5$. Notemos que $(\sqrt[4]{-25})^2$ tampoco existe.

Ejemplo (i) Demostrar que $(-8)^{1/3} \neq (-8)^{2/6}$.

Solución: $(-8)^{1/3} = \sqrt[3]{-8} = -2$, pero $(-8)^{2/6} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$, o $(-8)^{2/6} = (\sqrt[6]{-8})^2$, que no existe. Sin embargo, no existen tales objeciones si la base es positiva.

Ejemplo (j) Demostrar que $(8)^{1/3} = (8)^{2/6}$.

Solución: $(8)^{1/3} = \sqrt[3]{8} = 2$ y $(8)^{2/6} = \sqrt[6]{8^2} = \sqrt[6]{64} = 2$. Otra forma: $8^{1/3} = (2^3)^{1/3} = 2^{3(1/3)} = 2^1 = 2$.

Ejercicios

75. Hacer los Ejercicios del 21 al 96 de los Ejercicios 5-3.

76. *Demostrar*: Sean $u, v \in Q$, $x, y \in R$, $x \geq 0$. Entonces

$(x^u)^v = x^{uv}$

77. *Demostrar*: Sean $u, v \in Q$, $x, y \in R$, $x \geq 0$. Entonces

$\dfrac{x^u}{x^v} = x^{u-v}$.

Tabla I

Logaritmos comunes

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

Tabla 1

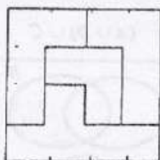
Logaritmos comunes (continuación)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

Respuestas a algunos ejercicios

1-1 Ejercicios, página 3

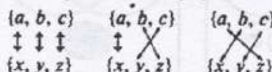
1. (a) {enero, febrero, . . . , diciembre}
   (c) { } o $\varnothing$.
3. {I, V, X, L, C, D, M} es el conjunto de letras del alfabeto usadas para escribir los numerales romanos.
5. El conjunto de partes tiene la posibilidad de moverse por su propia potencia.
7. {3¢, 7¢, 11¢, 15¢}
9. $\{\ \}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$
11. $\{\ \}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}$
13. (a) T (e) T (i) T (m) T
    (c) F (g) T (k) T (o) F
15. (a) $2 \in A$ $\quad A \notin C$ $\quad 1, 2, 3 \in C$
    $4 \notin B$ $\quad 0 \notin A$
    (c) $A \subset C$ $\quad \varnothing \not\subset \varnothing$ $\quad \{2, 3, 1\} \not\subset A$ $\quad A \not\subset B$
    $\varnothing \subset A$ $\quad B \not\subset B$ $\quad B \subset C$ $\quad B \not\subset A$
17. Un cuadrado



19. Se puede describir S como el conjunto de la totalidad de subconjuntos de $\{1, 2\}$.
21. (a) $\{(a, b, c), (a, b, 3), (a, 2, c), (a, 2, 3), (1, b, c), (1, b, 3), (1, 2, c), (1, 2, 3)\}$

1-2 Ejercicios, página 7

1. Cualesquiera tres «equiparamientos» tales como



3. Tratar de construir la correspondencia uno a uno indicada, entre el conjunto de postes y el de travesaños. Pero el último poste queda libre, por lo que la correspondencia no es uno a uno y los conjuntos *no son equivalentes*.
5. $E \sim C$. Para cada esposo hay exactamente una esposa y para cada esposa hay exactamente un esposo.
7. (a) $A = \{\{m,n\}, \{m,q\}, \{m,r\}, \{m,s\}, \{n,q\}, \{n,r\}, \{n,s\}, \{q,r\}, \{q,s\}, \{r,s\}\}$
   (b) $B = \{\{q,r,s\}, \{n,r,s\}, \{n,q,s\}, \{n,q,r\}, \{m,r,s\}, \{m,q,s\}, \{m,q,r\}, \{m,n,s\}, \{m,n,r\}, \{m,n,q\}\}$
   (c) Sí. (Cada conjunto de A se puede equiparar con el conjunto de B que contiene los restantes elementos de T.)
   (d) $n(A) = n(B) = 10$
9. $n(E) = n(F)$. Se puede construir una correspondencia uno a uno, equiparando cada subconjunto con el conjunto que contiene los restantes elementos de J. Por ejemplo:

   $\{1, 2, 5\} \leftrightarrow \{3, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$
   $\{7, 9, 10\} \leftrightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$, etc.

11. $$N = \{\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots\}$$
    $$\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$$
    $$T = \{3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 3, 3 \cdot 4, 3 \cdot 5, 3 \cdot 6, \ldots\}$$
13. $$N = \{\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots\}$$
    $$\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$$
    $$O = \{2 \cdot 1 - 1, 2 \cdot 2 - 1, 2 \cdot 3 - 1, 2 \cdot 4 - 1, 2 \cdot 5 - 1, 2 \cdot 6 - 1, \ldots\}$$

    O es infinito puesto que no se puede equiparar con un subconjunto estándar de N.

15. Mostrar cualquier equiparamiento de S con un subconjunto de T, de cuatro elementos.

17. $R = \{\, a, \quad b, \quad c \,\}$
$\qquad\; \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$
$S = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ (cualquier subconjunto de T, de tres elementos)
$R \sim S$ y $S \subset T$; por tanto, $n(R) < n(T)$.

1-3 Ejercicios, página 9

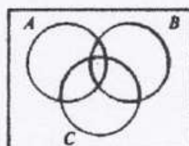
1. (a) x es un número impar.
3. (a) $S = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$.
   (c) $\{2, 4, 6\}$
5. $\{6, 8, 10, 12\}$
7. $\{4, 6, 8\}$
9. $\{\ \}$ o $\varnothing$
11. $\{12\}$
13. $\{6, 8, 10, 12\}$
15. $\{4\}$
17. P es el conjunto de la totalidad de números naturales mayores que 5.
19. Q es la totalidad de números mayores que 1.
21. $\{x \mid x$ es impar$\}$
23. $\{x \mid x < 6\}$
25. $\{x \mid x$ es el cuadrado de un número natural$\}$
27. $\{x \mid x \in N$ y $x \notin N\}$ o $\{x \in N \mid x < 1\}$, y así sucesivamente.
29. $\{\varnothing\}$
31. $\{\{\ \}, \{a, b\}, \{a\}, \{b\}\}$

1-4 Ejercicios, página 11

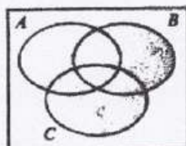
1. L
3. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
5. L
7. K
9. $\{6, 7, 8, 9, 10\}$
11. $\{6, 7, 8, 9, 10\}$
13. $\{5, 6, 10\}$
15. U
17. $\{3, 4\}$
19. $\varnothing$
21. (a) $\{x \in N \mid 2 < x < 6\}$
    (b) $\{3, 4, 5\}$
23. (a) $\{x \in N \mid x < 12\}$
    (b) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$
25. (a) $\{x \in N \mid x \neq x\}$
    (b) $\{\ \}$
27. (a) falso (c) verdadero (e) verdadero
29. (a) $B \cap B = B$ (e) $B \cap \varnothing = \varnothing$
    (c) $B \cup B' = U$
31. (a) 5
    (c) $m \cdot k = \underbrace{k + k + \cdots + k}_{m \text{ sumandos}}$

1-5 Ejercicios página 13

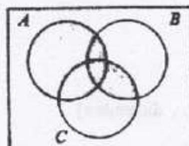
1. (a) $A \cup B$



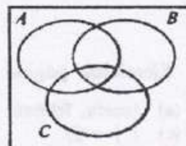
(e) $(A \cup B) \cup C$



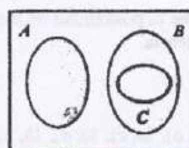
(c) $A \cup (B \cap C)$



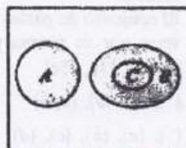
(g) $(A' \cap B') \cap C$



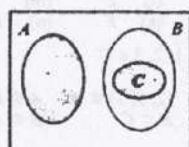
2. (a) $A \cup B$



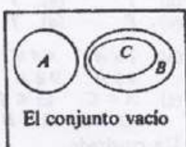
(e) $(A \cup B) \cup C$



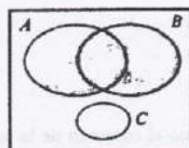
(c) $A \cup (B \cap C)$



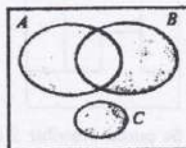
(g) $(A' \cap B') \cap C$



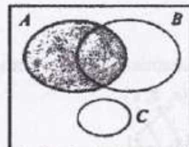
3. (a) $A \cup B$



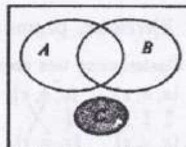
(e) $(A \cup B) \cup C$



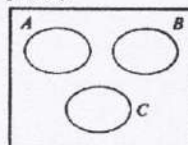
(c) $A \cup (B \cap C)$



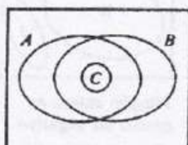
(g) $(A' \cap B') \cap C$



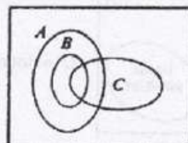
4. Estas son algunas de las respuestas posibles (es intrascendente cómo marcarlos y solo importan las varias relaciones posibles entre los tres conjuntos):



Todos disjuntos

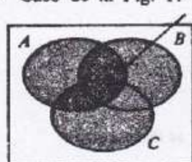


$C \subset (A \cap B)$

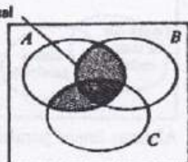


$B \subset A, C \not\subset A$

5. Caso de la Fig. 1:

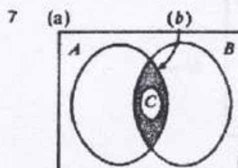


$A \cap (B \cup C)$



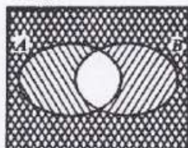
$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

7 (a) (b)



(c) Si $x \in C$, entonces $x \in A$. $x \in B$, $x \in U$

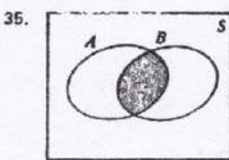
8. (a) $A' \cup B'$ = totalidad de estudiantes que no están dando matemáticas o no están dando química.



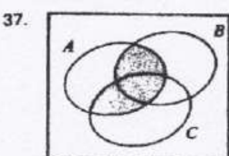
Porción sombreada

1-6 Ejercicios, página 20

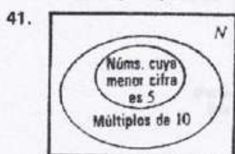
1. Proposición general. $\{x \in N | x \text{ es par}\}$
3. Proposición específica, falsa
5. Proposición específica, verdadera.
7. No es proposición, no está definido el conjunto satisfactor.
9. No es proposición, no es verdadera ni falsa.
11. No es proposición, las partes no están bien definidas.
13. Proposición específica, falsa.
15. Proposición general, N.
17. Proposición específica, verdadera.
19. No es proposición, no está definida para la totalidad de enteros no negativos.
21. 8 es un elemento del conjunto de números pares.
23. Este año es un elemento del conjunto de todos los años bisiestos.
25. La totalidad de múltiplos de 6 es un subconjunto del de los números pares.
27. Todos los cuadrados son paralelogramos.
29. (a) $x < 10$ o x es el cuadrado de un número natural.
    (b) $\{1, 2, 3, \ldots, 9, 16\}$
31. (a) x es el cuadrado de un número natural, y x es impar o $x < 10$.
    (b) $\{1, 4, 9\}$
33. α o γ
35.



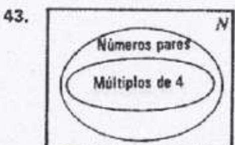
37.



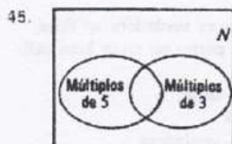
39. El primer diagrama muestra que $\{1, 2\}$ es un *elemento de R* que no es elemento del conjunto de los subconjuntos de $\{1, 3\}$. El segundo diagrama muestra a $\{1, 2\}$ como un *subconjunto* de U y que $\{1, 3\}$ es otro subconjunto que no contiene a $\{1, 2\}$.
41.



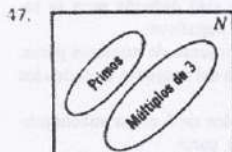
43.



45.



47.

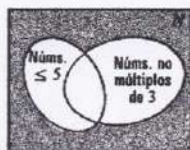


1-7 Ejercicios, página 25

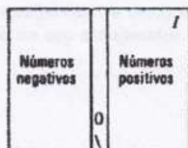
1. x no es múltiplo de 4



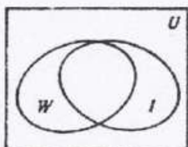
3. $3 < 5$.
5. x es múltiplo de 3 y $x > 5$



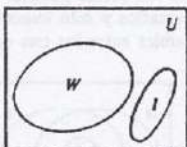
7. x no es un número negativo ni positivo y no es cero.



9. *Proposición*

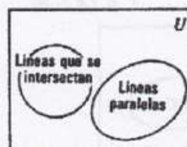


Negación



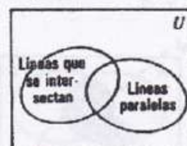
Ningún entero es entero no negativo

11. *Proposición*



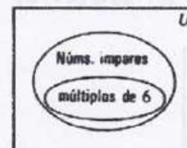
U = totalidad de líneas

Negación



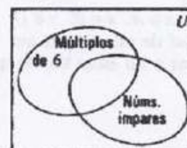
Algunas líneas paralelas se intersectan

13. *Proposición*



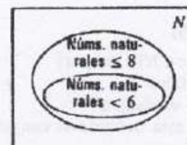
$U = N$

Negación

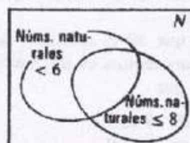


No todos los múltiplos de 6 son impares

15. *Proposición*



Negación

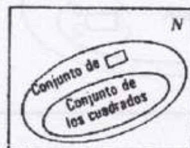


El conjunto de números naturales tales que $x < 6$ no es subconjunto del de los números naturales tales que $x \leq 8$.

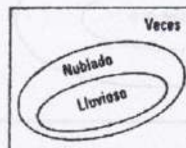
17. (a) x es el cuadrado de un número natural.
    (b) $\{1, 4, 9, 16\}$
19. (a) x es par o $x \geq 10$.
    (b) $\{2, 4, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$
21. (a) x es par y $x \geq 10$ y x es el cuadrado de un número natural.
    (b) $\{16\}$
23. x no es un impar (o x es par).
25. x no es impar o x es el cuadrado de un número natural.
27. x es un número impar y x es el cuadrado de un número natural.
29. (a) $S' = \{1, 2, 3, 13, 14, 15, 16\}$
    (c) $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 15, 16\}$
    (e) $\{1, 2, 13, 14, 16\}$

1-8 Ejercicios, página 29

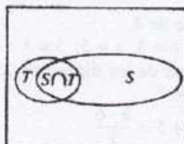
1. Si una figura es elemento del conjunto de los cuadrados, entonces es elemento del conjunto de los paralelogramos.



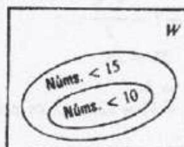
3. Si una ocasión es elemento del conjunto de las veces en que llueve, entonces es elemento del conjunto de las veces en que el cielo está nublado.



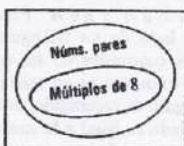
5. Ya puesto en lenguaje de conjuntos.



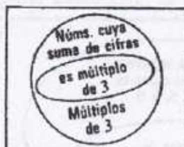
7. Si x es elemento del conjunto de enteros no negativos menores que 10, entonces es elemento del conjunto de los enteros no negativos menores que 15.



9. Si un triángulo es equilátero, entonces es isósceles.
11. Si una persona es un profesor universitario, entonces usa barba.
13. Si un número es múltiplo de 8, entonces es par.



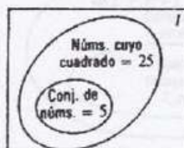
15. Si un número es múltiplo de 3, entonces la suma de sus digitos es múltiplo de 3.



17. Si x es múltiplo de 14, entonces x es múltiplo de 7.



19. Si $x = 5$, entonces $x^2 = 25$.



21. Una figura es un triángulo rectángulo solo si tiene un ángulo de 90 .
23. 6 es par, no un múltiplo de 4.
25. Contraejemplo: $a = 3$, $b = 4$, $x = 5$; $5 \neq 3 + 4$
27. Contraejemplo: La suma de los dígitos de 25 es 7 y 25 no es múltiplo de 7.
29. $n = 5$: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{5 \cdot 6}{2}$

$15 = 15$

$n = 6$: $1 + 2 + \cdots + 6 = \frac{6 \cdot 7}{2}$

$21 = 21$

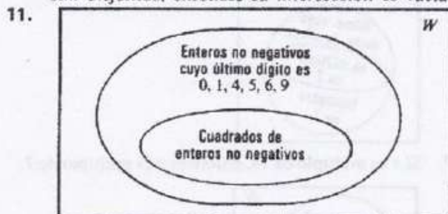
$n = 7$: $1 + 2 + \cdots + 7 = \frac{7 \cdot 8}{2}$

$28 = 28$

31. Falso: $n = 1 \rightarrow 1^2 - 1 = 0$.
33. Falso: $n = 11: 11^2 - 11 + 11 = 121$, no es primo

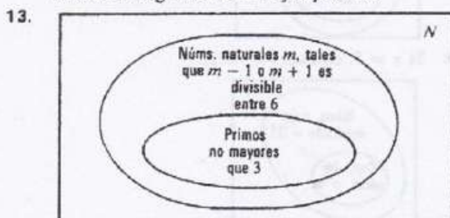
1-9 Ejercicios, página 33

1. Si una figura es un paralelogramo entonces es un rectángulo. Falsa.
3. Si un número no es múltiplo de 2, entonces es impar. Verdadera.
5. Si $m + n \in W$, entonces $m \in W$ y $n \in W$. Falso
7. Si el cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, entonces el triángulo es un triángulo rectángulo. Si un triángulo es rectángulo, entonces el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados.
9. Si la intersección de dos conjuntos es vacía, entonces los conjuntos son disjuntos. Si dos conjuntos son disjuntos, entonces su intersección es vacía.
11.



Si la última cifra de un número es 0, 1, 4, 5, 6 o 9, entonces el número es el cuadrado de un entero no negativo. Contraejemplo: 10.

13.



Si 6 divide al número natural $m - 1$ o a $m + 1$, entonces m es un número primo mayor que 3. Contraejemplo: $m = 25$.

15. Si un número menor que 50 es múltiplo de 9, entonces la suma de sus dígitos es un múltiplo de 9. Esto es cierto ya que

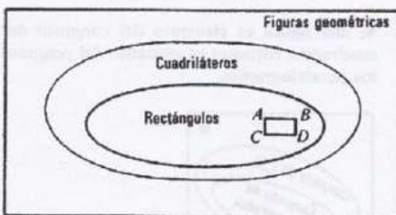
la suma de los dígitos de 9 es 9
la suma de los dígitos de 18 es 9
la suma de los dígitos de 27 es 9
la suma de los dígitos de 36 es 9
la suma de los dígitos de 45 es 9

Si la suma de los dígitos de un número menor que 50 es 9, entonces es múltiplo de 9. Esto también es cierto, ya que 9, 18, 27, 36 y 45 (la totalidad de números menores que 50 cuyos dígitos suman 9) son todos múltiplos de 9. Por tanto, la proposición «si, y solo si», es verdadera.

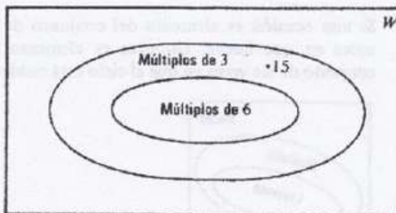
17. Si una figura no es un paralelogramo, entonces no es un rectángulo. Verdadera.
19. Si $x \nless 10$, entonces $x \notin N$ o $x \nless 7$, o si $x \geq 10$, entonces $x \notin N$ o $x \geq 7$.
21. Si un número no es múltiplo de 7, entonces la suma de sus dígitos no es múltiplo de 7. Falsa. Contraejemplo: 34.
23. Si $a \neq 4$, entonces $4x \neq ax$ o $x = 0$. Verdadera.
25. Si un cuadrilátero no es un cuadrado, entonces no todos sus lados son iguales. Falso. Contraejemplo: rombo.

1-10 Ejercicios, página 37

1. Correcto.

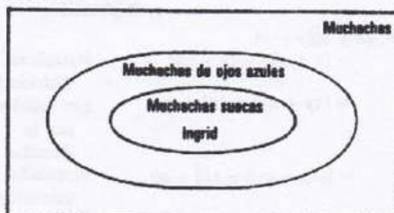


3. Incorrecto.

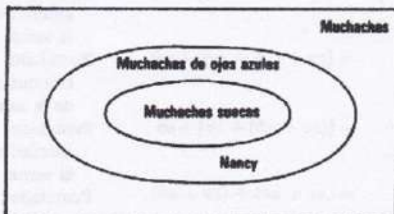


15 no es múltiplo de 6

5. Correcto.

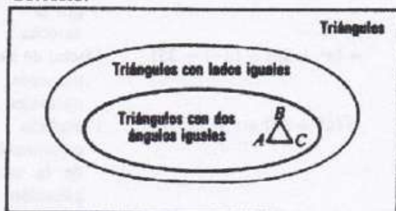


7. Incorrecto.



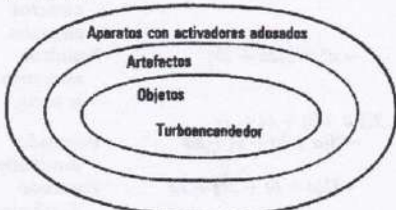
Nancy puede pertenecer al conjunto de las muchachas de ojos azules que no son suecas. Ella no *necesariamente* pertenece al conjunto determinado por la parte «sí» de la sentencia.

9. Correcto.



11. Si un dispositivo es un objeto, entonces es un artefacto.
Un turboencendedor es un objeto.
Un turboencendedor es un artefacto.

Si un dispositivo es un artefacto, entonces tiene adosado un activador.
Un turboencendedor es un artefacto.
Un turboencendedor tiene adosado un activador.



2-1 Ejercicios, página 41

1. π no se puede representar como el cociente de dos enteros. $\pi \neq \frac{22}{7}$.
3. (a) Infinito (g) Finito
(c) Infinito (i) Infinito
(e) Infinito
5. Verdadero
7. Verdadero
9. Falso
11. Verdadero
13. Verdadero
15. Falso
17. Falso
19. Falso
21. Falso
23. Falso
25. $0{,}3 = \frac{3}{10}$; $3, 10 \in I$
27. $1, 7 \in I$
29. $15\,\% = \frac{15}{100}$; $15, 100 \in I$
31. 0,875
33. 5,666 . . .
35. 0,6363 . . .
37. 0,144
39. 1,02
41. $\frac{70}{99}$
43. $\frac{3020}{999}$

2-2 Ejercicios, página 44

1. (a) c (e) c
(c) c (g) d
3. Verdadero.
5. Sí. Dados dos enteros pares cualesquiera, a y b, $a - b$ es un entero par.
7. (a) Sí con cada par ordenado de elementos de $\{x, y, z\}$, $*$ asocia un único elemento de $\{x, y, z\}$.
(c) No (g) x
(e) Sí (i) x
9. Propiedad transitiva o de sustitución de la igualdad.
11. Postulado de cerramiento de la suma.
13. Propiedad de sustitución de la igualdad.
15. Propiedad de sustitución o transitiva de la igualdad.
17. Sustitución.
19. 20
21. 44

2-3 Ejercicios, página 47

La propiedad aditiva de la igualdad: Si $a = b$ y $c = d$, entonces $a + c = b + d$.

La propiedad aditiva de la igualdad: Si $a = b$ y $c = d$, entonces $a + c = b + d$.
La propiedad aditiva de la igualdad: Si $a = b$ y $c = d$, entonces $a + c = b + d$.
La propiedad multiplicativa de la igualdad: Si $a = b$ y $c = d$, entonces $ac = bd$.
La propiedad aditiva de la igualdad: Si $a = b$ y $c = d$, entonces $a + c = b + d$.

2-4 Ejercicios, página 51

1. Postulado distributivo.
3. Postulado conmutativo de la suma.
5. Postulado asociativo de la multiplicación.
7. Postulado asociativo de la suma.
9. Postulado distributivo.
11. Ley distributiva por la derecha.
13. Postulado de cerramiento de la suma.
15. Postulado distributivo.
17. Ley distributiva por la derecha.
19. Postulado conmutativo de la suma.
21. Postulado distributivo.
23. Propiedad transitiva o de sustitución de la igualdad.
25. Teorema: $a = b \rightarrow a + c = b + c$

27. $3 \cdot \underline{5} + \underline{3} \cdot \sqrt{\underline{2}}$ — Postulado distributivo.

29. $\underline{7} + \left(\frac{1}{\underline{2}} + \underline{2}\right)$ — Postulado asociativo de la suma

31. $(\underline{7} \cdot \underline{3})\sqrt{2}$ — Postulado asociativo de la multiplicación.

33. $\underline{2} \cdot [\underline{(5 + 7)} \cdot \underline{\sqrt{2}}]$ — Postulado asociativo de la multiplicación.

43. $[(x + y) + 5] + z$

$= [5 + (x + y)] + z$ — Postulado conmutativo de la suma.

$= [(5 + x) + y] + z$ — Postulado asociativo de la suma.

$= (5 + x) + (y + z)$ — Postulado asociativo de la suma.

$= (x + 5) + (y + z)$ — Postulado conmutativo de la suma.

45. $(2b)c = (b \cdot 2)c$ — Postulado conmutativo de la multiplicación.

$= b(2c)$ — Postulado asociativo de la multiplicación.

47. $(4x)(5y)$

$= [(4x) \cdot 5]y$ — Postulado asociativo de la multiplicación.

$= [5(4x)]y$ — Postulado conmutativo de la multiplicación.

$= [(5 \cdot 4)x]y$ — Postulado asociativo de la multiplicación.

$= (20x)y$ — Hecho de los números naturales.

$= 20(xy)$ — Postulado asociativo de la multiplicación.

49. $(x + a)(y + b)$

$= (x + a)y + (x + a)b$ — Postulado distributivo

$= (xy + ay) + (xb + ab)$ — Ley distributiva por la derecha.

$= [(xy + ay) + xb] + ab$ — Postulado asociativo de la suma.

$= [xy + (ay + xb)] + ab$ — Postulado asociativo de la suma.

$= [xy + (xb + ay)] + ab$ — Postulado conmutativo de la suma.

$= [(xy + xb) + ay] + ab$ — Postulado asociativo de la suma.

$= (xy + xb) + (ay + ab)$ — Postulado asociativo de la suma.

51. $(a + 5)(a + 7)$

$= (a + 5) \cdot a + (a + 5) \cdot 7$ — Postulado distributivo.

$= (a^2 + 5a) + (a \cdot 7 + 5 \cdot 7)$ — Ley distributiva por la derecha.

$= (a^2 + 5a) + (a \cdot 7 + 35)$ — Hecho de los números naturales.

$= (a^2 + 5a) + (7a + 35)$ — Postulado conmutativo de la multiplicación.

$= [(a^2 + 5a) + 7a] + 35$ — Postulado asociativo de la suma.

$= [a^2 + (5a + 7a)] + 35$ — Postulado asociativo de la suma.

$= [a^2 + (5 + 7)a] + 35$ — Ley distributiva por la derecha.

$= (a^2 + 12a) + 35$ — Hecho de los números naturales.

$= a^2 + (12a + 35)$ — Postulado asociativo de la suma.

55. $2\{[(a + b) + c] + d\}$

$= 2[(a + b) + c] + 2d$ — Postulado distributivo.

$= [2(a + b) + 2c] + 2d$ — Postulado distributivo.

$= [(2a + 2b) + 2c] + 2d$ Postulado distributivo.

$= [2a + (2b + 2c)] + 2d$ Postulado asociativo de la suma.

$= [2a + (2c + 2b)] + 2d$ Postulado conmutativo de la suma.

$= [(2a + 2c) + 2b] + 2d$ Postulado asociativo de la suma.

$= (2a + 2c) + (2b + 2d)$ Postulado asociativo de la suma.

2-5 Ejercicios, página 57

3. Postulado de la inversa aditiva.
5. Postulado de la identidad multiplicativa.
7. Teorema: $x \cdot 0 = 0$.
9. Postulado de la inversa multiplicativa.
11. Postulado de la inversa multiplicativa.
13. Ley distributiva por la derecha.
15. Postulado de la identidad multiplicativa.
17. Postulado de la identidad aditiva.
19. El inverso aditivo es único.
21. Teorema: $x \in R \rightarrow {}^-({}^-x) = x$.
23. $(x + 1)(x + 5')$

$= x(x + 5') + (x + 5')$ Ley distributiva por la derecha, postulado de la identidad multiplicativa.

$= (x^2 + x \cdot 5') + (x \cdot 1 + 5')$ Postulado distributivo, postulado de la identidad.

$= [(x^2 + x \cdot 5') + x \cdot 1] + 5'$ Postulado asociativo de la suma.

$= [x^2 + (x \cdot 5' + x \cdot 1)] + 5'$ Postulado asociativo de la suma.

$= [x^2 + x(5' + 1)] + 5'$ Postulado distributivo.

$= [x^2 + (1 + 5')x] + 5'$ Postulado conmutativo.

29. $(x + \sqrt{2}) + (7x + {}^-\sqrt{2})$

$= (x + \sqrt{2}) + ({}^-\sqrt{2} + 7x)$ Postulado conmutativo.

$= [x + (\sqrt{2} + {}^-\sqrt{2})] + 7x$ Postulado asociativo.

$= (x + 0) + 7x$ Postulado de la inversa.

$= x + 7x$ Postulado de la identidad.

$= 1 \cdot x + 7x$ Postulado de la identidad.

$= (1 + 7)x$ Ley distributiva por la derecha.

$8x$ Hecho de los números naturales.

31. $3x = 3 \rightarrow 3'(3x) = 3'(3)$ Propiedad multiplicativa de la igualdad.

$\rightarrow x = 1$ Postulados asociativo, de la inversa y de la identidad.

Comprobación:

$3 \cdot 1 \stackrel{?}{=} 3$ Sustitución.

$3 = 3$ Postulado de la identidad.

43. $3x + 5x = 16$ Dado.

$8x = 8 \cdot 2$ Ley distributiva por la derecha, hecho de los números naturales.

$x = 2$ Ley de la cancelación.

Comprobación:

$3 \cdot 2 + 5 \cdot 2 \stackrel{?}{=} 16$ Sustitución.

$16 = 16$ Hecho de los números naturales.

49. $7x = 6x$ Dado.

$(6 + 1)x = 6x$ Hecho de los números naturales.

$6x + 1 \cdot x = 6x + 0$ Postulado de la identidad, ley distributiva por la derecha.

$x = 0$ Ley de la cancelación, postulado de la identidad.

Comprobación:

$7 \cdot 0 \stackrel{?}{=} 6 \cdot 0$ Sustitución.

$0 = 0$ Teorema: $x \cdot 0 = 0$.

55. $x' = 2'$ Dado.

$x = 2$ Teorema: $x = y \leftrightarrow x' = y'$.

57. $x(x + 4) = 0$ Dado.

$x = 0$ o $x + 4 = 0$ Teorema: $xy = 0 \leftrightarrow x = 0$ o $y = 0$

$x = 0$ o $x = {}^-4$ Teorema: $a + b = 0 \rightarrow a = {}^-b$

Comprobación:

$0(0 + 4) \stackrel{?}{=} 0$ Sustitución.

$0 = 0$ Teorema: $0 \cdot x = 0$

y

${}^-4({}^-4 + 4) \stackrel{?}{=} 0$ Sustitución.

${}^-4 \cdot 0 \stackrel{?}{=} 0$ Postulado de la inversa.

$0 = 0$ Teorema: $x \cdot 0 = 0$

59. $(x + \sqrt{2})(x + {}^-1) = 0$ Dado.

$x + \sqrt{2} = 0$ o $x + {}^-1 = 0$ Teorema: $xy = 0 \leftrightarrow x = 0$ o $y = 0$

$x = {}^-\sqrt{2}$ o $x = 1$ Teorema: $a + b = 0 \rightarrow a = {}^-b$; ${}^-({}^-x) = x$

Comprobación:

$({}^-\sqrt{2} + \sqrt{2})({}^-\sqrt{2} + {}^-1) \stackrel{?}{=} 0$ Sustitución.

$0(^-\sqrt{2} + {}^-1) \stackrel{?}{=} 0$ Postulado de la inversa.

$0 = 0$ Teorema: $0 \cdot x = 0$

y

$(1 + \sqrt{2})(1 + {}^-1) \stackrel{?}{=} 0$ Sustitución.

$(1 + \sqrt{2})0 \stackrel{?}{=} 0$ Postulado de la inversa.

$0 = 0$ Teorema: $x \cdot 0 = 0$

3-1 Ejercicios, página 62

5. Postulado conmutativo.
7. Postulado de la identidad.
9. Postulado de la inversa.
11. Teorema: $^-x(y) = {}^-(xy)$, hecho de los números naturales.
13. Teorema: $^-(x + y) = {}^-x + {}^-y$, hecho de los números naturales.
15. Postulado distributivo.
17. Teorema: $x = y \leftrightarrow {}^-x = {}^-y$.
19. Teorema: $(^-x)(^-y) = xy$, postulado asociativo.
21. Corolario: $^-b = {}^-1 \cdot b$.
23. $15 + {}^-13$

$= 2 + (13 + {}^-13)$ Hecho de los números naturales, postulado asociativo.

$= 2$ Postulados de la inversa y de la identidad.

25. $18(^-7) = {}^-7(18)$ Postulado conmutativo.

$= {}^-(7 \cdot 18)$ Teorema: $(^-x)y = {}^-(xy)$

$= {}^-126$ Hecho de los números naturales.

27. $(^-15)(^-3) = (15 \cdot 3)$ Teorema: $(^-x)(^-y) = xy$

$= 45$ Hecho de los números naturales.

29. $^-2 + {}^-15$

$= {}^-(2 + 15)$ Teorema: $^-(x + y) = {}^-x + {}^-y$

$= {}^-17$ Hecho de los números naturales.

31. $15 + {}^-3 = (12 + 3) + {}^-3$

$= 12 + (3 + {}^-3) = 12 + 0 = 12$

33. $8 + {}^-7 = (1 + 7) + {}^-7$

$= 1 + (7 + {}^-7) = 1 + 0 = 1$

35. $^-8(^-7) = (8 \cdot 7) = 56$
45. $5(3 + {}^-3) = 5 \cdot 0 = 0$
47. $5(^-8) + {}^-5(^-8) = {}^-(5 \cdot 8) + (5 \cdot 8) = 0$
57. $15x = {}^-(4x) + 38$

$4x + 15x = 4x + [^-(4x) + 38]$

$(4 + 15)x = 38$

$19x = 19 \cdot 2$

$x = 2$

Las fases son reversibles. Así, 2 es la solución.

61. $^-6$
63. $^-32$
65. $^-19$
67. $^-16$
69. $^-41$
71. 0
73. x
75. ^-4x
77. $10x^2$
79. $6a^2b$

3-2 Ejercicios, página 65

1. (a) No. Contraejemplo: $2 - 5 \notin N$.
   (c) Sí.
   (e) No. Contraejemplo: $5 - 3 = 2$, $2 \notin O$.
   (g) No. $0 - (^-1) \notin B$.

Los estudiantes deben dar las justificaciones de los Ejercicios del 3 al 15.

3. $5 - 2 = 5 + {}^-2$

$= (3 + 2) + {}^-2$

$= 3 + (2 + {}^-2)$

$= 3 + 0$

$= 3$

5. $^-7 - 2 = {}^-7 + {}^-2$

$= {}^-(7 + 2)$

$= {}^-9$

9. $^-15 - (^-9) = {}^-15 + {}^-(^-9)$

$= {}^-15 + 9$

$= {}^-(6 + 9) + 9$

$= {}^-6 + (^-9 + 9)$

$= {}^-6$

13. $2 - (3 - 7) = 2 + {}^-(3 + {}^-7)$

$= 2 + [^-3 + {}^-(^-7)]$

$= 2 + (^-3 + 7)$

$= 2 + (7 + {}^-3)$

$= 9 + {}^-3$

$= 6 + (3 + {}^-3)$

$= 6$

23. $xy - xz$

$= xy + {}^-(xz)$ Teorema: $x - y = x + {}^-y$

$= {}^-(xz) + xy$ Postulado conmutativo

$= (^-x)z + (^-x)(^-y)$ Teoremas: $(^-x)(^-y) = xy$, $(^-x)y = {}^-(xy)$

$= (^-x)(z + {}^-y)$ Postulado distributivo

$= {}^-x(z - y)$ Teorema: $x - y = x + {}^-y$

25. $(x - 3)(x + 5)$

$= (x - 3)x + (x - 3)5$ Postulado distributivo

$= (x + {}^-3)x + (x + {}^-3)5$ Teorema: $x + {}^-y = x - y$

$= [x^2 + (^-3)x] + [x \cdot 5 + (^-3)5]$ Ley distributiva por la derecha

$= [x^2 + (^-3)x] + (x \cdot 5 + {}^-15)$ Hecho de los números naturales, teorema: $(^-x)(y) = {}^-(xy)$

$= [x^2 + (^-3)x] + (5 \cdot x + {}^-15)$ Postulado conmutativo

$= \{[x^2 + (^-3)x] + 5 \cdot x\} + ^-15$ Postulado asociativo

$= \{x^2 + [(^-3)x + 5x]\} + ^-15$ Postulado asociativo

$= [x^2 + (^-3 + 5)x] + ^-15$ Ley distributiva por la derecha

$= \{x^2 + [^-3 + (3+2)]x\} + ^-15$ Hecho de los números naturales

$= \{x^2 + [(^-3 + 3) + 2]x\} + ^-15$ Postulado asociativo

$= [x^2 + (0+2)x] + ^-15$ Postulado inverso

$= (x^2 + 2x) + ^-15$ Postulado de la identidad

$= (x^2 + 2x) - 15$ Teorema: $x + ^-y = x - y$

27. (Los estudiantes deben establecer las justificaciones.)

$(x-2)(x+3) = 0$

$\leftrightarrow x - 2 = 0 \quad \text{o} \quad x + 3 = 0$

$\leftrightarrow x + ^-2 = 0 \quad \text{o} \quad x + 3 = 0$

$\leftrightarrow x = ^-(^-2) \quad \text{o} \quad x = ^-3$

$\leftrightarrow x = 2 \quad \text{o} \quad x = ^-3$

29. (a) $x - y = y - x$

(b) No es verdadero. Contraejemplo: $5 - 3 \neq 3 - 5$.

3-3 Ejercicios, página 71

1. (a) No (e) No
(c) No (g) Sí

3. $9 \times 9 = 81$ o $81 \times 9' = 9$

5. $\frac{3}{4} \times \frac{8}{9} = \frac{2}{3}$ o $\frac{2}{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)' = \frac{8}{9}$

7. $(10x) \cdot 50 = 500x$ o $500 \cdot (10x)' = 50$

9. $17a = 17a$ o $(17a)(17') = a$

11. $\frac{x^2 + 5x + 6}{x+2} = x + 3$ o $\frac{x^2 + 5x + 6}{x+3} = x + 2$

13. $\frac{7x + 14}{7} = x + 2$ o $\frac{7x + 14}{x+2} = 7$

15. (a) $\frac{1}{72}$ (e) $7x - 5$

(c) $\frac{1}{x - 15}$ (g) $\frac{2}{7}$

19. (a) $7 \cdot \frac{2}{5} = 7 \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{5}\right)$ Corolario: $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$

$= 14 \cdot \frac{1}{5}$ Postulado asociativo, hecho de los números naturales.

$= \frac{14}{5}$ Corolario: $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$

(Los estudiantes deben dar las justificaciones de todos los pasos del Ejercicio 19, como aparece en el 19(a).)

(c) $\frac{4}{5} \cdot \frac{10}{11} = \left(4 \cdot \frac{1}{5}\right)\left(10 \cdot \frac{1}{11}\right)$

$= \left[(4 \cdot 2)\left(5 \cdot \frac{1}{5}\right)\right]\left(\frac{1}{11}\right)$

$= (8 \cdot 1)\left(\frac{1}{11}\right)$

$= \frac{8}{11}$

(e) $\frac{3}{5} + \frac{2}{3} = \frac{3}{5}(1) + \frac{2}{3}(1)$

$= \left(3 \cdot \frac{1}{5}\right)\left(3 \cdot \frac{1}{3}\right) + \left(2 \cdot \frac{1}{3}\right)\left(5 \cdot \frac{1}{5}\right)$

$= (3 \cdot 3)\left(\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3}\right) + (2 \cdot 5)\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}\right)$

$= (9 + 10)\left(\frac{1}{15}\right)$

$= \frac{19}{15}$

En los Ejercicios del 24 al 36, los estudiantes deben mostrar los pasos con sus justificaciones.

25. $\frac{4}{9} \cdot \frac{21}{16} = \frac{4 \cdot 21}{9 \cdot 16}$

$= \frac{(4 \cdot 3)(7)}{(4 \cdot 3)(12)}$

$= \frac{7}{12}$

27. $\frac{17}{19} + 34 = \frac{17}{19} + \frac{34}{1}$

$= \frac{17}{19} + \frac{34 \cdot 19}{19}$

$= \frac{17 + 646}{19}$

$= \frac{663}{19}$

29. $\frac{3}{5} + \frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5}$

$= \frac{9}{15} + \frac{10}{15}$

$= \frac{19}{15}$

31. $\frac{2}{5x^2}$

33. $\frac{8x + 3y}{x(x+y)}$

35. $\frac{3x^2 + (7x + 14)}{(x+2)x}$

39. (a) No

41. $\frac{5}{x + 11} = \frac{2}{11}$ Dado.

$\left[(x + 11) \cdot \frac{5}{x + 11}\right] \cdot 11 = \left(11 \cdot \frac{2}{11}\right)(x + 11)$ Propiedad multiplicativa de la igualdad, postulados conmutativo y asociativo.

$5(11) = 2(x + 11)$ Definición de división.

$55 = 2x + 22$ Postulado distributivo, hecho de los números naturales.

$55 + {}^-22 = 2x$ Propiedad aditiva de la igualdad; postulados asociativo, de la inversa y de la identidad.

$33 + (22 + {}^-22) = 2x$ Hecho de los números naturales, postulado asociativo.

$33 = 2x$ Postulados de la identidad y de la inversa.

$\frac{1}{2}(33) = \frac{1}{2}(2x)$ Propiedad multiplicativa de la igualdad.

$\frac{33}{2} = \left(\frac{1}{2} \cdot 2\right)x$ Postulado asociativo, corolario: $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$

$x = \frac{33}{2}$ Corolario: $b \cdot \frac{1}{b} = 1$; Postulados conmutativo y de la identidad.

48. (a) $\frac{3}{4}$ (e) ${}^-\left(\frac{5x}{4}\right)$ o $\frac{{}^-(5x)}{4}$ o $\frac{5x}{{}^-4}$

(c) $\frac{{}^-5}{6}$ o $\frac{5}{{}^-6}$ (g) $\frac{{}^-(3x+y)}{3x-y}$ o $\frac{3x+y}{{}^-(3x-y)}$

51. $\frac{3}{5} - \frac{1}{3} = \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 3} - \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 5}$ Teorema: $\frac{xz}{yz} = \frac{x}{y}$

$= \frac{9-5}{15}$ Teorema: $\frac{x}{y} - \frac{z}{y} = \frac{x-z}{y}$, hecho de los números naturales, postulado de la identidad.

$= \frac{4 + (5 + {}^-5)}{15}$ Hecho de los números naturales, teorema de sustracción, postulado asociativo.

$= \frac{4}{15}$ Postulados de la inversa y de la identidad.

Los estudiantes deben enunciar las justificaciones de los Ejercicios del 52 al 56 como se muestra en el Ejercicio 51.

53. $\frac{7}{8} \div \frac{14}{17} = \frac{7}{8} \times \left(\frac{14}{17}\right)'$
$= \frac{7}{8} \times \frac{17}{14}$
$= \frac{7 \times 17}{(8 \times 2)7}$
$= \frac{17}{16}$

55. $\frac{a}{b} \div b = \frac{a}{b} \times b'$
$= \frac{a}{b} \times \frac{1}{b}$
$= \frac{a \times 1}{b \times b}$
$= \frac{a}{b^2}$

57. $\frac{3x+2}{x^2}$

59. $\frac{5ax}{24}$

61. $\frac{6a^2b - b}{8a}$

63. $\frac{5}{z}$

65. $\frac{a+2b}{3}$

67. $\frac{(x-y)^2}{xy}$

69. $\frac{17}{20}$

71. $\frac{a+b}{2(x-y)}$

73. $\frac{1}{3}$

3-4 Ejercicios, página 77

1. $1 \in P$, ${}^-1 \in P$ o $1 = 0$.
3. ${}^-1 \in P$, ${}^-({}^-1) \in P$ o ${}^-1 = 0$.
5. Una, y solo una, de las posibilidades siguientes es válida: $1 = {}^-1$, $1 < {}^-1$, ${}^-1 < 1$.
7. (a) $7 - 5 \in P$.
   (c) $5 < 15$.
   (e) $18 < 14$.
8. (a) $2 < 5$ o $5 - 2 \in P$.
   (c) $0 < 10$ o $10 - 0 \in P$.
   (e) $1 < \sqrt{2}$ o $\sqrt{2} - 1 \in P$.
9. (a) ${}^-({}^-5) \in P$ o $5 \in P$.
   (c) ${}^-(a+b) \in P$.
   (e) ${}^-(xy)$ es negativo.
   (g) ${}^-({}^-(a+b)) \in P$ o $(a+b) \in P$.
10. (a) ${}^-5 < 0$. (e) $xy > 0$.
    (c) $a + b < 0$. (g) ${}^-(a+b) < 0$.
11. (a) $2 \neq 5$ y $5 \nless 2$.
    (c) $10 \neq 0$ y $10 \nless 0$.
    (e) $1 \neq \sqrt{2}$ y $\sqrt{2} \nless 1$.
12. Algunas posibilidades son:
    (a) ${}^-5 \in P$ Teorema: $a > 0 \leftrightarrow a \in P$.
    $0 < {}^-5$. Definición de $>$.

(c) $b < a$. Teorema de tricotomía.

(e) 7 es negativo. Teorema: x es negativo $\leftrightarrow x < 0$

(g) $1 < 3$. Definición de $>$.
$3 \nless 1, 3 \neq 1$. Teorema de tricotomía.

(i) $2 \cdot 7 \in P$, $2 + 7 \in P$. Postulado de cerramiento de P.
$2 > 0, 7 > 0$. Teorema: $x \in P \leftrightarrow x > 0$.

(k) $a = 0$. Corolario: $x > 0$, $x < 0$ o $x = 0$.

23. Teorema: $a, b, c, d > 0, a < b$ y $c < d \rightarrow ac < bd$.

25. Teorema: $x > y$ y $z > 0 \rightarrow xz > yz$.

27. Propiedad de sustitución de la igualdad.

29. Postulado de cerramiento de P.

31. $y < z + 3 \rightarrow y + 2 < z + 5$. Teorema: $a < b \rightarrow a + c < b + c$.
Postulado asociativo, hecho de los números naturales.
$x < y + 2$, $y + 2 < z + 5 \rightarrow x < z + 5$ Teorema transitivo de las desigualdades.

3-5 Ejercicios, página 86

1. $\frac{-7}{2} < -2{,}98 < -\frac{9}{4} < {}^{-}\left(\frac{7}{6}\right) < \frac{^{-}8}{^{-}5} < \sqrt{26} < 5{,}2 < 5\frac{1}{4}$

3. (a) Negativo. (c) Positivo. (e) Positivo. (g) Negativo.

5. (a) $>$ (c) $<$ (e) $<$ (g) $>$ (i) $>$

6. (a) $1 < \sqrt{3} < 2$
(c) $1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$
(e) $0 < 0{,}1 < 0{,}12 < 0{,}123 < 0{,}1234 < 0{,}12345 < 0{,}123456 < 0{,}1234567 < 0{,}1234567\ldots < 1$

7. (a) 15 (c) -15 (e) $\frac{1}{2}$ (g) 0 (i) 3

8. (a) 5 (c) $x - 1$ (e) $-5'$ (g) $\frac{1}{5}$

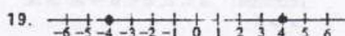
9. (a) $\frac{1}{-5}$ (c) $-\frac{1}{x-1}$ (e) 5 (g) -5

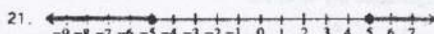
11. A está a la derecha del punto que representa a -4 y a la izquierda del que representa a 7.

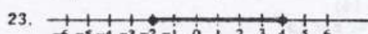
13. A es el punto cuya coordenada es 5 o el punto cuya coordenada es -5.

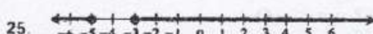
15. A está entre el punto cuya coordenada es 1,41 y el punto cuya coordenada es 1,42.

17. La distancia entre A y el punto cuya coordenada es 2, es 4.

19. 
$\{x \mid x = 4$ o $x = -4\}$

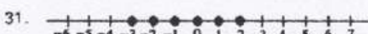
21. 
$\{x \mid x > 5$ o $x < -5\}$

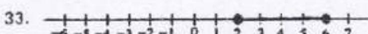
23. 
$\{x \mid -2 < x < 4\}$

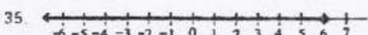
25. 
$\{x \mid x > -3$ o $x < -5\}$

27. (a) $\{-5, -15\}$
(c) $\{x \mid -15 < x < -5\}$
(e) $\left\{x \mid x \geq 4 \text{ o } x \leq -\frac{18}{5}\right\}$

29. 

31. 

33. 

35. 

37. $2x + 1 < 7$
$(2x + 1) + (-1) < 7 + (-1)$
Teorema: $a < b \rightarrow a + c < b + c$
$2x < 6$
$(2x) \cdot \frac{1}{2} < 6 \cdot \frac{1}{2}$
Teorema: $a < b, c > 0 \rightarrow ac < bc$
$x < 3$

39. $-4x < -7$
$(-4x)\left(-\frac{1}{4}\right) > -7\left(-\frac{1}{4}\right)$
Teorema: $a < b, c < 0 \rightarrow ac > bc$
$x > \frac{7}{4}$

41. $2x + 5 < 4x - 7$
$(2x + 5) + (-5) < (4x - 7) + (-5)$

Teorema: $a < b \rightarrow a + c < b + c$
$2x < 4x - 12$
$2x + (-4x) < (4x - 12) + (-4x)$
Teorema: $a < b \rightarrow a + c < b + c$
$-2x < -12$
$(-2x) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) > -12\left(-\frac{1}{2}\right)$
Teorema: $a < b, c < 0 \rightarrow ac > bc$
$x > 6$

Se deben dar las gráficas junto con las respuestas a los Ejercicios del 42 al 55.

43. $\left\{x \mid x < \frac{-3}{2}\right\}$
45. $\{x \mid x < 2\}$
47. $\{x \mid x > 14\}$
49. $\{x \mid -1 < x < 15\}$
51. $\left\{x \mid x < \frac{25}{8}\right\}$
53. $\{a \mid a > 2 \text{ o } a < -6\}$
57. $x = -14$
59. $x \in \varnothing$
61. $x = -\frac{2}{5}$ o $x = 3$
65. $-\frac{6}{5}$
67. $\frac{2}{x}$
69. $20x^2 - 3x - 2$
71. $14a + b$
73. -9
75. $\frac{6y}{5}$
77. $\frac{3}{x - y}$
79. $\frac{9x}{10yw}$

4-1 Ejercicios, página 94

1. 1
3. $\frac{1}{8}$
5. 64
7. 8
9. 0,000001
11. 1
13. 1
15. 8
17. 2
19. (a) 4
(c) $-\sqrt{2}$
(e) 1
20. (a) $1, -2, 4$
(c) $\sqrt{2}, -1, -1$

21. 2
23. 0
25. -18
27. 0
29. $2xy^2 - 5x^3$
31. $-x^2 + 2x$
33. $3a^2 - 3ab - 5b^2$
35. $5a + b$
37. $10x + 11$
39. y
41. $(3 + \sqrt{2})x + (\sqrt{2} + 2)y$
43. $(1 - 6\sqrt{2})x + (3 - 5\sqrt{2})y$
45. $5a - 3b$
47. $6x^4 - 7x^3 + (2x^2 - x + 7)$
49. $2a + (-3b + 4c - d)$
51. $a - (b + c - d)$
53. $r^3 - (-r^2s - 2rs^2 - s^3)$
55. $(4 + m)x + (2 + k)y$
57. $(\sqrt{2} + k)xy + (m - h)x^2y$

4-2 Ejercicios, página 96

1. $6x^3y + 9x^2y^2 - 15xy^3$
3. $2yz^2 - 3xyz^2$
5. $-5x^3 - 30x^2y + 5xy^2$
7. $3x^3 - 3x^2 - 7x + 5$
9. $2x^2 - 13xy - 7y^2$
11. $x^3 + 27$
13. $4y^4 - 4y^3 + 5y^2 - 4y + 1$
15. $-x^3 - x^2 + 10x - 8$
17. $3x^3y - 12x^2y^2 + 12xy^3$
19. $x^3 - y^3$
21. $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$
23. $-3m^3 + 10m^2 - 2m - 3$
25. $m^3 - 5m^2n + 3mn^2 + 9n^3$
27. $xy^3 - x^3y + 4x^2y - 4xy$
29. $x^5 - y^5$

4-3 Ejercicios, página 98

1. $6x^3y^3z^4$
3. $-3\sqrt{2}a^4b^5$
5. $4a^3 - 8a^2b + 4ab^2$
7. $2x^4y^3 - 7x^3y^2 - 4x^2y$
9. $2xy^2z$
11. $49a^2b^6$
13. $y^2 - 5y - 24$
15. $-2m^2 + 9m - 10$
17. $ac + ad + bc + bd$
19. $3x^2 + 2xy - y^2$
21. $3r^2 - rs - 14s^2$
23. $x^2 - 4y^2$
25. $c^2x^2 - b^2$
27. $35s^2 - 9st - 2t^2$
29. $2a^2x^2 - abx - 3b^2$
31. $ax - 3bx + 2ay - 6by$

33. $4x^2 - 25$
35. $4x^2 + 20x + 25$
37. $4 - 4y + y^2$
39. $9x^2 - 12x + 4$
41. $y^6 + 5y^3 - 14$
43. $-3y^2 + 13y - 12$
45. $y^2 - 4x^2$
47. $4h^2 - 4hk + k^2 - 9$
49. $m^4 - 4m^2n^2 - 4mn^3 - n^4$
51. $a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$
53. $4m^2 - 4mn + n^2 + 12m - 6n + 9$
55. $x^3 + 3x^2 + 3x + 2$
57. (a) $x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64$
(c) $128x^7 + 448x^6 + 672x^5 + 560x^4 + 280x^3 + 84x^2 + 14x + 1$

4-4 Ejercicios, página 102

1. $(x - a)(x + a)$
3. $x(x^2 + 4)$
5. $(x - 3)(x - 2)$
7. $(y - 3)^2$
9. $(x + 9)^2$
11. $(4a - 7y)(4a + 7y)$
13. $(11x - 3)^2$
15. $(x - 7)(x + 2)$
17. $(t - 11)(t + 6)$
19. $(3x - 5)(x + 7)$
21. $(12a - 5)^2$
23. $(16 + 3k)(4 + 27k)$
25. $(13x - 15y)(13x + 15y)$
27. $3x(5x + 7)$
29. $3t(t^2 - 5t - 4)$
31. $(v - 13)(v - 7)$
33. $(7a - 9b)(9a + 7b)$
35. $(s + t - a)(s + t + a)$
37. $(s - a - b)(s + a + b)$
39. $(a + b - 3)^2$
41. $(x - y + a + b)(x - y - a - b)$
43. $3(x - 2y)(x + 2y)$
45. $a^3(x - 2)^2$
47. $(x - 3)(x + 3)(x^2 + 1)$
49. $a(5ax + 2y)(6ax + y)$
51. $(x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$
53. $(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)(x^2 + 1)$
55. $72(2x^4 + 3)$

4-5 Ejercicios, página 104

1. $(x - a)(x^2 + ax + a^2)$
3. $(2a + 1)(4a^2 - 2a + 1)$
5. $8(2 + y)(4 - 2y + y^2)$
7. $(4 - 7y)(16 + 28y + 49y^2)$
9. $5(2x^2 + 5y^3)(4x^4 - 10x^2y^3 + 25y^6)$
11. $(x - a + b)(x^2 - 2ax + a^2 - bx + ba + b^2)$
13. $(x - y)(x + y)(x^2 - xy + y^2)(x^2 + xy + y^2)$
15. $(x - 2)(x + 1)(x^2 + 2x + 4)(x^2 - x + 1)$
17. $(a - b)(5 + x)$
19. $(2a - b)(3x + 5y)$
21. $(5x - 2y)(1 + 2b)$
23. $-6(x - y)(x + y)(2x + 3y)$
25. $(x + y)(1 + 7a)$
27. $(x + y)(a + 2b)$
29. $(6x - 1)(x - 1)(x + 1)$
31. $(x + 2y)(x - 2y + 1)$
33. $(x - 1 - y)(x - 1 + y)$
35. $(-x - 7)(19x^2 - 4x + 13)$
37. $(x^2 + xy + y^2)(x - y - 1)$
39. $(x - y + 5)(x + y + 1)$
41. $(2a - b)(2a + b - 4a^2 - 2ab - b^2)$
43. $(x + y)(x^2 - xy + y^2)(x - y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4)$
45. $(a^k - b^k)(a^k + b^k)$
47. $(x^k - 1)^2(x^k + 1)^2$

4-6 Ejercicios, página 109

1. $x^2(2a - 5)(2a + 5)$
3. $a(a - 2)^2(a + 2)^2$
5. $6(2y - x)(2y - 3x)$
7. $2x(x - 4y)(x^2 + 4xy + 16y^2)$
9. $x(x + 2)(k - 3m)$
11. $(a - b)(a^2 + ab + b^2 + a + b)$
13. $(x - 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$
15. $(x^2 + y^2)(x^2 - y^2 - 3)$
17. $(x + y)(x^2 - xy + y^2 - x - y - 1)$
19. $3z^2(27z^2 - d^2)$
21. $(3x - 5y + 2)^2$
23. $(xk^2 + 2)(x^2k^4 - xk^2 + 6)$
25. $5x(7x^2 + 3x + 3)$
27. $5(x^2 + x + 1)$
29. $x^4y^3(y^2 + x^2 - xy)$
31. $-2v(t - v)$
33. $(c + 1)^2(c^2 - c + 1)^2$
35. $\left(\frac{3}{4}x - \frac{2}{3}y\right)\left(\frac{3}{4}x + \frac{2}{3}y\right)$

o $\frac{1}{144}(9x - 8y)(9x + 8y)$
37. $(x + 3\sqrt{2})(x + \sqrt{2})$
39. $(0{,}8a - 0{,}7b)(0{,}8a + 0{,}7b)$
43. $(x^2 - 3xy + y^2)(x^2 + 3xy + y^2)$
45. $(t^2 - t - 3)(t^2 + t - 3)$
47. $\left(x - \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

4-7 Ejercicios, página 116

1. Correctamente en (d) y (f).
3. -1
5. Ninguna.

7. $-\frac{3}{2}$
9. 0, 3
11. $\frac{30}{36}$
13. $\frac{x(7x+2)}{x(2x-5)}$
15. $\frac{2x(x+3)(2x+5)}{(x-2)(x+2)(x+3)(2x+5)}$
17. $\frac{(2x-1)(3+x)}{x(3-x)(1-x)(3+x)}$
19. $-\frac{6}{5}$
21. $\frac{7x+3}{x}$
23. $-\frac{x+3y}{(x-3y)(x+3y)}$
25. $\frac{x-3y}{(x-3y)(x+3y)}$
27. $\frac{1}{(x-3y)(x+3y)}$
29. $\frac{5}{6}$
31. $\frac{5y^2}{9x^3}$
33. $\frac{x+2}{x-4}$
35. $-\frac{1}{x+y}$
37. $\frac{x^2-xy+y^2}{x-y}$
39. $\frac{-1}{a^2+b^2}$
41. $\frac{-2xy}{a+b}$
43. $\frac{x^2+1}{x+2}$
45. $-(x+2)$
47. $\frac{6}{25}$
49. $\frac{28a^2cxy^2}{9bz^2}$
51. $\frac{-x}{y(x+y)}$
53. $\frac{(a-4)(a^2-2a+4)(a^2+4a+16)}{(a-2)^2(a+2)}$
55. $\frac{x+y}{x^2+3xy+9y^2}$
57. $\frac{x-4}{(x-5)^2(x-3)}$
59. $\frac{y(x^4+y^4)^2}{x}$

4-8 Ejercicios, página 121

1. 450
3. $90x^3yz^2$
5. $180x^2y^2(x-y)(x+y)^2$
7. $x^2(x-y)^2(x+y)$
9. $(a+b)^2(a-b)(a^2-ab+b^2)$
11. 5
13. $x(x-y)$
15. $5xy(x-y)^2(x+2y)$
17. $\frac{336}{24}; \frac{15}{24}; \frac{22}{24}$
19. $\frac{5x}{x-2}; \frac{-7}{x-2}$
   o $\frac{-5x}{2-x}; \frac{7}{2-x}$
21. $-\frac{3}{2}$
23. $\frac{-19}{2x}$
25. $\frac{-1}{4x^2}$
27. $\frac{-(8x+3)}{x+7}$
29. $\frac{2x-5y}{7x+2y}$
31. $\frac{11x^2+126x-48}{36x^2}$
33. $\frac{1}{2(x+2)}$
35. 0
37. $\frac{2x-7}{3(5x-4)}$
39. $\frac{5(x-2)}{6x(x-4)}$
41. $\frac{3x^2-11xy-2y^2}{(x-y)(x+y)^2}$
43. $\frac{16m-35}{3m(2m-7)}$
45. $\frac{3a-6}{a(a-3)}$
47. $\frac{2(4h+23d)}{(4h-3d)(2h+5d)}$
49. $\frac{2t^2-t+6}{t(t-1)(t-6)}$

4-9 Ejercicios, página 125

1. $\frac{-5}{x-5}$
3. $\frac{y^2+6}{y}$
5. $\frac{17x}{36}$

7. $\dfrac{8x^2+57x-9}{x+7}$

9. $\dfrac{x^2+4x-11}{x+2}$

11. $\dfrac{2a^2-9a+15}{a-5}$

13. $\dfrac{-1-x^2}{1+x}$

15. $\dfrac{x^2-xy+y^2}{x}$

17. $\dfrac{(a^2-3a-3)(a-3)(a+3)}{(a-5)(a+2)}$

19. $\dfrac{x}{x+1}$

21. $\dfrac{10x}{x^3-1}$

23. $\dfrac{77}{12(1-2a)}$

25. $\dfrac{-3x^2+14x-14}{x(x-1)(x-2)}$

27. $\dfrac{2}{y-7}$

29. $\dfrac{-4(x^2+x-15)}{(x-5)(x+5)}$

31. $\dfrac{2}{x-3}$

33. $\dfrac{-8}{3x+4}$

35. $\dfrac{x^2+1}{(x-1)^2(x+1)}$

37. $\dfrac{-11x^2+9x+4}{(5-x)(1-2x)(1+2x)}$

39. $\dfrac{2x^3}{(x-4y)(x+4y)}$

41. $\dfrac{c^2+d^2}{(a-b)(c-d)(c+d)}$

4-10 Ejercicios, página 128

1. $\dfrac{85}{21}$

3. $\dfrac{1}{x-1}$

5. $\dfrac{b(5a-2b)}{2a(2b^2+a)}$

7. $\dfrac{2-x}{4x^2}$

9. $\dfrac{x+4y}{x+3y}$

11. 1

13. $\dfrac{2}{2x-3}$

15. $\dfrac{(x+2)(x-3)}{(x-4)(x+1)}$

17. -1

19. 0

21. $\dfrac{5y-1}{1-y}$

4-11 Ejercicios, página 132

1. $y=\dfrac{13}{5}$

3. $m=\dfrac{7}{2}$

5. $x=\dfrac{2-\sqrt{3}}{7}$

7. $a=\dfrac{16}{9}$

9. $x=-\dfrac{107}{6}$

11. $x=\dfrac{17}{15}$

13. $x=\dfrac{4}{3}$

15. $a=\dfrac{13}{4}$

17. $b=1$

19. $x=4$ o $x=-6$

21. $x=\dfrac{15}{7}$

23. Sin solución.

25. $x=\dfrac{142}{15}$ o $x=-\dfrac{46}{5}$

27. $x=\dfrac{89}{70}$

29. $x=-4$

31. $h=\dfrac{2A}{b}$

33. $a=-\dfrac{3x}{16}$

35. $x=\dfrac{5-2y}{3}$

37. $x=\dfrac{c-by}{a}$

39. $x=\dfrac{y^2}{4a}$

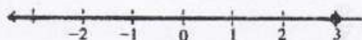
41. $y=\dfrac{4-5x}{9}$

43. $y=-\dfrac{4}{13}x$

45. $y=\dfrac{3-ax}{b-2}$

47. $y=x^2-2ax$

49. $x<3$



51. $x > -\frac{7}{4}$

$-\frac{7}{4}$; −2 −1 0 1 2

53. $x > 3$

0 1 2 3

55. $x \geq 9$

9; −4 −2 0 2 4 6 8 10

57. $a \geq \frac{16}{11}$

$\frac{16}{11}$; −2 −1 0 1 2 3

59. $y < \frac{22}{29}$

$\frac{22}{29}$; −2 −1 0 1 2 3 4

61. $x > 4$ o $x < -6$

−6 −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4

63. $x \in R, x \neq \frac{1}{5}$

$\frac{1}{5}$; −2 −1 0 1 2 3

65. $x \in \varnothing$

67. $x > \frac{7}{3}$

$\frac{7}{3}$; −2 −1 0 1 2 3 4

69. $x > 7$

7; −2 0 2 4 6 8 10

71. $-\frac{5}{3} < x < -1$

$-\frac{5}{3}$; −2 −1 0 1 2

73. $h = \frac{S - 2\pi r^2}{2\pi r}$

75. (a) $h = \frac{2A}{b_1 + b_2}$

4-12 Ejercicios, página 135

1. $x = -\frac{5}{42}$
3. $x = \frac{58}{3}$
5. $x < \frac{1}{2}$
7. $x = 5$
9. $x = -9$
11. $m = 3$
13. $s \in \varnothing$
15. $y = \frac{5}{2}$
17. $x = \frac{104}{27}$
19. $p = 0$
21. $x = \frac{2}{11}$
23. $k = -\frac{1}{10}$
25. $m = -\frac{5}{2}$
27. $t = 0$

4-13 Ejercicios, página 139

1. (a) $50 - n$ (b) $n - 5$ (c) $5n$ (d) $\frac{10n}{3}$ (e) $\frac{n}{10}$
3. (a) $2n + 4$ (b) $4n + 4$ (c) $8n + 12$
4. (a) 0,5a (c) 1,8 litros
5. (a) $(n - 10)$ kph (b) $(4n - 40)$ km (c) $4n$ km (d) $(8n - 40)$ kph
6. (a) $(r + 10)$ kph (c) $\frac{215}{r + 10}$ horas
7. (a) $11 - t$ (b) $9t + 11$
9. 5
11. $27\frac{1}{2}$ cm, $32\frac{1}{2}$ cm
13. $\frac{14}{9}$
15. 36 cm
17. 12 por 18 cm
19. 3 monedas de 25 ¢, 15 monedas de 10 ¢
21. 643 adultos, 276 niños
23. $9500
25. Hijo, $2000; hija, $3000; madre, $4000
27. $7\frac{1}{2}$ hectáreas
29. 500 litros
31. $8\frac{2}{5}$ litros
33. 48 kph, 120 kph
35. $2\frac{3}{5}$ horas o 2 horas 36 minutos
37. $\frac{1}{2}$ km

39. 7 km
41. 2 horas 24 minutos
43. 48
45. 96
47. 48 m²
49. 960 km
51. Al menos 7,5 %
53. Al menos $2\frac{2}{3}$ litros
55. 6 cm

5-1 Ejercicios, página 145

1. x^6
3. $(a+b)^7$
5. $27a^9$
7. $-12a^2x^3$
9. x^{20}
11. x^{5y}
13. $\frac{27}{125}x^3y^9$
15. $20x^4y^4 + 16x^5y^3$
17. $\frac{x^3y^2}{4}$
19. x^{m-2}
21. $\frac{1}{x^{m-2}}$
23. $(m+n)^{12}$
25. $3^a m^{a+1} n^{2a}$
27. $\frac{3m^4}{2n^3}$
29. $\frac{16x^4}{81}$
31. $\frac{4(x+y)}{5(x-y)}$
33. -3^9
35. 3^{m+n}
37. -3^6
39. 3^7
41. $-\frac{1}{3^5}$
43. 3^{12}
45. 3^5
47. $\frac{1}{3^{2x}}$
49. $\frac{8}{27}$
51. 125
53. 6
55. $\frac{1}{72}$
57. $-\frac{1}{6}$

5-2 Ejercicios, página 149

1. $\frac{1}{9}$
3. $\frac{9}{5}$
5. $\frac{1}{5}$
7. -1
9. 54
11. $\frac{3}{2}$
13. $\frac{1}{25}$
15. $\frac{1296}{169}$
17. 1296 o 6^4
19. 2
21. $\frac{1}{128}$
23. $\frac{25}{49}$
25. $(5x^3)^{-1}$
27. $3(x-y)(x+y)^{-1}$
29. $13 \cdot 4^{-1}x^{-4}y^4$
31. $\frac{1}{2 \cdot 3^{-1}y^{-1}z^{-1}}$
33. $\frac{1}{(15x)^{-1} \cdot 7(x+y)}$
35. $\frac{1}{(a^2+b^2)^{-1}}$
37. $\frac{7}{x}$
39. $\frac{1}{7x}$
41. $\frac{1}{7+x}$
43. $\frac{7x+1}{x}$
45. 1
47. $\frac{128}{y^5}$
49. $\frac{y+x}{xy}$
51. $\frac{4x^3}{y^2}$
53. $\frac{x^3z^4}{y^2}$
55. $\frac{x^2-xy+y^2}{xy}$
57. $\frac{8y^6}{27x^3}$
59. $\frac{y-x}{xy}$

61. $-\frac{7}{x^2}$
63. $\frac{m-n}{m+n}$
65. 252
67. $\frac{a^2+b^2}{a+b}$
69. $\frac{x^4y^2}{x^4+2x^2y+y^2}$
71. $\frac{75y^3}{x^4}$
73. $\frac{1}{y^4}$
75. $\frac{1}{2^4}$
77. 2^0
79. $\frac{1}{2^3}$
81. $\frac{1}{2}$
83. $\frac{1}{2^9}$
85. 2^2
87. 2^6

5-3 Ejercicios, página 156

1. 6
3. 3
5. $\frac{1}{3}$
7. -2
9. $2|m|$
11. $-2x$
13. $4x^2$
15. $3xy^2$
17. x^ky^{2k}
19. $x-1$
21. $\sqrt[3]{5}$
23. $\sqrt[4]{x^3}$
25. $\frac{1}{\sqrt{15}}$
27. $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{c}$ o $\sqrt[3]{9c}$
29. $\sqrt[5]{9c^2}$
31. $\sqrt[10]{56^3}$
33. $11^{2/3}$
35. $3x^{3/4}$ o $(81x^3)^{1/4}$
37. $x^{2/5}y^{5/2}$
39. $(a^2+b^2)^{1/2}$
41. $\frac{3}{2}$
43. $\frac{1}{8}$
45. $\frac{1}{100.000}$
47. $\frac{1}{13}$
49. 1
51. 10^5
53. 32
55. 16
57. 20
59. $\frac{1}{a}$
61. $\sqrt{m}$
63. $\sqrt[3]{a}$
65. $2x$
67. $\frac{a^2b^2}{-3}$
69. $\frac{y^2}{x^2}$
71. $\sqrt[12]{x^{11}}$
73. x
75. $5a$
77. 3
79. $\frac{a^2}{2}$
81. $\frac{5x^4}{y^{12}}$
83. $\frac{8b^2c^3}{a}$
85. $x^2+\frac{2x}{y}+\frac{1}{y^2}$ o $\frac{x^2y^2+2xy+1}{y^2}$
87. $\sqrt[3]{x}$
89. $64a^2b^4$
91. $\sqrt[6]{243}$
93. $\frac{\sqrt{x^3}}{4y}$ o $\frac{x\sqrt{x}}{4y}$
95. $\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^3}$
97. $x+y$

5-4 Ejercicios, página 160

1. $6\sqrt{2}$
3. $2\sqrt[3]{2}$
5. $-3\sqrt[3]{3}$
7. $\frac{\sqrt{105}}{21}$
9. $\frac{|y|\sqrt{3x}}{5}$
11. $\frac{\sqrt[3]{4}}{4}$
13. $\frac{2|b|\sqrt{2a}}{5}$
15. $\sqrt{3}$
17. 4

19. $\frac{5}{3}$
21. $\sqrt{2a}$
23. $\frac{1}{6}\sqrt{30}$
25. $\sqrt{a-x}$
27. $\frac{\sqrt[3]{78}}{6}$
29. $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a-b}$
31. $-10\sqrt[3]{20}$
33. $\frac{y}{14x}\sqrt[3]{20xy}$
35. $\frac{\sqrt[3]{6x^2}}{3x}$
37. $2\sqrt{3}$
39. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
41. $9\sqrt{2}$
43. $2\sqrt{3}-5\sqrt{6}+2\sqrt{2}$
45. $\frac{13\sqrt{6}}{6}$
47. $3\sqrt{6}-3\sqrt{2}$
49. $18+12\sqrt{2}$
51. $12x+11\sqrt{xy}-5y$
53. $3\sqrt[3]{6}$
55. $\sqrt[3]{4}$
57. $\frac{19\sqrt[5]{9}}{3}$
59. $3\sqrt[3]{7}$
61. $\frac{3\sqrt{2}-2}{2}$
63. $\frac{5+\sqrt{5}}{20}$
65. $\frac{7-2\sqrt{10}}{3}$
67. $\frac{23+4\sqrt{15}}{17}$
69. $\frac{4\sqrt{x-y}+x-y}{16-x+y}$
71. $-\frac{3}{7}$
73. $\frac{\sqrt{6}}{9}$
75. $a^2b\sqrt{ab}-b\sqrt[3]{a}$
77. $\frac{-3\sqrt{(x+2)(x-1)}}{(x+2)(x-1)}$
79. $\frac{2\sqrt{a}-2\sqrt{3b}}{a-3b}$
81. $\sqrt[27]{x^{26}}$

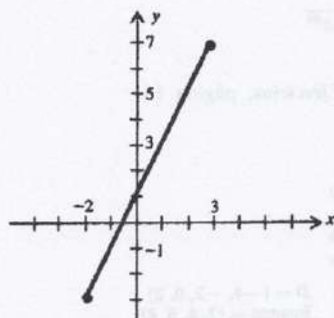
6-1 Ejercicios, página 16.

1. Sí
3. Sí
5. No
7. Sí
9. No
11. No
13. (a) $D=\{-4,-2,0,2\}$
(b) $\text{Imagen}=\{2,4,6,8\}$
(c) $f(x)=x+6$
15. (a) $f=\left\{\left(-3,\frac{7}{2}\right),\left(-1,-\frac{1}{2}\right),(0,-1),\left(1,-\frac{1}{2}\right),\left(3,\frac{7}{2}\right)\right\}$
(b) $\text{Imagen}=\left\{\frac{7}{2},-\frac{1}{2},-1\right\}$
17. $f=\left\{(-1,0),\left(0,\frac{1}{2}\right),\left(1,\frac{2}{3}\right),\left(2,\frac{9}{4}\right),\left(3,\frac{28}{5}\right),\left(4,\frac{65}{6}\right)\right\}$
18. (a) 1 (e) $2t^2-3t+1$
(c) 3 (g) $4t-1$
19. (a) 4, 4, 4, 4 (c) $G(8)=G(4)$
(b) Imagen: $\{4\}$
21. (a) $x=5,-5$
(b) $\text{Imagen}=\{y\mid y\in R, y\geq 0\}$
(c) $f(12)=f(4)\cdot f(3)$
(d) 1
(e) $f(ab)=(ab)^2$; $f(a)\cdot f(b)=a^2\cdot b^2$. Por tanto, $f(a)\cdot f(b)=f(ab)$.
23. $\{y\in R\mid y\neq 1,-2\}$
25. $\{x\mid x\in R\}$
27. $\{x\in R\mid x\neq 4\}$
29. $\{x\in R\mid x\neq 1,-7\}$
31. $\{y\in R\mid y\geq 0\}$

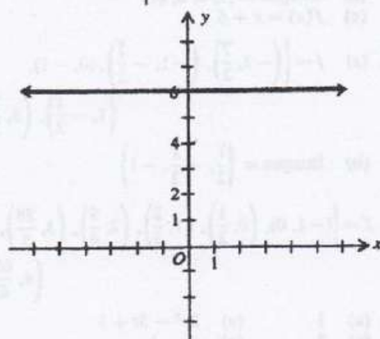
6-2 Ejercicios, página 175

1. $A(1,1)$, $B(0,-5)$, $C(6,-1)$, $D(-4,2)$, $E(0,0)$, $F(5,5)$, $G(-5,-4)$, $H(-3,0)$, $I(-1,4)$, $J(3,-4)$
3. II
5. Sobre el eje y, arriba del origen
7. h
9. l
11. b
13. a
15. f

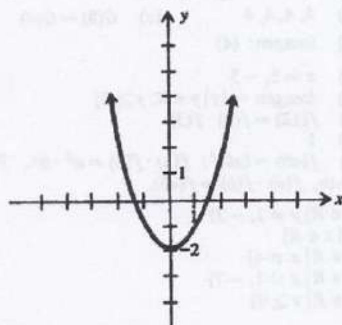
17.



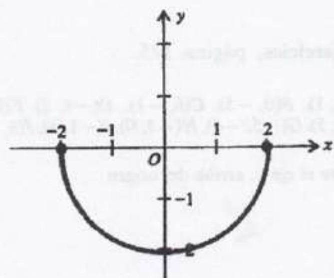
19.



21.

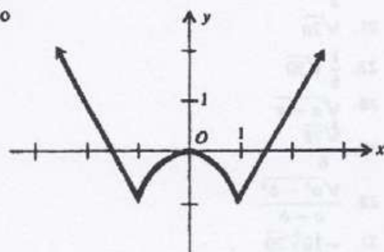


23.

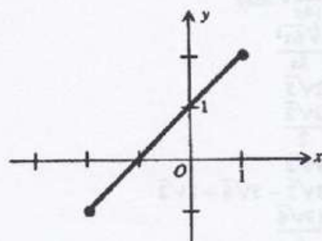


25. No
27. Sí
29. No

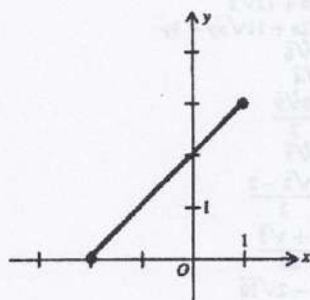
31.



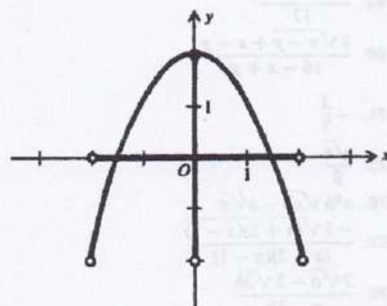
33. (a)



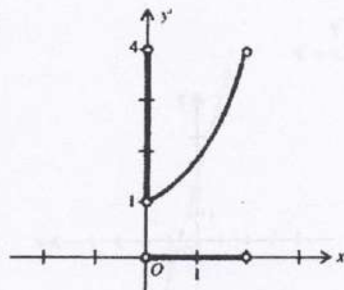
(c)



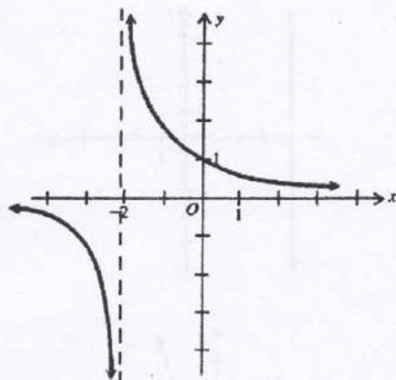
35.



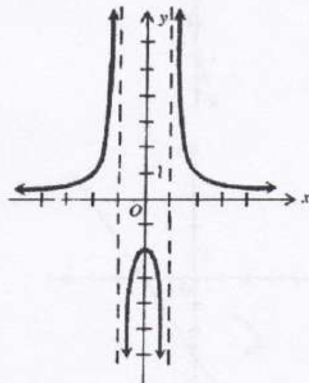
37.



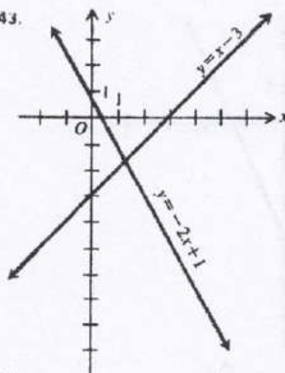
39.



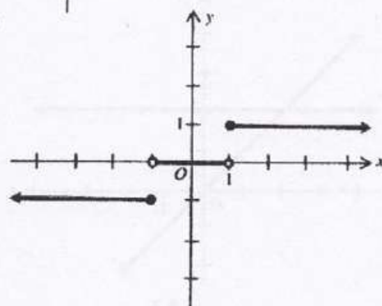
41.



43.



45.

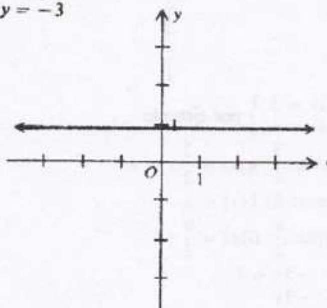


6-3 Ejercicios, página 184

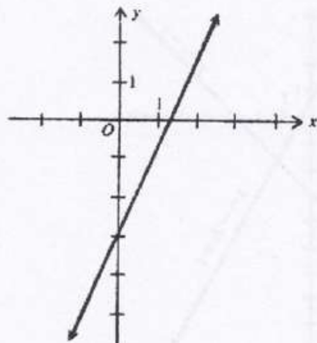
1. (a) $y = \dfrac{3x + 6}{2}$, $f(x) = \dfrac{3x + 6}{2}$; intersecciones con x y y: -2, 3; pendiente $\dfrac{3}{2}$

   (c) $y = \dfrac{3}{2}x + 2$, $f(x) = \dfrac{3}{2}x + 2$; intersecciones: $-\dfrac{4}{3}$ y 2; pendiente $\dfrac{3}{2}$

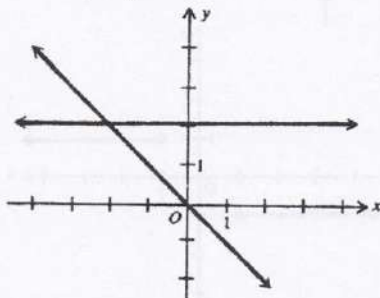
3. $x = 2$
5. $x = 0$
7. $y = -3$
9.



11.



13.



17. $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 5 \\ 2x + 4y = 10 \end{array}\right\}$ por ejemplo

19. Pendiente: $\frac{3}{2}$; $g(x) = \frac{3}{2}x - 4$

21. Pendiente: 0; $L(x) = 3$

23. Pendiente: $\frac{a}{2}$; $G(x) = \frac{a}{2}x$

25. $L(x) = -3x + 1$

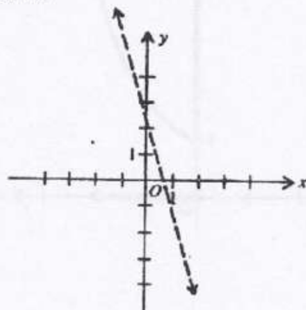
27. $f(x) = -2x$

29. (a) 1 (c) 0

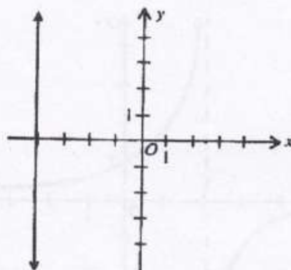
31. $y < 7$

33. $y \geq x + 3$

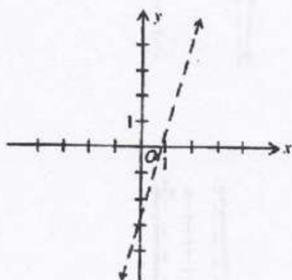
35.



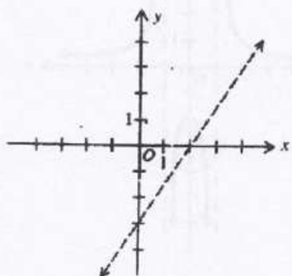
37.



39.

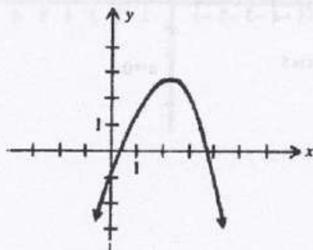


41.

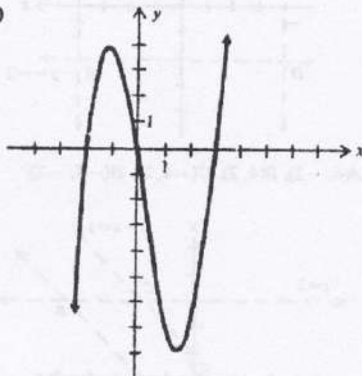


6-4 Ejercicios, página 189

1. (a) $a=2, b=-1, c=3$
   (c) $a=4, b=1, c=0$
   (e) $a=1, b=0, c=0$
3. (a) $x=0$
   (b) $(0, -2); (0, 0); (0, 2)$
   (c) eje y
   (d) $(0, c)$
5. $a=3, c=-3$
7. (a)



   (b) $x=2$
   (c) $(2, 3)$
   (d) Hacia abajo
   (e) $\{y \mid y \leq 3\}$
9. (a) $-2, 0, 3$
   (b) $-2, 0, 3$
   (d) $-2, 0, 3$
   (e) $-2, 0, 3$
   (c)



11. $6, -1$
13. $0, -3$
15. Ninguna
17. $1, 4$

6-5 Ejercicios, página 195

1. $h=ks$
3. $V=klwh$
5. $P=kri^2$
7. $F=\dfrac{kMm}{d^2}$
9. $k=\dfrac{1}{2}, y=\dfrac{1}{2x^3}, \dfrac{1}{16}$
11. $k=4, s=\dfrac{4t}{u}, \dfrac{1}{3}$
13. $37\dfrac{1}{2}$ kg
15. $\dfrac{3}{2}$ ohms
17. Cuatro veces el largo
19. 2
21. $\dfrac{P_1V_1}{T_1}=\dfrac{P_2V_2}{T_2}$
23. $\dfrac{V_1}{r_1^2h_1}=\dfrac{V_2}{r_2^2h_2}$
25. $\dfrac{1}{16}$

7-1 Ejercicios, página 206

1. $\{(1, 7), (2, 4), (3, 1)\}$
11. $(2, -2)$
13. $(2, 3)$
15. $(1, -3)$
17. $\left(\dfrac{17}{2}, -2\right)$
19. $(0, 0)$
21. $(-1, -3)$
23. $(6, 4)$
25. $(-2, 4)$
27. Consistente y dependiente
29. $\left(\dfrac{8}{9}, -\dfrac{1}{3}\right)$
31. $\left(-\dfrac{8}{5}, -\dfrac{12}{5}\right)$
33. $(16, 8)$
35. $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}\right)$
37. $\left(\dfrac{3}{2}, -3\right)$
39. $(1, 2), (1, -2), (-1, 2), (-1, -2)$; cuatro soluciones
41. $(2, 8), (-2, -8)$
43. $\left(-\dfrac{4}{5}, \dfrac{6\sqrt{5}}{5}\right), \left(-\dfrac{4}{5}, -\dfrac{6\sqrt{5}}{5}\right)$
45. (a) (mn, m^2)

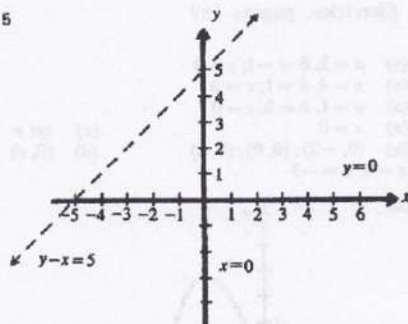
7-2 Ejercicios, página 211

1. $(2, -1, -3)$
3. $(2, 1, -1)$
5. $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{6}\right)$
7. $(-1, 1, 2, 0)$
9. $(6, 2, -1, -4)$
11. $\left(-\dfrac{1}{3}, 1, \dfrac{1}{2}\right)$

7-3 Ejercicios, página 215

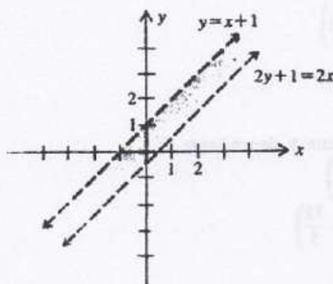
1. 6, 14
3. 10, 5, −18
5. 6 años, 11 años
7. 90 × 150 m
9. 15 hombres, 3 mujeres y 11 niños
11. $y = x^2 + 2$
13. 345
15. 1750 litros
17. $4000 al 4 %
    $6000 al 5 %
    $5000 al 6 %
19. Salida: $666\frac{2}{3}$ litros por hora
    Capacidad: $4666\frac{2}{3}$ litros por hora
21. 50 kph a nivel; 36 kph colina abajo; 30 kph cuesta arriba.

5.

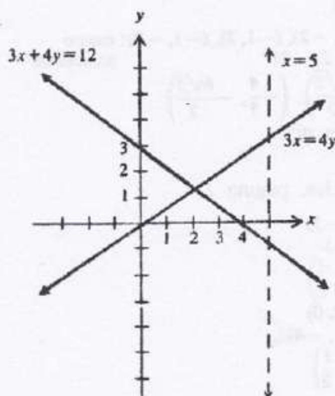


7-4 Ejercicios, página 223

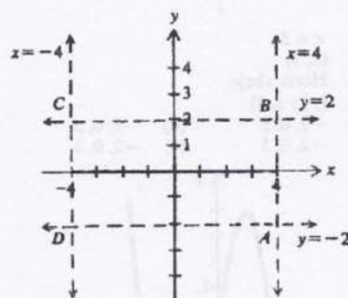
1.



3.

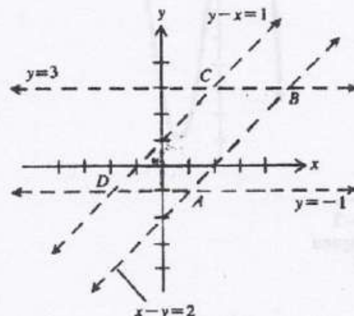


7.



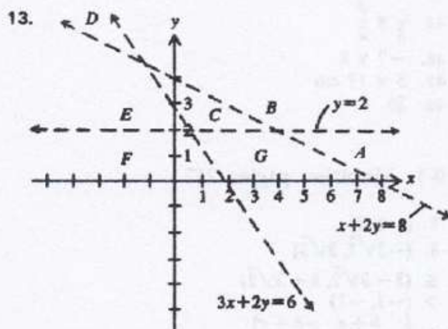
$A(4, -2)$, $B(4, 2)$, $C(-4, 2)$, $D(-4, -2)$

9.



$A(1, -1)$, $B(5, 3)$, $C(2, 3)$, $D(-2, -1)$

11. $\begin{cases} 3 < x < 6 \\ -2 < y < 5 \end{cases}$

13. 

(c) $\left(\frac{2}{3}, 2\right)$; $(4, 2)$; $(-2, 5)$

15. \$25 000 al 4 %; \$75 000 al 5 %
18. 4000 barriles de gasolina; 6000 barriles de combustibles para avión

8-1 Ejercicios, página 232

1. $m = -2, n = 6$
3. $m = 5, n = 6$
5. $m = 2, n = 1$
7. Verdadero
9. Verdadero
11. Falso
13. Falso
15. Verdadero
17. Verdadero
19. Verdadero
21. $\left(\frac{1}{8}, 1\right)$
23. $(-4, 3)$
25. $(8, -6)$
27. $\left(0, \frac{5}{2}\right)$
29. $(2, 1)$
31. $(-4, 0)$
33. $(1, 0)$
35. $(-1, 1)$; $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
37. $(-1, 0)$; $(1, 0)$
39. $(-\sqrt{3}, \sqrt{2})$; $\left(\frac{\sqrt{3}}{5}, \frac{\sqrt{2}}{5}\right)$
41. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $(1, 1)$
57. $(-m, -2n)$
59. $\left(\frac{m}{m^2 + n^2}, \frac{-n}{m^2 + n^2}\right)$
61. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

8-2 Ejercicios, página 241

1. $m = 2, n = -4$
3. $m = 1, n = 1$
5. $m = 0, n = 1$
7. Verdadero
9. Falso
11. Falso
13. Verdadero
15. Verdadero
17. Falso
19. $12 + 9i$
21. $-\sqrt{2} + 6i$
23. $\frac{\sqrt{3} + 1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} i$
25. $5 - i$
27. $4 + 0 \cdot i$
29. $20 + 5i$
31. $-2 + 2i$
33. $12 - 5i$
35. $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} i$
37. $\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2} i$
39. $2 + i$
41. $-1 - i$
43. $1 - 3i$
45. (a) 0 (c) $x = \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
47. $1 - 2i$
49. -1
51. $5 - i$
53. (a) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$ (c) i (e) 1

8-3 Ejercicios, página 246

1. Falso
3. Falso
5. Falso
7. Verdadero
9. $-4i\sqrt{2}$
11. $-2\sqrt{2}$
13. $-5i\sqrt{2}$
15. $6i\sqrt{3}$
17. $13i\sqrt{2}$
19. $i\sqrt{2}$
21. $-\frac{3}{2} i\sqrt{2}$
23. $\frac{1}{6}\sqrt{6}$
25. $1 - i\sqrt{5}$
27. $3\sqrt{3} + 3i\sqrt{3}$

29. $2 + 4i$
31. $-1 - 2i\sqrt{6}$
33. -5
35. -1
37. i
39. $\{5i, -5i\}$
41. $\{\sqrt{14}, -\sqrt{14}\}$
43. $\{3 + 2i, 3 - 2i\}$
45. $\{4 + 2i, 4 - 2i\}$
49. (a) $2, -2, 2i, -2i$
51. $\sqrt{3}$
53. 5
55. 6
57. $\sqrt{5}$
62. Al graficar, obtenemos
(a) $(2, 6)$ (e) $(-3, -2)$
(c) $(1, -1)$
64. (a) $\sqrt{(x+1)^2 + y^2}$

9-1 Ejercicios, página 252

1. $\{-5, 2\}$
3. $\{-3, 4\}$
5. $\left\{-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right\}$
7. $\left\{\frac{2}{5}\right\}$
9. $\{-\sqrt{2}, -1\}$
11. $\left\{-3, \frac{33}{7}\right\}$
13. $\left\{2, -\frac{16}{5}\right\}$
15. $\left\{-\frac{4}{3}, \frac{1}{2}\right\}$
17. $\{-50, 20\}$
19. $\{-a, b\}$
21. $\left\{-\frac{a}{c}, b\right\}$
23. $\left\{\frac{b}{a}, \frac{a}{b}\right\}$
25. $\left\{\frac{1}{6}\right\}$
27. $\{0, 3\}$
29. $\{-1\}$
31. $\{-3\}$
33. (a) $x^2 + x - 2 = 0$
(c) $x^2 + ix + 6 = 0$
(e) $x^2 - 2x - 1 = 0$
35. $\{-3, 0, 17\}$
37. $\{1, 2\}$
39. $\left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$
41. Dos de tales pares son: $-9, -12$ y $9, 12$.

43. $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{2}$
45. -7 y 8
47. 5×17 cm
49. 26

9-2 Ejercicios, página 257

1. $\{-1, 5\}$
3. $\{-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}\}$
5. $\{3 - 3\sqrt{2}, 3 + 3\sqrt{2}\}$
7. $\{-3, -1\}$
9. $\left\{-\frac{b+c}{a}, \frac{-b+c}{a}\right\}$
11. $25; (x+5)^2$
13. $\frac{16}{9}; \left(x + \frac{4}{3}\right)^2$
15. $\frac{1}{4}; \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$
17. $-\frac{9}{4}; \left(x - \frac{3}{2}i\right)^2$
19. $\frac{b^2}{4a^2}; \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$
21. $\{1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}$
23. $\{2 - 2\sqrt{5}, 2 + 2\sqrt{5}\}$
25. $\left\{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$
27. $\left\{-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4}i, -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}i\right\}$
29. $\left\{-2i, \frac{1}{2}i\right\}$
31. $\left\{-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$
33. $\left\{-\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{73}}{4}, -\frac{5}{4} + \frac{\sqrt{73}}{4}\right\}$
35. $\left\{-\frac{a}{2} - \frac{a\sqrt{15}}{2}i, -\frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{15}}{2}i\right\}$
37. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}$
39. $\frac{1+\sqrt{2}}{8}$ km

9-3 Ejercicios, página 262

1. $\{1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}\}$
3. $\left\{-1, \frac{2}{3}\right\}$
5. $\{-1 + 2i, -1 - 2i\}$
7. $\{1 + i, 1 - i\}$
9. $\left\{-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

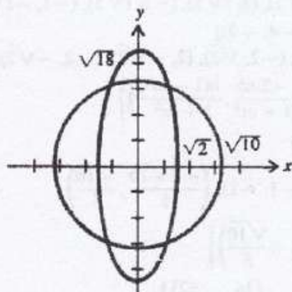
11. $\{-i\}$
13. $\{3-i, -1-i\}$
15. $\left\{0, -\frac{5}{3}i\right\}$
17. $y=-3x$ o $y=2x$
19. $y=2x+3$ o $y=2x-3$
21. $y=x-2$ o $y=3x$
23. $5; 3$
25. $\pi; -3$
27. $\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i; -\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$
29. $9x^2-9x-10=0$
31. $4x^2-12x+9=0$
33. $4x^2-4x+3=0$
35. $x^2-2x+(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6})=0$
37. $-1-i; k=-1$
39. $m=12$ o $m=-12$
41. $\frac{3}{5}$
43. $k=\pm 3$
45. $k=0, 5$
47. Para valores menores que 0.
49. $k=-4$
51. $x<3$
53. $x>0$

9-4 Ejercicios, página 266

1. Falso
3. Falso
5. Verdadero
7. $\{1\}$
9. $\varnothing$
11. $\{-4, 1\}$
13. $\varnothing$
15. $\{6\}$
17. $\varnothing$
19. $\{141\}$
21. $\{0\}$
23. $\varnothing$
25. $\{3\}$
27. $\{-5, 4\}$
29. $\{-i, i, -2, 2\}$
31. $\left\{-\frac{3}{2}, -1, \frac{1}{2}, 1\right\}$
33. $\{-1, 2, 5\}$
35. $\{-2\}$
37. $\left\{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}$
39. $\{-3, -2, 1, 2\}$
41. $\{1\}$

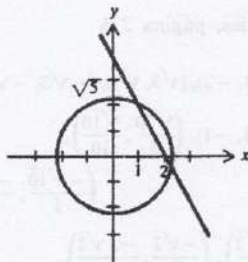
10-1 Ejercicios, página 273

1.



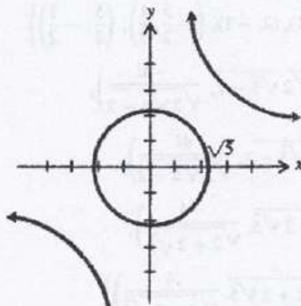
$\{(1, 2), (2{,}2, -0{,}4)\}$

3.



$\{(1, 3), (-1, 3),$
$(1, -3), (-1, -3)\}$

5.



No hay solución real

7. $\{(1, 3), (-1, 3), (1, -3), (-1, -3)\}$
9. $\{(1, \frac{1}{4})\}$
11. $\left\{(4, -5), \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$
13. $\{(-1, 3), (5, -1)\}$

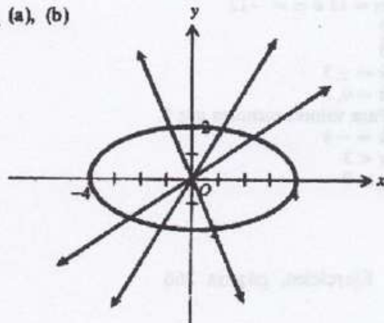
15. $\{(2i, i\sqrt{3}), (2i, -i\sqrt{3}), (-2i, i\sqrt{3}), (-2i, -i\sqrt{3})\}$
17. $\{(3, -i\sqrt{5}), (3, i\sqrt{5}), (-3, i\sqrt{5}), (-3, -i\sqrt{5})\}$
19. $\{(4, 9), (-4, -9)\}$
21. $\{(2, \sqrt{2}), (-2, \sqrt{2}), (2, -\sqrt{2}), (-2, -\sqrt{2})\}$
23. $\left\{(0, b), \left(\frac{-2mb}{1+m^2}, \frac{b(1-m^2)}{1+m^2}\right)\right\}$
25. $|b| \geq \sqrt{5}$
27. $\left\{(1, 1), (-1, -1), \left(\frac{-2\sqrt{10}}{5}, \frac{\sqrt{10}}{5}\right), \left(\frac{2\sqrt{10}}{5}, -\frac{\sqrt{10}}{5}\right)\right\}$
29. $\left\{(-1, -2), \left(\frac{36}{29}, -\frac{32}{29}\right)\right\}$

10-2 Ejercicios, página 276

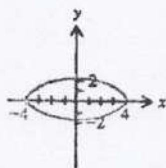
1. $\{(1, 2), (-1, -2), (\sqrt{3}, \sqrt{3}), (-\sqrt{3}, -\sqrt{3})\}$
3. $\left\{(-1, 1), (1, -1), \left(\frac{\sqrt{10}}{5}, \frac{\sqrt{10}}{10}\right), \left(\frac{-\sqrt{10}}{5}, \frac{-\sqrt{10}}{10}\right)\right\}$
5. $\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{4}\right), \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-3\sqrt{2}}{4}\right), \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\}$
7. $\{(2, 3), (-2, -3), (1, -1), (-1, 1)\}$
9. $\left\{(-2, 1), (2, -1), \left(-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\}$
11. $\left\{\left(-i\sqrt{2\sqrt{5}-2}, \frac{-4i}{\sqrt{2\sqrt{5}-2}}\right), \left(i\sqrt{2\sqrt{5}-2}, \frac{4i}{\sqrt{2\sqrt{5}-2}}\right), \left(\sqrt{2+2\sqrt{5}}, \frac{-4}{\sqrt{2+2\sqrt{5}}}\right), \left(-\sqrt{2+2\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{2+2\sqrt{5}}}\right)\right\}$

10-3 Ejercicios, página 276

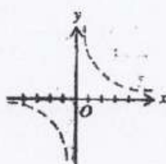
1. $\{(\frac{1}{3}, 3), (-\frac{1}{3}, 3), (\frac{1}{3}, -3), (-\frac{1}{3}, -3)\}$
3. $\{(1, 2), (-1, -2), (4, 1), (-4, -1)\}$
5. $\left\{(0, 0), \left(5, \frac{10}{3}\right), \left(5, -\frac{10}{3}\right)\right\}$
7. $\left\{(3, 2), (-3, 2), \left(\frac{4\sqrt{3}}{5}i, -\frac{3}{5}\right), \left(-\frac{4\sqrt{3}}{5}i, -\frac{3}{5}\right)\right\}$
9. $\left\{(2, -1), (-2, 1), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}i, i\sqrt{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}i, -i\sqrt{2}\right)\right\}$
11. $\{(0, 1), (1, 0)\}$
13. $\{(25, 49)\}$
15. (a) Las líneas son paralelas al eje y.
    (c) (1) $c = \pm 4$
        (2) $-4 < c < 4$
        (3) $c > 4$ o $c < -4$
17. (a), (b)



   (c) (1) Ninguna
       (2) $c \in R$
       (3) Ninguna
19. (a)



   (c)



23. No se da suficiente información para obtener una solución única.
25. $5 \times 12 \times 13$ cm

27. **Base**, 16 m; lados iguales, 17 m

29. 2500 por hora

31. (a) (1) $9-4\sqrt{2}$ (2) -3 (3) $70+30\sqrt{5}$ (c) (1) $\pm(1-\sqrt{2})$ (2) $\pm(3+2\sqrt{5})$ (3) $\pm(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3})$

11-1 Ejercicios, página 283

1. $x=5$

3. $u=9, v=8$

7. $\begin{pmatrix} 10 & \frac{13}{4} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{37}{4} \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 32 & -12 & -36 \\ 24 & -20 & -48 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} -26 & -\frac{19}{3} & -68 & -22\sqrt{5} \\ -54 & 27 & \frac{20}{3} & -\frac{2\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 21x-5 \\ 5x+5 \\ 0 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} \frac{x+3}{x-3} & \frac{2x}{x^2-9} \\ \frac{1}{x-3} & \frac{2x}{(x-3)^2(x+3)} \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 3\sqrt{x^2+4} & \frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}} \\ \frac{-x^2}{\sqrt{4-x^2}} & 0 \end{pmatrix}$

18. (c) $h(kA)=h\cdot\begin{pmatrix} km & kn \\ kp & kq \end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix} h(km) & h(kn) \\ h(kp) & h(kq) \end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix} (hk)m & (hk)n \\ (hk)p & (hk)q \end{pmatrix}=hk\cdot\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}=(hk)A$

19. (c) Propiedad asociativa de la multiplicación escalar
(e) Propiedad transitiva de la igualdad de matrices
(g) Propiedad de la multiplicación escalar de la igualdad de matrices

21. $\begin{pmatrix} \frac{5}{3} & 0 & -\frac{25}{3} \\ \frac{10}{3} & -5 & -10 \end{pmatrix}$

11-2 Ejercicios, página 287

1. $\begin{pmatrix} 2a+3c & 2b+3d \\ 4a+5c & 4b+5d \\ 6a+7c & 6b+7d \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} -3 & 57 & -39 & -12 \\ -38 & 43 & 38 & 5 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -6 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 6 & -12 & 18 & 24 \\ -10 & 20 & -30 & -40 \\ 14 & -28 & 42 & 56 \\ -18 & 36 & -54 & -72 \end{pmatrix}$

11. Una forma: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 7 & 4 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$
$+\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 7 & 4 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -4 \\ -7 & -8 \end{pmatrix}$

En cada caso, el resultado es: $\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -11 & -3 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 7 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{13}{4} \\ \frac{13}{4} & -\frac{55}{4} \end{pmatrix}$

19. $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 7 & -13 & 5 \\ 1 & -9 & 5 \\ -5 & 15 & -5 \end{pmatrix}$

22. (c) Propiedad distributiva de la multiplicación de matrices con respecto a la suma de matrices
(e) Propiedad de la multiplicación de matrices de la igualdad de matrices

23. $\begin{pmatrix} 12 & -44 & 43 \\ -8 & 35 & -33 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} \frac{41}{4} \\ -\frac{171}{4} \end{pmatrix}$

27. $x=-\frac{12}{5}, y=-\frac{26}{5}, z=5$

29. (a) $Q^2=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, Q^4=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

11-3 Ejercicios, página 291

1. -29
3. 3
5. 4
7. $-x^2$
9. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$.

   Entonces $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab - ba = 0$
15. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, entonces $\det(A) = \det(B) = -3$. Pero $A \neq B$.
19. $\left(\frac{80}{41}, -\frac{22}{41}\right)$
21. $\left(\frac{30 - 12\sqrt{5}}{5}, -12 + 5\sqrt{5}\right)$
23. $\left(\frac{1}{1+k+k^2}, \frac{1+k}{1+k+k^2}\right)$

11-4 Ejercicios, página 295

1. (a) -1 (c) 6 (e) -6 (g) -26
3. -226
5. 0
7. Por ejemplo, sumar el triple del tercer renglón al primero; sumar el quíntuplo del tercer renglón al segundo; sumar el tercer renglón al cuarto: 51
9. 357
11. $\left(\frac{17}{23}, -\frac{15}{23}, \frac{124}{23}\right)$
13. $(-3, 6, 1, -4)$
15. $2, \frac{7 \pm i\sqrt{3}}{2}$

12-1 Ejercicios, página 300

1. (a) 4 (c) 5 (e) 0
3. W, I, Q, R
5. Q, R
7. W, I, Q, R
9. (a) $(2 \;\; 6 \;\; -5)$ (c) $(1 \;\; 7)$ (e) $(2 \;\; 0)$ (g) (0) (i) $(\frac{1}{3} \;\; -\frac{3}{2} \;\; 2)$
10. (a) $8x^3 - 7x^2 - \frac{1}{4}x + 4$ (c) $x^2 - 9$ (e) x^2
11. (a) 2 (c) 0 (e) Ninguna
12. (a) 1 (c) 3 (e) Ninguna
13. a, b, y e
15. $(4 \;\; -1 \;\; 6 \;\; 5)$
17. (0)
19. $(5 \;\; 13 \;\; 4 \;\; -5)$
21. $(40 \;\; -49 \;\; 46 \;\; -29 \;\; 12 \;\; -4)$
23. $(2 \;\; -5 \;\; -3)$
25. $(1 \;\; 0 \;\; -5 \;\; 30 \;\; -25)$

12-2 Ejercicios, página 303

1. $x^3 - 4x^2 + 4x - 1 = (x^2 - 3x + 1)(x - 1) + 0$
3. $6x^3 - 4x^2 + 5x - 7 = (6x^2 + 8x + 21)(x - 2) + 35$
5. $q = (5 \;\; 4 \;\; -2)$, $r = (0)$
7. $q = 3x^3 + 5x^2 - 7x + 4$, $r = -8x + 13$
9. $q = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$, $r = a^2$
11. $x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 13x + 25 + \frac{49x - 49}{x^2 - 3x + 2}$
13. $16x^4 + 16ax^3 + 12a^2x^2 + 4a^3x + a^4 + \frac{0}{4x^2 - 4ax + a^2}$

12-3 Ejercicios, página 306

1. (a) $(1 \;\; 4 \;\; 3)$
2. (a) $f = \{(1, 3), (2, 1), (3, 1), (4, 3), (5, 7)\}$
3. (a) $f + g = \{(1, 3), (2, 15), (3, 24), (4, 35), (5, 48)\}$
5. $f \cdot g = \{(1, 15), (2, 14), (3, 23), (4, 96), (5, 287)\}$
7. $g(-1) = -21$
11. $k = 7$
16. (a) $x - \sqrt{2}, x + \sqrt{2}$ (c) Ninguna
17. (a) $1, -1, 2, -2, 3, -3, 6$, o -6 (c) 5

12-4 Ejercicios, página 311

1. $q = 5x^2 + 11x + 41$, $r = 117$
3. $q = 32x^4 + 16x^3 + 8x^2 + 4x + 2$, $r = 0$
5. -45
7. $\frac{9}{2}$
9. $(2 \;\; 0 \;\; 3 \;\; -5)$
11. 1
13. $\pm 1, \pm 5, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{5}{6}$
15. 1, 3, 5
17. $(3 \;\; -1) \cdot (1 \;\; 1) \cdot (2 \;\; -1 \;\; 2)$
19. $-\frac{5}{2}$
21. $f = \{(x, y) \mid y = x^3 - 4x^2 - 17x + 60, x \in R\}$
22. $x^3 - 5x^2 - 2x + 10$

13-1 Ejercicios, página 315

1. $2^3 = 8$
3. $3^2 = 9$

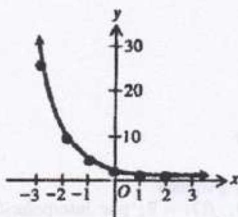
5. $\frac{1}{4}$

7. 64

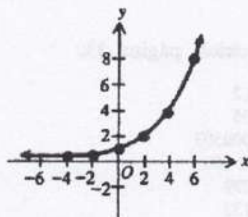
9. 1

11. $\left\{\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right), \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right), \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right), (0, 1), \left(\frac{1}{6}, 2\right), \left(\frac{1}{3}, 4\right), \left(\frac{1}{2}, 8\right)\right\}$

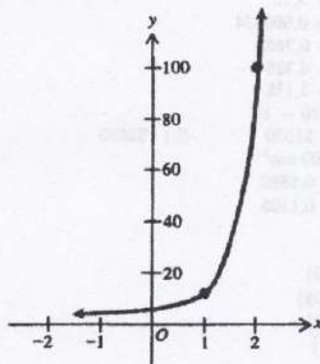
13.



15.



17.



19. $\{-3\}$

21. $\{6\}$

23. $\left\{\frac{4}{3}\right\}$

25. $\{-1, 3\}$

27. $\{x \in R \mid x > 3\}$

29. $\{x \in R \mid x \leq -4\}$

31. $\{x \in R \mid x \geq 1\}$

33. $\emptyset$

35. 6

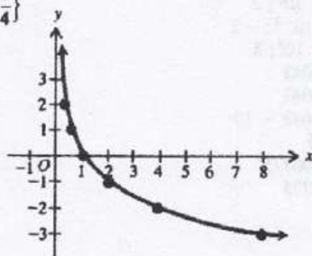
37. 10

39. $\frac{1}{2}$

13-2 Ejercicios, página 318

1. $\log_{10} 1000 = 3$
3. $\log_{15} 1 = 0$
5. $\log_{.2} 0{,}008 = 3$
7. $\log_b y = x$
9. $\log_x y = 10$
11. $3^3 = 27$
13. $4^{-1} = \frac{1}{4}$
15. $10^0 = 1$
17. $10^y = x$
19. $x^{10} = y$
21. 4
23. 4
25. $\frac{1}{2}$
27. 0
29. $\sqrt{3}$
31. $\frac{1}{2}$
33. $\{-5\}$
35. $\{4\}$
37. $\{27\}$
39. $\{3,3\}$
41. $\{-4\}$
43. $\{16\}$
45. $\left\{\frac{1}{25}\right\}$
47. $\{2\}$
49. $\left\{\frac{1}{4}\right\}$

51.



55.

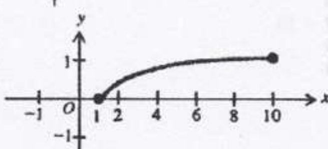


Imagen de $g = \{y \in R \mid 0 \leq y \leq 1\}$

13-3 Ejercicios, página 321

3. 0,78
5. 0,50
7. 0,18
9. −0,70
11. 0,27
13. 0,70
15. $\log_b \frac{xy}{z^2}$
17. $\log_b \sqrt{xy}$
19. $\log_b x^2$
21. $\log_b \sqrt[4]{yz^3}$
23. $x = 1$
25. $x = -1$
27. $x = 10$
29. $x = \frac{3}{25}$
33. $x = 3y$
35. $x = \sqrt{y}$
37. $x = \frac{4}{y}$

13-4 Ejercicios, página 326

1. 3330
3. 0,000101
5. 0,714
7. 1 230 000
9. 123,4
11. 3×10^{-3}; −3
13. $6,7 \times 10^{4}$; 4
15. $6,7 \times 10^{-2}$; −2
17. $1,86 \times 10^{5}$; 5
19. $3,361 \times 10^{2}$; 2
21. $2,02 \times 10^{-2}$; −2
23. $1,527 \times 10^{3}$; 3
25. (a) 2,6042
    (c) 0,6042
    (e) 4,6042 − 10
26. (a) 775
    (c) 0,000775
    (e) 0,0775
27. 3,0374
29. 5,2695
31. 0,4564
33. 7,8109 − 10
35. 1,7889
37. 3,7642
39. 6,73
41. 49,2
43. 0,603
45. 0,0147
47. 0,594

13-5 Ejercicios, página 329

1. 0,4089
3. 0,0386
5. 2,5401
7. 9,0913 − 10
9. 8,9713 − 10
11. 7,8294 − 10
13. 6,0265
15. 1,5264
17. 4,053
19. 50,27
21. 0,02773
23. 7,5480
25. 1,032
27. 0,007227
29. 9,988
31. 2,5; muy pequeña
33. $f(2) = 4$; $f(3) = 9$; por interpolación lineal: $f(2,5) = 6,5$; grande

13-6 Ejercicios, página 332

1. $N = 20,2$
3. $N = 8,05$
5. $N = 0,000502$
7. $N = 122\,000$
9. $N = 0,799$
11. $N = 0,133$
13. $N = 3,72$
15. $N = 0,000634$
17. $N = 0,7660$
19. $N = 4,325$
21. $N = 3,138$
23. 9,6786 − 10
25. (a) $1630   (b) $2650
27. 42 200 cm³
29. $x = 0,6990$
31. $x = 0,1505$
33. 2,81
35. 1,21
37. {2,39}
39. {0,369}
41. {1,59}
43. {101}
45. {30}
47. {3}

14-1 Ejercicios, página 337

1. 3, 9, 19, 33, 51
3. 1, 8, 27, 64, 125
5. −5, 25, −125, 625, −3125
7. 1, 4, 19, 364, 132499

9. Dominio = N
Imagen = $\{2, 5, 8, 11, \ldots\}$
$= \{x \mid x = 3n - 1, n \in N\}$
11. Dominio = $\{x \in N \mid 1 \leq x \leq 7\}$
Imagen = $\{3,\ 0{,}3,\ 0{,}03,\ 0{,}003,\ 0{,}0003,\ 0{,}00003,\ 0{,}000003\}$
13. Dominio = $\{x \in N \mid 1 \leq x \leq 39\}$
Imagen = $\{14, 15, 16, \ldots, 52\}$
$= \{x \in N \mid 14 \leq x \leq 52\}$
15. Dominio = $\{x \in N \mid 1 \leq x \leq 6\}$
Imagen = $\left\{\frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\right\}$
$= \left\{x \mid x = \frac{1}{2^{6-n}}, n \in N, 1 \leq n \leq 6\right\}$
17. 149
19. $4n$
21. $\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$
23. $(-1)^n$
25. $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21$
27. $19 + 22 + 25 + 28 + 31 + 34$
29. $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{10} - \frac{1}{28} + \frac{1}{82}$
31. $\sum_{n=1}^{6} (-1)^{n+1}(2n - 1)(2n)$
33. $\sum_{n=1}^{100} n^{n+1}$
35. $\sum_{n=5}^{49} 2n$
37. $2{,}5 + \sum_{n=1}^{5} \frac{13}{10^{2n+1}}$

14-2 Ejercicios, página 339

1. (a) Geométrica, $r = -2$, $a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)(-2)^{n-1}$
(c) Aritmética, $d = 1$, $a_n = n$
(e) Geométrica, $r = 2$, $a_n = 2^n$
3. (a) 11, 14, 17, 20, 23
(c) $5, \frac{28}{5}, \frac{31}{5}, \frac{34}{5}, \frac{37}{5}$
4. (a) 11, 33, 99, 297, 891
(c) $5, 3, \frac{9}{5}, \frac{27}{25}, \frac{81}{125}$
5. (a) 16, 32, 64
(c) $\frac{4}{x^3}, \frac{8}{x^4}, \frac{16}{x^5}$
6. (a) 12, 16, 20
(c) $-14, -26, -38$
(e) $1 + 3i, 1 + 4i, 1 + 5i$
7. Cincuenta y tres
9. $8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}$
11. (a) $x = \frac{5}{2}$ (b) $x = \pm\frac{3}{2}$
13. 81
15. Una posibilidad es 4, 5, 6, 12, 24
Todas las posibilidades si la sucesión es $4, a, b, c, 24$:
$$\begin{cases} a = \frac{b+4}{2} \\ c^2 = 24b \end{cases} \quad 4 < b < 24$$
17. Al cuarto año
19. (a) \$265,50 (b) \$268,90

14-3 Ejercicios, página 343

1. 5050
3. 2500
5. $a_7 = -\frac{64}{3}$, $S_7 = -\frac{43}{3}$
7. $199\frac{7}{32}$
9. 3, 15, 75, 375, 1875
11. 7693
13. $4{,}21 + [0{,}005 + 0{,}005(0{,}1) + 0{,}005(0{,}1)^2 + 0{,}005(0{,}1)^3]$
14. (a) Geométrica; 1092
(c) Ni una ni otra; $\frac{499}{140}$
(e) Geométrica; $\frac{2047}{1024}$
(g) Geométrica; 10
15. $\frac{4}{3}$
17. 35
19. \$93,60
21. $20\,000[(1{,}05)^{26} - 1{,}05] \approx$ \$50 160
23. (a) 4
(c) La cantidad despreciada, $\frac{a_1 r^n}{1 - r}$, se vuelve muy pequeña a medida que n crece.
24. (a) 2 (c) $\frac{9}{2}$
25. (a) $\frac{25}{4}$
26. (a) $\frac{13}{99}$ (c) $\frac{11}{9}$
27. (a) $(-1, 2)$

Indice

NOTAS

NOTAS

NOTAS

Sí, envíeme el catálogo de las novedades de OXFORD en

❑ Español	❑ Texto universitario	❑ Ciencias/Tecnología
❑ Informática	❑ Inglés	❑ Área profesional
❑ Derecho	❑ Ingeniería	❑ Economía/Negocios
		❑ Otros

Nombre ....
Institución...
Dirección ....
Ciudad, Estado o Departamento ....
Cargo ....
Departamento ....
Código postal ....
País ....
Teléfono ....

Temas que le gustaría fueran tratados en futuros libros de OXFORD: ....
....
....
Título de la obra ....
....
Comentarios ....
....
....

¿Por qué elegí este libro?

❑ Prestigio del autor ❑ Prestigio de OXFORD
❑ Reseña Revista ....
❑ Catálogo OXFORD
❑ Buscando en librería ....
❑ Requerido como texto ❑ Precio

Este libro me ha parecido:

❑ Malo ❑ Bueno ❑ Excelente

OXFORD
UNIVERSITY PRESS

Por favor, llene este cupón y envíelo por fax al (01) 5705 3738

OFICINAS DE OXFORD, REPRESENTANTE Y DISTRIBUIDORES

México
Oficinas centrales
Oxford University Press México, S.A. de C.V.
Antonio Caso 142, Col. San Rafael
06470, México, D.F.
tels.: (5255) 5592 4277 y 5592 5600
Servicio a clientes: 01800 7143840
fax: (5255) 5705 3738
e-mail: oxford@oupmex.com.mx
web: www.oup.com/mx

Guadalajara
Calle Colonia núm. 295-A,
Col. Americana, 44140, Guadalajara, Jal.
tels.: (0133) 3826 2092 y 3826 2095
e-mail: guadalajara@oupmex.com.mx

Monterrey
Degollado núm. 473 Sur,
Col. Ma. Luisa, 64040, Monterrey, N.L.
tel.: (0181) 8340 2063 y 8340 4910
e-mail: monterrey@oupmex.com.mx

León
Edgar López Orozco
Yaquis Ote. 112, Col. Bugambilias 37270
León, Guanajuato
tel.: (01477) 131 2243
e-mail: lopezed@oupmex.com.mx

Mérida
Javier Renan Ascencio Maldonado
Calle 47 Diagonal núm. 203,
entre 16 y 18, Col. Petcanche,
97145, Mérida, Yucatán
tel: 01 999 183 92 45
e-mail: ascencioj@oupmex.com.mx

Argentina
Distribuidor autorizado
CUSPIDE / Libros, S.A.
Suipacha 764, 1008 - Buenos Aires, Argentina
tel.: (54-11) 4322 8868 y 4322 3456
fax: (54-11) 4322 8865
e-mail: libros@cuspide.com

Centroamérica
Oxford University Press
Oficina Regional Centroamérica
7a. Avenida 19-35, Zona 11,
Col. Mariscal, 01011, Guatemala, Ciudad
tels.: (00502) 2485 0300 al 02
e-mail: oficinaguatemala@oupmex.com.mx

Chile
Distribuidor autorizado
Alfaomega Grupo Editor, S.A.
Doc. Manuel Barros Borgoño 21
Providencia, Santiago - Chile
tel.: (562) 235 4248
e-mail: pablo.calderon@galileo.cl

Colombia
Distribuidor autorizado
GRUPO K-T-DRA LTDA
Diagonal 85 A núm. 26 - 05, Polo Club
A.A. 93825, Santafé de Bogotá, D.C.
tel.: (571) 257 0895
fax: (571) 218 7629
e-mail: k-t-dra@colomsat.net.co

Ecuador
Distribuidor autorizado
CORBUSTOS, S.A.
Av. 10 de Agosto 4599 y Juan Pablo Sanz
PBX 456600, Quito, Ecuador
tel.: (593) 2245 6600 o 6900
fax: (593) 2245 6875
e-mail: servicio@libreriacientifica.com
web: www.libreriacientifica.com

España
Distribuidor autorizado
Editorial Reverté, S.A. Loreto 13-35,
local B, 08029, Barcelona, España
tel.: (34) 93 419 3336
fax: (34) 93 419 5189
e-mail: promocion@reverte.com
web: www.reverte.com

Perú
Fundación del Libro Universitario
Av. Arequipa núm. 3845, Miraflores, Lima,
tel.: (5114) 421 0160 o 0196
fax: (5114) 440 6587
e-mail: libun@libun.edu.pe

Uruguay
Distribuidor autorizado
Jorge Saracini
Marcelino Berthelot 1679
Montevideo, Uruguay
tel.: (5982) 204 0420
fax: (5982) 203 8747
e-mail: jorgesaracini@hotmail.com

CONSULTE NUESTRO SITIO
www.oup.com/mx

